Дальневосточная межвузовская олимпиада по математике
Хабаровск — 17 ноября 2007

Задача 1. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = 1.$$

Решение. Так как

$$C_k = \log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \log_2 \left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k+1}{k+2}\right) = \log_2 \left(\frac{k+1}{k}\right) - \log_2 \left(\frac{k+2}{k+1}\right),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k = \log_2 \frac{2}{1} - \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{3}{2} - \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{4}{3} - \log_2 \frac{5}{4} + \cdots = \log_2 2 = 1.$$

Задача 2. Для какого числа $t \in [-1, 2]$ область ограничения прямыми $x = -1$, $x = 2$, параболой $y = x^2$ и касательной к этой параболе в точке (t, t^2) имеет наименьшую площадь?

Решение. Касательная, проведенная в точке (t, t^2) задается уравнением

$$y = 2tx - t^2.$$

Она пресекает прямые $x = -1$ и $x = 2$ в точках $(-1, y_1)$, $(2, y_2)$, где $y_1 = -2t - t^2 \in [-8, 1]$, $y_2 = 4t - t^2 \in [-5, 4]$. Чем меньше площадь данной фигуры, тем больше площадь трапеции с вершинами в точках $(-1, -8)$, $(-1, y_1)$, $(2, y_2)$, $(2, -8)$. Таким образом, нужно найти, для какого значения t достигает максимума функция

$$S(t) = \frac{3}{2}(y_1 + y_2 + 8) = 3(8 + t - t^2).$$

Ответ: при $t = \dfrac{1}{2}$.

Задача 3. Доказать, что функции

$$y = x, \quad y = \ln x, \quad y = \sin x, \quad y = e^{-x}$$

с $x \in (0, \infty)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$.

Решение. Предположим, что найдутся вещественные α, β, γ, δ, для которых

$$\alpha x + \beta \ln x + \gamma \sin x + \delta e^{-x} = 0 \quad \forall x \in (0, \infty).$$

При $x \to \infty$ функция $y = x$ растет быстрее всех остальных и поэтому $\alpha = 0$. По той же причине $\beta = 0$. Сравнивая поведение $\sin x$ и e^{-x} при $x \to 0$, по тем же соображениям получаем, что $\gamma = \delta = 0$. А это означает линейную независимость рассматриваемых функций.

Задача 4. Пусть определитель матрицы A размера 2×2 равен 1. Составим новую матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$$

размера 4×4 (элементы A умножаются на 2 и 5). Доказать, что определитель B равен 1.

Решение. По методу Гаусса (умножив первые две строки на 2 и вычтя их из последних) получаем

$$\det B = \det \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A \cdot \det A = 1.$$

Задача 5. а) Пусть A — множество, состоящее из N пар натуральных чисел (n, m) с n и m, не превосходящими натурального q. Предположим, что в A не существует двух пар (n_1, m_1) и (n_2, m_2), у которых $n_1 < n_2$ и $m_1 < m_2$. Доказать что

$$N \leqslant 2q - 1.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение в для троек чисел.

Решение.

а) Каждая прямая $m - n = b$ $(-q + 1 \leqslant b \leqslant q - 1)$ содержит не более одной пары (m, n) из множества A.

б) Аналогичное утверждение может быть сформулировано следующим образом. *Пусть множество A состоит из троек целых чисел (m, n, k), где $1 \leqslant m, n, k \leqslant q$ и для любых двух троек (m_1, n_1, k_1), $(m_2, n_2, k_2) \in A$ не могут одновременно выполняться неравенства*

$$m_1 < m_2, \quad n_1 < n_2, \quad k_1 < k_2.$$

Тогда A содержит не более $3q^2 - 3q + 1$ элементов.

Доказательство. На каждой прямой $m - m_0 = n - n_0 = k - k_0$, $(1 \leqslant m_0, n_0, k_0 \leqslant q)$ лежит не более одной точки множества A. Поэтому в A не более $q^3 - (q-1)^3 = 3q^3 - 3q + 1$ троек. (Каждой прямой, пересекающей куб $[1, q]^3$, можно поставить в соответствие ровно одну точку куба, у которой одна из координат равна 1. Все такие точки получаются, если из куба $[1, q]^3$ удалить куб $[2, q]^3$.)