АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Дальневосточный научный центр
Хабаровский комплексный НИИ

[illegible]

ПРЕПРИНТ

КУЗНЕЦОВ Н.В.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФОРМА ФОРМУЛЫ СЛЕДА СЕЛЬБЕРГА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМ ПРИМИТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КЛАССОВ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

[illegible]

Николаю Алексеевичу Шило,
Президенту ДВНЦ АН СССР
от автора – в знак глубокого уважения.
[signature]

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
Хабаровский комплексный НИИ

Препринт

Н.В.Кузнецов

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФОРМА ФОРМУЛЫ СЛЕДА СЕЛЬБЕРГА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМ ПРИМИТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КЛАССОВ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

Хабаровск
1978

Для модулярной группы дается новое выражение для вклада гиперболических элементов в формулу следа Сельберга. Это приводит к явным формулам для числа примитивных гиперболических классов с данной нормой и к квазириманову асимптотическому закону распределения норм примитивных гиперболических классов.

§ I. Введение.

Обозначим через G модулярную группу дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости H комплексного переменного z,

$$z \to gz = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (I.I)$$

где a, b, c, d – целые рациональные, $ad - bc = 1$.

Классы (сопряженных в G) элементов можно естественно классифицировать по следу матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, соответствующей преобразованию g. Отличный от единичного класс называется эллиптическим, если $|a+d| < 2$, параболическим при $|a+d| = 2$ и гиперболическим в случае $|a+d| > 2$. В последнем случае g в $SL(2, \mathbb{R})$ сопряжено преобразованию $z \to \rho z$, где $\rho > 1$; число ρ, т.е. квадрат собственного значения, условимся называть нормой соответствующего гиперболического класса.

Гиперболический элемент g из G называется примитивным, если он не является степенью никакого другого элемента группы G. Класс, представителем которого является примитивный элемент, также назовем примитивным.

До сих пор оставались открытыми два естественных вопроса – каково число примитивных гиперболических классов с данной нормой и каков асимптотический закон распределения норм примитивных классов.

Для распределения норм примитивных классов здесь доказана следующая

Теорема 1. Пусть $\pi_G(x)$ обозначает число примитивных гиперболических классов модулярной группы, норма которых не превосходит x. Тогда при $x \to +\infty$

$$\pi_G(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O\left(\frac{x^{3/4}}{\sqrt{\ln x}}\right). \qquad (I.2)$$

Ранее была известна лишь грубая оценка

$$\frac{x}{(\ln x)^3} \ll \pi_G(x) \ll x \qquad (I.3)$$

Формула, полученная А.Н.Андриановым и О.М.Фоменко [4]. Формула, аналогичная (I.2), для групп с компактной фундаментальной областью, получена H.Huber'ом [16] и D.Hejhal'ом [5] с тем же остаточным членом $O(x^{3/4}(\ln x)^{-1/2})$.

Число примитивных классов с данной нормой дает

Теорема 2. Пусть $A_n(c)$ обозначает число решений сравнения $x^2 + nx + 1 \equiv 0 \pmod{c}$ и для простого p и переменного s с условием $\mathrm{Re}\, s > 1/2$

$$v_p(s;n) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_n(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}. \qquad (I.4)$$

Положим для $n \geq 3$

$$B(n) = \Big\{\sum_{\substack{m \geq 1, \\ m \equiv 1 \pmod 2}} \frac{1}{m}\Big(\frac{n^2-4}{m}\Big)\Big\}\, v_2(1;n) \prod_{\substack{p \mid n^2-4 \\ p>2}} \Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1} v_p(1;n) \qquad (I.5)$$

где $(\frac{\cdot}{\cdot})$ – квадратичный символ Лежандра. Тогда для числа примитивных гиперболических классов $\nu_G(N)$ с

данным следом $N \geq 3$ имеем

$$\nu_G(N) = \frac{1}{\ln \varepsilon_N} \sum_{\substack{n \geq 3,\, m \geq 1 \\ \varepsilon_n^m = \varepsilon_N}} \sqrt{n^2-4}\, B(n)\, \mu(m) \qquad (I.6)$$

где $\mu(\cdot)$ – функция Мебиуса, $\varepsilon_n = \frac{1}{2}(n+\sqrt{n^2-4})$ и суммирование ведется по всем целым $n \geq 3$, $m \geq 1$, для которых $(\varepsilon_n)^m = \varepsilon_N$.

