Дальневосточная студенческая математическая олимпиада
Хабаровск — 2009

Задача 1. Какое наибольшее число корней на отрезке $[-1, 1]$ при действительных a и b может иметь уравнение
$$ax + b + (1 - x^4)^{\frac{1}{4}} = 0?$$

Решение. График функции
$$y = (1 - x^4)^{\frac{1}{4}}$$
представляет собой выпуклую вверх кривую. Значит он пересекается с прямой $y = -ax - b$ не более чем в двух точках. При $a = b = 0$ получаем два решения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Задача 2. Пусть $x_1, \dots, x_k$ – некоторые действительные числа. Предположим, что для бесконечной возрастающей последовательности натуральных n выполняется равенство $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = 0$. Доказать, что $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$.

Решение. Если $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$, то утверждение очевидно. Поэтому мы можем считать, что для некоторого натурального l от 1 до k
$$|x_1| = \dots = |x_l| > |x_{l+1}| \geqslant \dots \geqslant |x_k|.$$
В таком случае для возрастающей последовательности нечетных натуральных чисел n_i
$$\frac{x_1}{|x_1|} + \dots + \frac{x_l}{|x_1|} = \lim_{i \to \infty} \left(\left(\frac{x_1}{|x_1|} \right)^{n_i} + \dots + \left(\frac{x_k}{|x_1|} \right)^{n_i} \right) = 0.$$
Поэтому при любом нечетном натуральном n
$$x_1 + \dots + x_l = x_1^n + \dots + x_l^n = 0.$$
Если $l < n$, то повторяя это рассуждение с оставшимися числами нужное количество раз, получим интересующее нас равенство.

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – интегрируемая по Риману функция, для которой абсолютно сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$. Доказать, что функция
$$g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x - y) e^{-y^2} dy$$
бесконечно дифференцируема при всех действительных x.

Решение. После замены переменной $x - y = z$ получим, что
$$g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-(x-z)^2} dz.$$
Подынтегральное выражение можно дифференцировать по x любое число раз. Поэтому $g(x)$ бесконечно дифференцируема.

Задача 4. Вычислить сумму
$$S_n = n - (n-1)\log_2 \frac{4}{3} - (n-2)\log_2 \frac{9}{8} - \dots - \log_2 \frac{n^2}{n^2 - 1} \quad (n \geq 1).$$

Решение. Найдем разность двух последовательных сумм:

$$S_n - S_{n-1} = 1 - \log_2 \frac{4}{3} - \log_2 \frac{9}{8} - \dots - \log_2 \frac{n^2}{n^2-1} =$$
$$= \log_2 \frac{2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \log_2(n+1) - \log_2 n.$$

Поэтому $S_n = \log_2(n+1)$.

Задача 5. Имеется 8 батареек, из которых 4 заряжены, а 4 – нет. За одну попытку можно вставить пару батареек в фонарь и посмотреть работает ли он (фонарь светит, если в нем две заряженных батарейки, и не светит в противном случае). Как за 6 попыток отыскать хотя бы одну пару заряженных батареек?

Решение. Занумеруем батарейки числами от 1 до 8. Если среди пар $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$ не найдется полностью заряженной, то в каждой из троек $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ будет по две разряженных батареек, и пара $\{7, 8\}$ будет заряженной.