

9 КЛАСС

Задача 1. Пусть n ($n \geq 3$) различных точек расположены на плоскости так, что любые три из них лежат на одной прямой. Доказать, что все они лежат на одной прямой.

Решение. Зафиксируем любые две точки из набора и проведем через них прямую. Тогда по условию любая из остальных точек лежит на этой прямой. А это и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что для любого натурального k найдется $m = m(k)$ такое, что $([x] - \text{целая часть } x \in \mathbb{R})$:

$$\left[\sqrt{m+1} \right] = \left[\sqrt{m+2} \right] = \dots = \left[\sqrt{m+k} \right].$$

Решение. Положим $m = k^2$. Тогда для любого $l = 1, 2, \dots, k$

$$k^2 < m + l = k^2 + l \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1.$$

Отсюда следует, что

$$k < \sqrt{k^2 + l} < k + 1.$$

Поэтому

$$\left[\sqrt{k^2 + l} \right] = \left[\sqrt{k^2 + 2} \right] = \dots = \left[\sqrt{k^2 + k} \right] = k.$$

Задача 3. Найти все решения в натуральных числах уравнения

$$n^2 + n + 2 = m^2.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на 4, получим

$$\begin{aligned} 4n^2 + 4n + 8 &= (2m)^2 \\ &\Downarrow \\ (2n + 1)^2 + 7 &= (2m)^2 \\ &\Downarrow \\ 7 &= (2m)^2 - (2n + 1)^2 = (2m - 2n - 1)(2m + 2n + 1). \end{aligned}$$

Поэтому $2m - 2n - 1 = 1$ и $2m + 2n + 1 = 7$. Отсюда находим единственное решение

$$n = 1, \quad m = 2.$$

Задача 4. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Доказать, что для некоторых положительных x, y, z выполняются равенства

$$a = y + z, \quad b = x + z, \quad c = x + y.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ z + x = b, \end{cases}$$

получим

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a), \quad y = \frac{1}{2}(a + c - b), \quad z = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Поскольку в треугольнике сумма длин двух сторон всегда больше третьей, то x, y, z — положительные числа. А это и требовалось доказать.

Задача 5. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — любые вещественные числа из отрезка $[-1, 1]$. Доказать, что

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2 - x_3x_4| \leq 4.$$

Решение. Заметим, что

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2 - x_3x_4 = (1 + x_1)(1 + x_2) - (1 - x_3)(1 - x_4).$$

Справа стоит разность двух неотрицательных чисел, каждое из которых не превосходит 4. Поэтому $|y| \leq 4$. Неравенство доказано.

10 КЛАСС

Задача 1. Сколько раз встречается число 16 в последовательности $x_n = \left[\sqrt[3]{n^2} \right]$: ($n = 1, 2, 3, \dots$; $[x]$ — целая часть вещественного x).

Решение. Равенство $\left[\sqrt[3]{n^2} \right] = 16$ выполняется только в случае, если

$$\begin{aligned} 16 &\leq \sqrt[3]{n^2} < 17 \\ &\Downarrow \\ 64 &= (\sqrt{16})^3 \leq n < (\sqrt{17})^3 = 17\sqrt{17}. \end{aligned}$$

Легко проверить (возведением в квадрат), что

$$70 < 17\sqrt{17} < 71.$$

Поэтому $\left[\sqrt[3]{n^2} \right] = 16$ только для $n = 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70$. То есть, число 16 встречается в последовательности 7 раз.

Задача 2. Найти высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S .

Решение. Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания трапеции AD в точке E .

Так как трапеция равнобедренная, а диагонали ее взаимно перпендикулярны, то треугольник ACE равнобедренный и прямоугольный. Пусть CF — высота длины h . Поскольку $AF = FE = CF = h$, то $BC + AD = AE = 2h$. Отсюда следует равенство

$$S = \frac{1}{2}(BC + AD)h = h^2.$$

Окончательно находим, что $h = \sqrt{S}$.

Задача 3. Пусть $a + b + c = 0$. Доказать, что

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Решение. Утверждение задачи непосредственно следует из легко проверяемого тождества

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Задача 4. Решить в натуральных числах уравнение

$$m^3 + 3m^2 = n^3 + 19.$$

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned} m^3 + 3m^2 &= n^3 + 19 \\ &\Downarrow \\ (m + 1)^3 - n^3 &= 3m + 20. \end{aligned}$$

Поскольку $n \leq m$, то $3m + 20 \geq (m + 1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1$.