Из теоремы Зигеля ([6], § 21) об оценке снизу для значения $L(1,\chi)$ с вещественным примитивным характером и явной формулы (I.6) вытекает

Следствие. Пусть $N^2-4 = P^2 Q$, где Q бесквадратно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $C(\varepsilon)$, такая, что при $Q \geq Q_0(\varepsilon)$ для числа $\nu_G(N)$ примитивных гиперболических классов с данной нормой ε_N^2 справедливо неравенство

$$\nu_G(N) \geq C(\varepsilon)\, Q^{-\varepsilon} \frac{N}{\ln N} \qquad (I.7)$$

Сформулированные теоремы я здесь доказываю с помощью новой формулы следа, в которой, в отличие от формулы следа Сельберга, вместо суммы по гиперболическим элементам модулярной группы стоит ряд с величинами $B(n)$, определенными равенством (I.5). Указанное отличие обусловлено другим способом вычисления следа – вместо сравнения спектрального и матричного следов приравниваются спектральный след и (регуляризованная) сумма диагональных коэффициентов Фурье соответствующего ядра. В случае модулярной группы в результате получается

Теорема 3 (формула следа). Пусть четная функция $h(r)$ комплексного переменного r регулярна в полосе $|\operatorname{Im} r| < \Delta$ для некоторого $\Delta > 3/4$ и при $|r| \to \infty$ в этой полосе $h(r) = O(|r|^{-2-\delta})$ для некоторого $\delta > 0$. Обозначим через λ_j, $\lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ собственные значения дискретного спектра оператора Лапласа-Бельтрами на фундаментальной области модулярной группы. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} h\left(\sqrt{\lambda_j - 1/4}\right) = \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} r\, \operatorname{th}(\pi r)\, h(r)\, dr +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2ir)\right) h(r)\, dr +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{ch}\frac{\pi r}{3}\right)\frac{h(r)}{\operatorname{ch}(\pi r)}\, dr + \frac{1}{2}h(0) +$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty} B(n)\, g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right), \tag{I.8}$$

где $B(n)$ определены (I.5) и

$$g(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-irv}\, h(r)\, dr \tag{I.9}$$

Формулу следа (I.8) естественно сравнить с формулой следа Сельберга, которая для случая модулярной группы имеет вид ([I],[2])

$$\sum_{j=0}^{\infty} h\left(\sqrt{\lambda_j - 1/4}\right) = \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} r\, \operatorname{th}(\pi r)\, h(r)\, dr +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2ir)\right) h(r)\, dr +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{ch}\frac{\pi r}{3}\right)\frac{h(r)}{\operatorname{ch}(\pi r)}\, dr + \frac{1}{2}h(0) +$$

$$+ \sum_{P}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln N(P)}{(N(P))^{n/2} - (N(P))^{-n/2}}\, g(n \ln N(P)) \tag{I.10}$$

где $N(P)$ обозначает норму гиперболического класса и суммирование ведется по всем примитивным гиперболическим классам модулярной группы.

С обозначением $\pi_G(x)$, введенным в теореме I, последнюю сумму в (I.10) можно записать в виде

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,\ln x}{x-1}\, g(\ln x)\, d\Lambda_G(x), \quad \Lambda_G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\pi_G(x^{1/n}). \tag{I.11}$$

Теперь сравнение (I.8) и (I.10) позволяет исключить дискретный спектр и получить тождество

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,\ln x}{x-1}\, g(\ln x)\, d\Lambda_G(x) = 2\sum_{n=3}^{\infty} B(n)\, g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right). \tag{I.12}$$

Замечательно, что в обеих частях (I.12) присутствует лишь функция g. Поэтому почти очевидно, что после надлежащего предельного перехода отсюда получится точное выражение для $\Lambda_G(x)$ через конечную сумму величин $B(n)$. После этого сравнение скачков приводит к (I.6), а вычисление среднего значения $B(n)$ – к асимптотическому закону (I.2)

§ 2. Формула суммирования для сумм Клоостермана.

