Городская олимпиада по математике
г. Хабаровск, 1997 год

9 КЛАСС

Задача 1. Найти решения уравнения

$$(x+2)^4 + x^4 = 82. \tag{1}$$

Решение. После замены переменной $x = y - 1$ уравнение (1) можно записать в виде

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 82.$$

Далее, раскрывая скобки по формуле $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, получаем равносильные уравнения

$$(y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1) + (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) = 82,$$

$$y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 82.$$

После приведения подобных получаем биквадратное уравнение

$$2y^4 + 12y^2 + 80 = 0,$$

которое можно сделать приведенным биквадратным уравнением, разделив обе части уравнения на 2

$$y^4 + 6y^2 + 40 = 0. \tag{2}$$

Полученное уравнение с помощью замены $y^2 = t$ можно свести к приведенному квадратному уравнению

$$t^2 + 6t - 40 = 0,$$

корнями которого являются $t_1 = -10$ и $t_2 = 4$.

Так как по условию замены $t = y^2 \geq 0$, то $t_1 = -10$ не является решением биквадратного уравнения (2). Следовательно, $y^2 = 4$. Решая это простейшее неполное квадратное уравнение, находим $y_{1,2} = \pm 2$, которые являются решением уравнения (2).

Для получения решений уравнения (1) остается сделать обратную замену переменной, вернувшись к переменной x по формуле $x = y - 1$. Итак, решением уравнения (1) являются $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$.

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Задача 2. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Доказать, что

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca). \tag{1}$$

Решение. Из неравенств треугольника получаем следующие соотношения для сторон a, b, c треугольника

$$\begin{aligned} |a-b| &< c, \\ |b-c| &< a, \\ |c-a| &< b. \end{aligned} \tag{2}$$

Левая и правая части каждого из неравенств (2) неотрицательны, поэтому правомочно возвести обе части каждого из этих неравенств в квадрат. После возведения в квадрат получаем неравенства

$$\begin{aligned} &a^2 - 2ab + b^2 < c^2, \\ &b^2 - 2bc + c^2 < a^2, \\ &c^2 - 2ca + a^2 < b^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Сложив неравенства (3), получим

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) < a^2 + b^2 + c^2.$$

Очевидно, что после приведения подобных членов в последнем неравенстве получим неравенство (1), которое и требовалось доказать.

Задача 3. Можно ли разрезать выпуклый семнадцатиугольник на 14 треугольников?

Решение. Нет, нельзя. Действительно, сумма углов семнадцатиугольника равна $S_{17} = (n-2) \cdot 180^\circ = (17-2) \cdot 180^\circ = 15 \cdot 180^\circ$. Эта величина при разрезании не может уменьшиться, разве только увеличится. Однако, сумма углов всех 14 треугольников равна $S = 14 \cdot S_3 = 14 \cdot 180^\circ$. Из того, что $S < S_{17}$, следует невозможность разрезания, требуемого в условии задачи.

Ответ: Нет, нельзя.

Задача 4. Доказать, что если $a^2 + b^2 \,\vdots\, 13$ и $a^8 + b^8 \,\vdots\, 13$, то $a \,\vdots\, 13$ и $b \,\vdots\, 13$.

Решение. Рассмотрим разность $a^8 - b^8$. Применяя дважды формулу разности квадратов, получаем

$$a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4) = (a^4 + b^4)(a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Из делимости $a^2 + b^2$ на 13 следует делимость на 13 разности $a^8 - b^8$.

Далее, так как $a^8 + b^8 \,\vdots\, 13$ и $a^8 - b^8 \,\vdots\, 13$, то их сумма $(a^8 + b^8) + (a^8 - b^8) = 2a^8 \,\vdots\, 13$. Отсюда следует, что $a \,\vdots\, 13$.

