

Задача 1. Пусть $f : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая непрерывная функция на отрезке $[0, N]$ с натуральным N . Доказать, что

$$f(0) + f(1) + \dots + f(N-1) < \int_0^N f(x) dx.$$

Решение. Для любого целого n от 0 до $N-1$

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n) dx < \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) < \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_0^N f(x) dx.$$

Задача 2. На окружности расположены n вещественных чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних ($n \geq 3$). Доказать, что все числа равны друг другу.

Решение. Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно полусумме не превосходящих его соседей. Это может быть только в случае равенства всех трех. Последовательно повторяя это рассуждение для соседей, получим нужное утверждение.

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой при любых x и y

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Доказать, что $f(x) = \alpha x$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть $f(1) = \alpha$.

Из аддитивности f следует, что для любого натурального n

$$nf\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f(1) = \alpha.$$

Поэтому $f\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{n}$. Снова пользуясь аддитивностью, находим, что для всех натуральных m и n

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha \cdot \frac{m}{n}.$$

Кроме того:

$$\begin{aligned} 2f(0) &= f(0+0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0; \\ 0 &= f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(-\frac{m}{n}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{m}{n}\right) = \alpha \left(-\frac{m}{n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(r) = \alpha r$ при всех рациональных r . Для любого вещественного x найдется последовательность рациональных r_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Принимая во внимание непрерывность f , получим

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha r_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha x.$$

Задача 4. Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ построить многочлен $P(x, y)$ от двух переменных x и y со следующим свойством: при $k = 1, 2, \dots, n$ многочлен $P(x, k)$ от переменной x имеет в точности k корней.

Решение. Положим

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^k (x - j) \right) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (y - i) \right) = \\ &= (x - 1)(y - 2)(y - 3) \dots (y - n) + \\ &+ (x - 1)(x - 2)(y - 1)(y - 3)(y - 4) \dots (y - n) + \\ &+ \dots + (x - 1) \dots (x - n)(y - 1)(y - 2) \dots (y - (n - 1)). \end{aligned}$$

При этом

$$P(x, k) = (-1)^{n-k} (k - 1)! (n - k)! (x - 1)(x - 2) \dots (x - k)$$

имеет в точности k корней $x = 1, 2, \dots, k$.

Задача 5. Найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, у которых ее восьмая и тринадцатая производные совпадают с ней самой (т.е. с f).

Решение. Из условия $f^{(13)} = f$ следует цепочка равенства

$$f^{(65)} = f^{(52)} = f^{(39)} = \dots = f^{(13)} = f.$$

Аналогично, ввиду условия $f^{(8)} = f$,

$$f^{(65)} = f^{(57)} = f^{(49)} = \dots = f^{(9)} = f^{(1)}.$$

Поэтому $f' = f$. Следовательно,

$$(e^{-x} f(x))' = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) = 0.$$

Значит, $e^{-x} f(x) = c$ для некоторой константы c . Окончательно находим, что

$$f(x) = ce^x.$$