Пусть $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ – значения параметра λ, для которых существует G-инвариантное решение уравнения

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = \lambda u \tag{2.I}$$

с интегрируемым квадратом модуля в фундаментальной области $\mathcal{D}$ модулярной группы. Соответствующие собственные функции дискретного спектра обозначим $u_j(z)$; будем считать, что u_j вещественны, нормированы условием $(u_j, u_j) = \int_{\mathcal{D}} |u_j|^2 \, dz = 1$ и каждая из функций является собственной функцией всех операторов Гекке T_n, $n \geq 1$,

$$(T_n f)(z) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b \,(\mathrm{mod}\, d)} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \qquad (2.2)$$

Определим для каждого $j \geq 1$ числа $\rho_j(n)$ равенством

$$u_j(z) = \sum_{n \neq 0} \rho_j(n) e^{2\pi i n x} \sqrt{y}\, K_{i\varkappa_j}(2\pi |n| y), \quad \varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - \tfrac{1}{4}}. \qquad (2.3)$$

Здесь $\lambda_j \geq \lambda_1 > \frac{1}{4}$ ([3], с.78-81;[8]) и можно считать $\varkappa_j > 0$.

Отправной точкой получения (I.8) является следующее тождество, связывающее коэффициенты Фурье собственных функций дискретного спектра с суммами Клоостермана $S(n, m; c)$,

$$S(n, m; c) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq |c|, \\ (d,c)=1, \; ad \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, c)}} e^{2\pi i \left(\frac{na}{c} + \frac{md}{c}\right)}. \qquad (2.4)$$

Теорема 4. Пусть четная функция $h(r)$ комплексного переменного r регулярна в полосе $|\mathrm{Im}\, r| \leq \Delta$, где $\Delta > \frac{1}{2}$ и для некоторого $\delta > 0$ при $|r| \to \infty$, $|\mathrm{Im}\, r| \leq \Delta$, $h(r) = O(|r|^{-2-\delta})$. Тогда для любых целых $n, m \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(n)\overline{\rho_j(m)}}{ch(\pi \varkappa_j)} h(\varkappa_j) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^{ir} \sigma_{2ir}(n) \sigma_{-2ir}(m) \frac{h(r)}{|\zeta^2(1+2ir)|} dr =$$

$$= \frac{\delta_{n,m}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} r\, th(\pi r)\, h(r)\, dr + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} S(n, m; c)\, \varphi\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right), \qquad (2.5)$$

где $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a$, $\zeta(\cdot)$ — дзета-функция Римана, $\delta_{n,m}$ символ Кронекера и, с обычным обозначением для функции Бесселя, для $x > 0$

$$\varphi(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_{2ir}(x) \frac{r}{ch(\pi r)} h(r)\, dr. \qquad (2.6)$$

В другой форме (и в других условиях) тождество (2.5) получено в [3] (теорема 2 из § 4), где показано, что если $\varphi(x)$ для $x \geq 0$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \sum_{k=0}^{3} \left|\frac{d^k \varphi}{dx^k}\right| = O(x^{-2-\delta}), \; x \to \infty, \qquad (2.7)$$

для некоторого $\delta > 0$, то

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} S(n, m; c)\, \varphi_H\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) + \frac{\delta_{n,m}}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(u) J_0(u)\, du =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j(n)\overline{\rho_j(m)} \frac{\hat{\varphi}(\varkappa_j)}{ch(\pi\varkappa_j)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^{ir} \sigma_{2ir}(n) \sigma_{-2ir}(m) \frac{\hat{\varphi}(r)\, dr}{|\zeta(1+2ir)|^2} \qquad (2.8)$$

где для данной φ

$$\varphi_H(x) = \varphi(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (4n+2) J_{2n+1}(x) \int_0^{\infty} J_{2n+1}(y) \varphi(y) \frac{dy}{y}, \qquad (2.9)$$

$$\hat{\varphi}(r) = \frac{i\pi}{2\, sh(\pi r)} \int_0^{\infty} \left(J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x)\right) \varphi(x) \frac{dx}{x}. \qquad (2.10)$$