Действительно, предположим противное. Пусть $a = 13k + m$, где $|m| \leq 6$, $m \neq 0$ то есть a может иметь при делениии на 13 следующие остатки

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6.$$

Возведем a в квадрат.

$$a^2 = (13k + m)^2 = 169k^2 + 26km + m^2 = 13(13k^2 + 2km) + m^2.$$

Из последнего равенства следует, что a^2 при делении на 13 имеет следующие остатки $1,\ 4,\ -4,\ 3,\ -1,\ -3$ или $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 4$. Аналогично получаем, что a^4 при делении на 13 имеет следующие остатки $1,\ 3,\ -4$. Тогда $2a^8$ при делении на 13 имеет остатки $2,\ 6,\ 5$.

То есть, предполагая, что a не делится на 13, получили, что $2a^8$ не делится на 13. Следовательно, доказано, что из делимости $2a^8$ на 13 следует делимость a на 13.

Аналогично, рассмотрев разность $(a^8 + b^8) - (a^8 - b^8) = 2b^8$, доказывается, что $b \,\vdots\, 13$.

10 КЛАСС

Задача 1. Определить знак c, если $a+b+c<0$ и уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней.

Решение. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней тогда и только тогда, когда дискриминант $D=b^2-4ac$ отрицателен. Поэтому, во-первых, $c\neq 0$ (так как иначе $D=b^2\geq 0$), и, во-вторых, параметры a и c одного знака (иначе $D=b^2+4|ac|\geq 0$).

Предположим, что $c>0$, а следовательно, и $a>0$. Тогда из неравенства в условии задачи получаем, что $b<-(a+c)$, то есть b — отрицательно. Следовательно, обе части неравенства

$$-b>(a+c),$$

полученного из предыдущего умножением на -1, положительны. Возведя их в квадрат, получаем неравенство

$$b^2>a^2+2ac+c^2.$$

Воспользовавшись известным неравенством $p+q\geq 2\sqrt{pa}$, получаем

$$b^2>(a^2+c^2)+2ac\geq 2\sqrt{a^2c^2}+2ac=2|ac|+2ac=4ac.$$

Итак, $b^2>4ac$, поэтому дискриминант $D>0$. Полученное противоречие показывает неверность предположения, что $c>0$.

Ответ: $c<0$. Очевидно, что когда $c<0$, условия задачи могут выполняться, например, при $c=-1$ для уравнения $-x^2-x-1=0$.

Задача 2. Найти все тройки последовательных простых чисел, таких, что сумма их квадратов является также простым числом.

Решение. Пусть $3<p_1<p_2<p_3$, где p_1,p_2,p_3 — последовательные простые числа. Любое простое p, отличное от 3, можно представить в виде

$$p=3k+r,$$

где $r=1$ или 2. Далее $(3k+1)^2=3k(3k+2)+1$, $(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$. Следовательно, p^2 при делении на 3 дает в остатке 1. Значит, $p_1^2+p_2^2+p_3^2$ при делении на 3 дает в остатке 0 (поскольку $1+1+1=3$) и не является простым. Следовательно, наше предположение, что все числа p_1,p_2,p_3 больше 3 — неверно. Остается рассмотреть только два возможных случая

$$\text{I.}\quad p_1=2,\ \ p_2=3,\ \ p_3=5 \implies p_1^2+p_2^2+p_3^2=36;$$
$$\text{II.}\quad p_1=3,\ \ p_2=5,\ \ p_3=7 \implies p_1^2+p_2^2+p_3^2=83.$$

Из чисел 36 и 83 только 83 является простым числом.

Итак, существует только одна тройка простых чисел ($p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$), удовлетворяющая условиям задачи.

Ответ: $3,5,7$.

Задача 3. На каждой из сторон треугольника отложено по одному отрезку AB, CD и EF. Найдите все точки Q, лежащие внутри треугольника, такие, что площади треугольников ABQ, CDQ и EFQ равны.