То есть,

$$3m^2 \leq 19.$$

Поэтому $m = 1$ или 2 . Из двух вариантов для m проходит только один с $m = 2$ и $n = 1$.

Задача 5. Многоугольник без самопересечений (на плоскости) разбит на непересекающиеся треугольники. Пусть n_0 — число точек, являющихся вершинами треугольников, n_1 — число отрезков, являющихся сторонами треугольников, n_2 — количество треугольников. Доказать, что

$$n_0 - n_1 + n_2 = 1.$$

Решение. Проведем индукцию по n_0 . Если $n_0 = 3$, то $n_1 = 3$ и $n_2 = 1$. В этом случае $n_0 - n_1 + n_2 = 3 - 3 + 1 = 1$. База индукции установлена.

Предположим теперь, что утверждение верно для $n_0 = k$.

Рассмотрим случай $n_0 = k + 1$. Выберем любую вершину P на исходном многоугольнике. Предположим, что она соединена l отрезками с другими точками. Удалив ее вместе с выходящими из нее отрезками, мы получим конфигурацию, для которой

$$n'_0 = k, \quad n'_1 = n_1 - l, \quad n'_2 = n_2 - l + 1.$$

По предположению индукции

$$1 = n'_0 - n'_1 + n'_2 = (n_0 - 1) - (n_1 - l) + (n_2 - l + 1) = n_0 - n_1 + n_2.$$

А это и требовалось доказать.

11 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что для любого натурального n ($[x]$ — целая часть вещественного x)

$$\left[\sqrt{n^2 + 3n + 1} \right] = n + 1.$$

Решение. Заметим, что

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n + 1 < n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2.$$

Поэтому

$$n + 1 < \sqrt{n^2 + 3n + 1} < n + 2.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\sqrt{n^2 + 3n + 1} \right] = n + 1.$$

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD . Пусть r, r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ADC, BDC соответственно. Доказать, что

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2.$$

Решение. Поскольку треугольники ABC, ADC, BDC подобны, то

$$\frac{r}{AB} = \frac{r_1}{AC} = \frac{r_2}{BC} = k.$$

Отсюда по теореме Пифагора находим

$$r_1^2 + r_2^2 = k^2 AC^2 + k^2 BC^2 = k^2 AB^2 = (kAB)^2 = r^2.$$

Утверждение доказано.

Задача 3. Найти все пары натуральных чисел n и m , для которых

$$4^n = m^2 + 7.$$

Решение. Заметим, что

$$7 = 4^n - m^2 = (2^n)^2 - m^2 = (2^n - m)(2^n + m).$$

Отсюда следует, что $2^n - m = 1$ и $2^n + m = 7$. Это выполнено только для $n = 2$ и $m = 3$.

Задача 4. Пусть $x = \sin 18^\circ$. Доказать, что

$$4x^2 + 2x = 1.$$

Решение. Заметим, что $4 \cdot \alpha = 90^\circ - \alpha$ для $\alpha = 18^\circ$. Поэтому

$$\begin{aligned} x = \sin \alpha &= \cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - 8 \sin^2 \alpha + 8 \sin^4 \alpha = 1 - 8x^2 + 8x^4. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$0 = 8x^4 - 8x^2 - x + 1 = (4x^2 + 2x - 1)(2x^2 - x - 1).$$

Поскольку $0 < x < 1$, то

$$2x^2 - x - 1 < 2x - x - 1 = x - 1 < 0.$$

Значит, $4x^2 + 2x - 1 = 0$. А это и требовалось доказать.

Задача 5. Пусть x и y — любые вещественные числа из отрезка $[-1, 1]$. Доказать, что

$$|x + x^2 + x^3 - y - y^2 - y^3| \leq 4.$$

Решение. Заметим, что для $x \in [0, 1]$

$$x + x^2 + x^3 \leq 3,$$

а для $x \in [-1, 0]$

$$x + x^2 + x^3 \geq x \geq -1.$$

То есть, для $x, y \in [-1, 1]$ выполняется неравенства

$$-1 \leq x + x^2 + x^3 \leq 3, \quad -1 \leq y + y^2 + y^3 \leq 4.$$

Отсюда следует, что

$$|x + x^2 + x^3 - y - y^2 - y^3| \leq 3.$$

Утверждение доказано.