Дальневосточная студенческая математическая олимпиада
Хабаровск — 2008

Задача 1. Пусть d – натуральное число. Составим из троек (a, b, c) с натуральными a, c и целым b, для которых $b^2 + ac = d$, множество $M_+(d)$ с $a+b-c > 0$ и множество $M_-(d)$ с $a+b-c < 0$. Доказать, что $M_+(d)$ и $M_-(d)$ содержат одинаковое количество элементов.

Решение. Между элементами $M_+(d)$ и $M_-(d)$ можно установить взаимно-однозначное соответствие по правилу

$$(a, -b, c) > (c, -b, a).$$

Задача 2. Таня и Петя играют на лекции по алгебре в следующую игру. Таня выписывает многочлен от одной переменной с неотрицательными целыми коэффициентами, не показывая его Пете. Петя может задавать Тане вопрос о том, какое значение у многочлена при заданном значении переменной. За какое минимальное число вопросов Петя может узнать все коэффициенты многочлена?

Решение. Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Сначала Петя узнает натуральное

$$N = f(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0.$$

Отсюда он заключает, что $a_i \leq N$ $(i = 0, \ldots, n)$. Далее, он узнает $M = f(N+1)$. Записывая M в системе счисления по основанию $(N+1)$, он определяет $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Таким образом, достаточно двух вопросов.

Задача 3. Напомним, что если $f : A \to \mathbb{R}$ – вещественнозначная ограниченная снизу функция на множестве A (любое непустое множество), то $\alpha = \inf\limits_{x\in A} f(x)$ – наибольшее вещественное число, для которого $f(x) \geqslant \alpha$ при всех x. Предположим, что $F(x, y)$ – вещественнозначная ограниченная снизу функция от двух переменных $x \in A$ и $y \in B$ (A и B – любые непустые множества). Доказать, что

$$\inf_{x\in A}\inf_{y\in B} F(x, y) = \inf_{y\in B}\inf_{x\in A} F(x, y).$$

Решение. Из определения inf вытекает неравенство

$$\inf_{x\in A}\inf_{y\in B} F(x, y) \geqslant F(x, y) \tag{1}$$

для всех $x \in A$, $y \in B$. С другой стороны, согласно определению inf, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $x_0 \in A$, такое что

$$F(x_0, y) \leqslant \inf_{x\in A} F(x, y) + \varepsilon_1 \qquad \forall y \in B.$$

Проводя для полученного неравенства аналогичные рассуждения для переменной y, получим, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ найдется $y_0 \in B$, такое что

$$F(x_0, y_0) \leqslant \inf_{y\in B}\inf_{x\in A} F(x, y) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Сравнивая это неравенство с (1) при $x = x_0$, $y = y_0$, заключаем, что

$$\inf_{x\in A}\inf_{y\in B} F(x, y) \leqslant \inf_{y\in B}\inf_{x\in A} F(x, y) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

откуда, в силу произвольности ε_1 и ε_2,

$$\inf_{x\in A}\inf_{y\in B}F(x,y)\leqslant\inf_{y\in B}\inf_{x\in A}F(x,y).$$

Аналогично получается неравенство

$$\inf_{y\in B}\inf_{x\in A}F(x,y)\leqslant\inf_{x\in A}\inf_{y\in B}F(x,y).$$

Из последних двух неравенств следует нужное утверждение.

Задача 4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

Решение. Утверждение немедленно следует из равенства касательных к вписанной окружности, проведенных из вершин к точкам касания сторон. При этом следует учесть, что гипотенуза – диаметр.

Задача 5. Пусть x, y, z – вещественные числа, для которых

$$x^{2008}+y^{2008}+z^{2008}<1.$$

Доказать, что

$$x^{4000}+y^{4000}+z^{4000}<1.$$

Решение. Каждое из чисел по абсолютной величине меньше, чем 1. Поэтому

$$x^{2008}+y^{2008}+z^{2008}\leqslant x^{4000}+y^{4000}+z^{4000}<1.$$