Решение. *I. Анализ.*

Обозначим через h_1,h_2,h_3 высоты треугольников ΔABQ, ΔCDQ, ΔEFQ, опущенные соответственно на стороны AB,CD,EF (рис. 1). Из условия $S_{ABQ}=S_{CDQ}=S_{EFQ}$ выполняются равенства

$$\frac{1}{2}h_1\cdot AB=\frac{1}{2}h_2\cdot CD=\frac{1}{2}h_3\cdot EF.$$

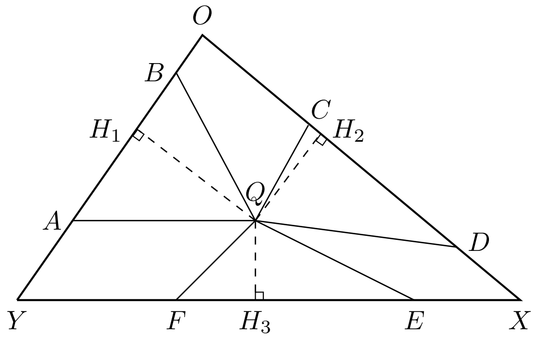

Рис. 1

Из этих равенств получаем следующие отношения высот

$$h_1 : h_2 = CD : AB = k_1,$$
$$h_2 : h_3 = EF : CD = k_2,$$
$$h_3 : h_1 = AB : EF = k_3.$$

Геометрическим местом точек, расстояние от которых до сторон угла находится в заданном отношении $k_1 = h_1 : h_2$, является луч, выходящий из вершины угла. Докажем это. Рассмотрим угол $\angle H_1OH_2$ и точку Q внутри этого угла, расстояние от которой до сторон угла равно h_1 и h_2 соответственно. Пусть P — произвольная точка луча OQ, а PK, PL — соответственно расстояния до сторон OH_1, OH_2 угла $\angle H_1OH_2$ (рис. 2). Треугольники ΔOPL и ΔOQH_2, ΔOPK и ΔOQH_1 подобны по двум углам ($\angle H_1 = \angle K = \angle L = \angle H_2 = 90°$, $\angle KOP = \angle H_1OQ$, $\angle POL = \angle QOH_2$).

Следовательно, выполняются отношения сторон

$$\frac{PL}{QH_2} = \frac{OP}{OQ} \quad \text{и} \quad \frac{PK}{QH_1} = \frac{OP}{OQ}.$$

Их них получаем, что

$$\frac{PL}{QH_2} = \frac{PK}{QH_1},$$

то есть $PK : PL = QH_1 : QH_2 = h_1 : h_2 = k_1$. Итак, доказано, что для произвольной точки P луча OQ отношение расстояний до сторон угла не меняется и равно k_1.

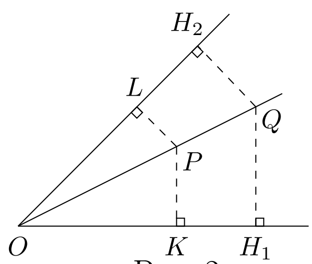

Рис. 2

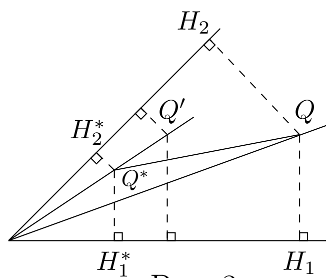

Рис. 3

Докажем, что кроме точек луча OQ расстояния ни от каких других внутренних точек угла $\angle H_1OH_2$ до сторон OH_1, OH_2 этого угла не относятся как $h_1 : h_2 = k_1$ соответственно. Действительно, предположим противное. Пусть помимо Q существует еще одна внутренняя точка Q' угла $\angle H_1OH_2$, что соотношение расстояний от этой точки до сторон OH_1, OH_2 соответственно равно k_1 (рис. 3). Тогда все точки луча OQ' также удовлетворяют этому условию. Поэтому всегда найдется точка Q^*, такая, что расстояние $Q^*H_1^*$, $Q^*H_2^*$ от нее до сторон OH_1, OH_2 угла $\angle H_1OH_2$ в точности совпадает с h_1, h_2 соответственно. Тогда стороны QH_1 и $Q^*H_1^*$, QH_2 и $Q^*H_2^*$ четырехугольников $QH_1H_1^*Q^*$ и $QH_2H_2^*Q^*$ соответственно равны и параллельны, следовательно, эти четырехугольники являются прямоугольниками. Полученное противоречие доказывает, что $Q^* = Q$.

