Районная олимпиада по математике
г. Хабаровск, 2003 год

9 КЛАСС

Задача 1. Как от куска шнура 2/3 метра отрезать полметра, не имея под рукой линейки?

Решение. Складываем шнур два раза пополам. Каждая из четырех частей имеет длину

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}.$$

Отрезав одну часть, получим нужный кусок длиной

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Задача 2. Петя задумал одно из трех чисел: 1, 2, 3. Может ли Коля определить задуманное число, задав Пете только один вопрос? При этом Петя отвечает на вопрос лишь одним из трех способов: «да», «нет», «не знаю».

Решение. Коля может задать следующий вопрос: «Если число не равно 2, то оно меньше 3?» Ответу «да» соответствует число 1, «нет» — 3, «не знаю» — 2.

Задача 3. Пусть $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Доказать, что

$$x+y \le 1+xy.$$

Решение. Так как

$$0 \le (1-x)(1-y) = 1-x-y+xy,$$

то $x+y \le 1+xy$. Что и требовалось доказать.

Задача 4. Каких чисел больше среди первой сотни: тех, в записи которых есть цифра 9, или тех, в записи которых ее нет? А среди первых десяти миллионов?

Решение. Среди чисел первой сотни не содержат девятки $8+8\cdot 9+1=81$ число. Первое слагаемое соответствует цифрам от 1 до 8. Второе — двузначным числам, с первой цифрой от 1 до 8 и второй цифрой от 0 до 8. Третье слагаемое соответствует 100. Остальные числа $100-81=19$ содержат в записи хотя бы одну девятку. Значит, чисел первого типа меньше, чем чисел второго.

Точно так же находим, что среди первых десяти миллионов имеется

$$\begin{gathered}8+8\cdot 9+8\cdot 9^2+8\cdot 9^3+8\cdot 9^4+8\cdot 9^5+8\cdot 9^6+1=\\=(9-1)+(9-1)\cdot 9+(9-1)\cdot 9^2+\cdots+(9-1)\cdot 9^6+1=\\=9\cdot 9^6=9^7\end{gathered}$$

чисел, в записи которых нет девяток. Проверка показывает, что

$$9^7<\frac{1}{2}\cdot 10^7.$$

Поэтому среди первых десяти миллионов чисел первого типа больше, чем второго.

10 КЛАСС

Задача 1. Из четырех монет одна фальшивая (она отличается от настоящей по весу, но неизвестно, в какую сторону). Требуется за два взвешивания на двух чашечных весах без гирь найти фальшивую монету.

Решение. Пронумеруем монеты цифрами: 1, 2, 3, 4. Сначала сравниваем первую и вторую, а потом первую и третью монеты.

Если веса первой и второй монет равны, то они настоящие. В случае с помощью второго взвешивания определяем, что фальшивая четвертая, если первая и третья равны по весу. Если же они не равны по весу, то третья фальшивая.

Пусть веса первой и второй не равны. Тогда одна из них фальшивая, а третья настоящая. Тогда второе взвешивание, как и в первом случае, позволяет точно определить фальшивую монету.

Задача 2. Пусть $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Доказать, что $1 + x^3y^3 \ge xy(x+y)$.

Решение. Заметим, что

$$0 \le (1 - xy^2)(1 - x^2y) = 1 - xy^2 - x^2y + x^3y^3.$$

Поэтому $1 + x^3y^3 \ge xy^2 + x^2y = xy(x+y)$. Что и требовалось доказать.

Задача 3. При каких натуральных n все три числа

$$n, \quad n+2, \quad n+4$$

являются простыми числами?

Решение. При делении n на 3 в остатке получается 0, 1, 2. Последовательно рассматривая три случая, убеждаемся, что одно из чисел n, $n+2$, $n+4$ делится на 3. Поэтому они все простые только при $n = 3$.

Задача 4. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, причем $AB \| DE$ и $BC \| EF$. Доказать, что $CD \| AF$.

Решение. Так как $AB \| DE$, то $\angle ACE = \angle BFD$, а так как $BC \| EF$, то $\angle CAE = \angle BDF$. Треугольники ACE и BDF имеют по два равных угла, поэтому третьи углы у них тоже равны. Из равенства этих углов следует равенство дуг AC и DF, т.е. параллельность хорд CD и AF.

11 КЛАСС

Задача 1. Двое по очереди кладут пятирублевые монеты на круглый стол. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. При правильной игре выигрывает первый. На первом ходе он кладет монету на центр стола. Далее он выкладывает их симметрично относительно центра после каждого хода второго.

Задача 2. Пусть $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Доказать, что

$$1 + z^2xy \ge z(x+y).$$

Решение. Так как

$$0 \le (1 - zx)(1 - zy) = 1 - zx - zy + z^2xy,$$

то

$$1 + z^2xy \ge zx + zy = z(x + y).$$

Неравенство доказано.

Задача 3. Может ли быть точным квадратом число, сумма цифр которого равна 32?

Решение. Пусть

$$N = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + \cdots + a_k \cdot 10^k$$

есть десятичная запись натурального.

Поскольку при делении на 3 чисел 10, $100 = 10^2, \ldots, 10^k$ всегда получается в остатке 1, то остаток от деления N и $a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 32$ на 3 совпадают. То есть, N при делении на 3 дает в остатке 2. Легко проверить, что квадрат натурального при делении на 3 не может давать такого остатка. Значит, N не квадрат.

Задача 4. Доказать, что замкнутую ломаную линию длины 1 можно поместить в круг радиуса 1/4.

Решение. Возьмем на ломанной две точки A и B, делящие ее периметр пополам. Тогда $AB \le 1/2$. Докажем, что все точки ломанной лежат внутри круга радиуса 1/4 с центром в середине O отрезка AB. Пусть M — произвольная точка ломаной, а точка M_1 симметрична ей относительно точки O. Тогда

$$MO = M_1M/2 \le (M_1A + AM)/2 = (BM + AM)/2 \le 1/4,$$

так как $BM + AM$ не превосходит половины длины ломаной.