

Задания и решения второго (очного) тура региональной олимпиады школьников Хабаровской краевой заочной физико-математической школы и Совета ректоров вузов Хабаровского края и Еврейской автономной области  
2011/2012 учебный год

МАТЕМАТИКА

**Задача 1.** Найти углы треугольника, у которого длины сторон составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии.

**Решение.** Пусть  $a \leq b \leq c$  — стороны треугольника. Так как они составляют арифметическую прогрессию, то  $a + c = 2b$ . Условие с геометрической прогрессией приводит к равенству  $b^2 = ac$  и поэтому

$$(a - c)^2 = (a + c)^2 - 4ac = 4b^2 - 4b^2 = 0.$$

Следовательно  $a = b = c$  и треугольник равносторонний; с одинаковыми углами по  $60^\circ$ .

**Задача 2.** Пусть  $n$  — нечетное натуральное число, которое делится на 3. Обозначим через  $s$  количество всех делителей  $n$  вида  $4k + 1$  ( $k$  — неотрицательное целое), а через  $t$  количество всех делителей  $n$  вида  $4k + 3$ . Доказать, что если  $s \neq t$ , то  $n$  делится на 9.

**Решение.** Предположим, что утверждение неверно и  $n$  не делится на 9. Пусть  $d_1, d_2, \dots, d_k$  — делители  $n$ , которые не делятся на 3. Тогда  $3d_1, 3d_2, \dots, 3d_k$  — остальные делители. Легко заметить, что все делители  $n$  разбиваются на пары чисел  $(d_i, 3d_i)$ , одно из которых имеет вид  $4k + 1$ , а второе —  $4k + 3$ . Поэтому  $s = t$ , что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно и  $n$  делится на 9.

**Задача 3.** Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точках  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Окружность с центром в точке  $P$  и радиусом  $R = PB = PC$  пересекает продолжения сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что точки  $K, L$  и  $P$  лежат на одной прямой.

**Решение.** По формуле величины угла между прямыми пересекающими окружность,  $2\angle A = \sphericalangle KL - \sphericalangle BC$ . Заметим, что угол при вершине  $A$  опирается на  $\sphericalangle BC$  и ему равны углы  $PBC$  и  $PCB$  (углы между секущей  $BC$  и касательными в точках  $B$  и  $C$ ). Значит,  $\sphericalangle KL = 2\angle A + \sphericalangle BC = \angle PBC + \angle PCB + \angle BPC = 180^\circ$ . А это и требовалось доказать.

**Задача 4.** Пусть  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{2\pi x}{3})$ . Доказать, что  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$  для любых целых  $a$  и  $b$ .

**Решение.** Так как функция синус периодична с периодом  $2\pi$ , то  $f(x + 3) = f(x)$  для любого  $x$ . Поэтому  $f(c)$  для целых  $c$  однозначно определяются своими значениями на остатках от деления  $c$  на 3:  $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -1$ . Если одно из чисел  $a$  и  $b$  равно 0, то в доказываемом равенстве справа и слева стоят одинаковые числа — нули. В остальных случаях

$$\begin{aligned} f(1 \cdot 1) &= f(1) = 1 = f(1) \cdot f(1), \\ f(1 \cdot 2) &= f(2) = -1 = f(1) \cdot f(2), \\ f(2 \cdot 2) &= f(4) = f(1) = 1 = f(2) \cdot f(2). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

**Задача 5.** Пусть  $a(n)$  — последовательность, которая задаётся начальными значениями  $a(0) = 1$ ,  $a(1) = 3$  и рекуррентным соотношением  $a(n+2) = a(n) + a(n+1)$ , а последовательность  $b(n)$  задаётся начальными значениями  $b(0) = 2$ ,  $b(1) = 1$  и рекуррентным соотношением  $b(n+2) = b(n) - b(n+1)$ . Вычислить  $a(2011)b(2012) + a(2012)b(2011)$ .

**Решение.** Заметим, что для любого натурального  $n$

$$\begin{aligned}c(n+1) &= a(n)b(n+1) + a(n+1)b(n) = \\ &= a(n)(b(n-1) - b(n)) + (a(n-1) + a(n))b(n) = \\ &= a(n)b(n-1) + a(n-1)b(n) = c(n).\end{aligned}$$

Поэтому все элементы последовательности  $c(n)$  совпадают друг с другом и интересующее нас число равно  $c(2012) = c(1) = a(0)b(1) + a(1)b(0) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$ .