Таким образом, для решения задачи необходимо построить точку пересечения лучей, выходящих из углов треугольника, на которых расположены точки в отношении $h_1 : h_3$ и $h_2 : h_3$. Третий луч (на котором расположены точки, удаленные от сторон угла на расстояния, относящиеся как $k_1 = h_1 : h_2$) с необходимостью пройдет через точку пересечения первых двух лучей.

II. Построение.

1. Проведем прямые параллельно сторонам угла $\angle 1$ на расстоянии равном $|EF|$ и $|AB|$ от них (рис. 4).

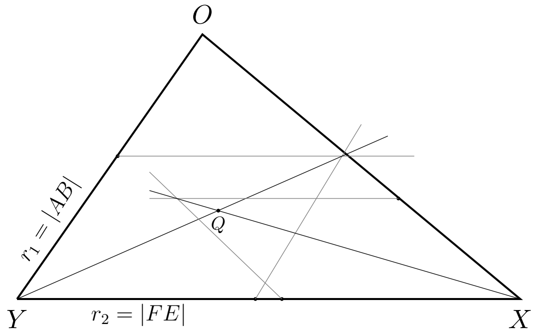

Рис. 4

2. Из вершины угла проведем луч через точку пересечения этих прямых. Из построения видно, что все точки этого луча удалены от сторон угла $\angle 1$ на расстояния, относящиеся как $h_1 : h_3$.

3. Аналогично проведем луч из вершины угла $\angle 3$.

4. Точка Q, являющаяся точкой пересечения построенных лучей, — искомая.

Задача 4. Доказать, что существуют положительные иррациональные x и y, для которых x^y — число рациональное.

Доказательство. *I способ.* Известно, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Рассмотрим число $\alpha = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Если α — рациональное число, то все доказано. Пусть α — иррациональное. Тогда рассмотрим

$$\alpha^{\sqrt{2}} = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Что и требовалось доказать.

II способ Рассмотрим число $b = \log_2 3$. Докажем, что b — иррациональное число. Предположим противное. Пусть $b = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $2^b = 3$, то есть $2^{\frac{p}{q}} = 3$. Отсюда получаем $2^p = 3^q$, то есть $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{p \text{ раз}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{q \text{ раз}}$. Последнее равенство невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $b = \log_2 3$ — иррациональное число. Тогда $2b$ — тоже иррациональное число. Поэтому числа $\sqrt{2}$ и $2b$ — искомые. Действительно,

$$(\sqrt{2})^{2b} = 2^b = 2^{\log_2 3} = 3.$$

11 КЛАСС

Задача 1. Доказать, что для любого действительного x

$$x^4 + x^2 + 4 \geq 3x^3. \tag{1}$$

Решение. Легко видеть, что при $x = 2$ многочлен $p(x) = x^4 - 3x^3 + +x^2 + 4$ равен нулю. Поэтому

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (x^3 - 4x^2 + 4x) + (x^2 - 4x + 4) =$$
$$= x^2(x^2 - 4x + 4) + x(x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4x + 4) =$$
$$= (x^2 - 4x + 4)(x^2 + x + 1) = (x - 2)^2(x^2 + x + 1).$$

Дискриминант трехчлена $x^2 + x + 1$ меньше нуля, поэтому для всех действительных значений переменной x выполняется неравенство $x^2 + x + 1 > 0$. Так как квадрат любого действительного числа неотрицателен, то $(x - 2)^2 \geq 0$. После перемножения этих неравенств получаем, что $p(x) \geq 0$, то есть выполняется для любого действительного x неравенство (1).

Задача 2. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + ax, \\ x = y^2 + by, \end{cases} \tag{1}$$

где a и b — действительные параметры, имеет единственное решение $x = y = 0$ тогда и только тогда, когда параметры положительны и $ab = 1$.

Решение. Подставив $x^2 + ax$ вместо y во второе уравнение системы (1), получим уравнение с одной неизвестной следующего вида

$$x = (x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax).$$

В правой части уравнения вынесем общий множитель

$$x = x(x(x + a)^2 + b(x + a)).$$

Последнее уравнение равносильно двум уравнениям

$$x = 0 \quad \text{и} \quad 1 = x(x + a)^2 + b(x + a).$$

Отметим, что второе уравнение является кубическим, а следовательно всегда имеет хотя бы один корень.

Найдем, при каких условиях оно имеет решением только $x = 0$. Подставив для этого $x = 0$ в уравнение, получим условие $ab = 1$. Найдем, при каких условиях $x = 0$ является единственным решением второго уравнения. Подставив во второе уравнение $ab = 1$, получим уравнение $x(x + a)^2 + bx = 0$, которое равносильно двум уравнениям

$$x = 0 \quad \text{и} \quad (x + a)^2 + b = 0.$$

Последнее уравнение не будет иметь действительных решений при $b > 0$. Аналогично получаем условие $a > 0$.

Задача 3. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — длины последовательных сторон описанного около окружности пятиугольника. Доказать, что

$$a_1 + a_2 + a_4 \geq a_3 + a_5.$$

Решение. Пусть $ABCDE$ — описанный около окружности пятиугольник (рис. 5), длины сторон которого равны $AB = a_1$, $BC = a_2$, $CD = a_3$, $DE = a_4$, $EA = a_5$. Рассмотрим точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — точки касания окружностью сторон пятиугольника AB, BC, CD, DE, EA соответственно.

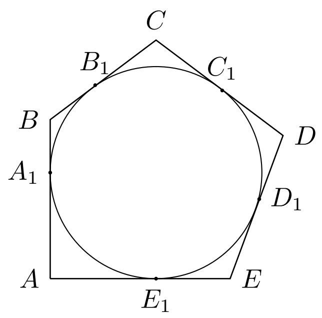

Рис. 5

По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки, отрезки касательных до точки касания равны, то есть $AA_1 = AE_1$, $BB_1 = BA_1$, $CC_1 = CB_1$, $DD_1 = DC_1$, $EE_1 = ED_1$.

Поэтому верны следующие преобразования

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 + a_4 = AB + BC + DE = \\ = (AA_1 + A_1B) + (BB_1 + B_1C) + (DD_1 + D_1E) = \\ = AE_1 + A_1B + BB_1 + CC_1 + DC_1 + EE_1 = \\ = (AE + EE_1) + (CC_1 + DC_1) + 2BB_1 = \\ = AE + CD + 2BB_1 = a_3 + a_5 + 2BB_1 \geq a_3 + a_5. \end{gathered}$$

Задача 4. Доказать, что существует бескрнечно много четверок натуральных попарно различных чисел a, b, c, d, для которых

$$[a^{3/2}] + [b^{3/2}] = [c^{3/2}] + [d^{3/2}],$$

где $[x]$ — наименьшее целое число, не превосходящее x.

Решение. Пусть $1 \leq a,\ b \leq N$. Тогда выполняется неравенство $[a^{3/2}] + [b^{3/2}] \leq 2N^{3/2}$.

Общее количество сумм $[a^{3/2}]+[b^{3/2}]$ равно N^2, из них N сумм с $a = b$. Поэтому имеется ровно $\frac{N(N-1)}{2}$ сумм с a, b. Отношение

$$\frac{N(N-1)}{2N^{3/2}} = \frac{1}{2}(N^{1/2} - N^{-1/2})$$

при $N \to \infty$ стремится к бесконечности. Поэтому по принципу Дирихле имеется бесконечно много совпадающих сумм $[a^{3/2}] + [b^{3/2}]$ с различными a и b.