В силу теоремы о разложении по функциям Бесселя переменного порядка ([3], теорема 5 § 2 с $\alpha = 0$) функция $\varphi_H(x)$ определяется по $\hat{\varphi}(z)$ посредством интегрального преобразования

$$\varphi_H(x) = \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \left(J_{2iz}(x) - J_{-2iz}(x) \right) \hat{\varphi}(z) \frac{z}{ch(\pi z)} dz \qquad (2.11)$$

совпадающего с (2.6). Кроме того, с помощью разрывного интеграла Вебера-Шафкейтлина ([10], с.61-63) легко проверить равенства

$$\int_0^\infty \varphi(x) J_0(x) dx = 2 \int_0^\infty \varphi_H(x) J_0(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} z\, th(\pi z)\, h(z) dz \qquad (2.12)$$

Таким образом, равенства (2.5) и (2.8) формально совпадают. Однако, технически проще получить (2.5) прямым путем, нежели попытками ослабить условия (2.7).

Рассмотрим тождество ([3], с.41)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{n,m}(z)\, dz}{ch(\pi t + \pi z)\, ch(\pi t - \pi z)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(n)\, \overline{\rho_j(m)}}{ch(\pi t + \pi x_j)\, ch(\pi t - \pi x_j)} =$$

$$= \frac{\delta_{n,m}}{\pi^2} \frac{t}{sh(\pi t)} + \frac{2t}{\pi\, sh(2\pi t)} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n,m;c)}{c} \psi\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}; t\right), \qquad (2.13)$$

где

$$\sigma_{n,m}(z) = \left(\frac{m}{n}\right)^{iz} \sigma_{2iz}(n)\, \sigma_{-2iz}(m) \frac{ch(\pi z)}{|\zeta(1+2iz)|^2}, \qquad (2.14)$$

и для $x > 0$

$$\psi(x,t) = x \int_x^\infty \left(J_{2it}(u) + J_{-2it}(u) \right) \frac{du}{u}. \qquad (2.15)$$

Полученное в [3] для положительных t тождество (2.13), по принципу аналитического продолжения, справедливо в полосе $|\Im m\, t| < 1/4$, поскольку левая часть является мероморфной функцией t во всей плоскости, а правая часть, в силу оценки А.Вейля для сумм Клоостермана, регулярна для $|\Im m\, t| < 1/4$.

Пусть t вещественно; умножим обе части (2.13) на функцию

$$ch(\pi t) \left\{ h(t + \tfrac{i}{2}) + h(t - \tfrac{i}{2}) \right\} \qquad (2.16)$$

где h удовлетворяет условиям доказываемой теоремы, и затем интегрируем полученное равенство по всей оси $-\infty < t < \infty$.

Из оценки среднего значения $|\rho_j(n)|^2$ ([3], с. 36-37)

$$\sum_{x_j \le X} e^{-\pi x_j} |\rho_j(n)|^2 \ll X^2 \qquad (2.17)$$

немедленно следует, что ряд (а также интеграл) в левой части равенства сходятся равномерно по t , так что интегрирование можно выполнить почленно. Поскольку h регулярна в полосе $|\Im m\, z| \le \Delta$ с $\Delta > 1/2$ интеграл с $h(t + \frac{i}{2})$ по вещественной прямой можно заменить интегралом по прямой $\Im m\, t = -\frac{i}{2}$, обходя точки $\pm z - \frac{i}{2}$ по малым полуокружностям сверху; в интеграле с $h(t - \frac{i}{2})$ заменим прямую интегрирования прямой $\Im m\, t = \frac{i}{2}$, обходя точки $\pm z + \frac{i}{2}$ по малым полуокружностям снизу. Так как h – четная, а

$$\frac{ch\,\pi(t \pm \frac{i}{2})}{ch\,\pi(t \pm \frac{i}{2} + z)\; ch\,\pi(t \pm \frac{i}{2} - z)} = \pm i\,\frac{sh\,\pi t}{sh\,\pi(t+z)\; sh\,\pi(t-z)}$$

является нечетной функцией t, то интегралы по прямым $\operatorname{Im} t = \pm\frac{1}{2}$ исчезают. Поэтому остаются лишь интегралы по малым полуокружностям и вычисление вычетов дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ch(\pi t)\left(h(t+\frac{i}{2}) + h(t-\frac{i}{2})\right)}{ch(\pi t + \pi z)\; ch(\pi t - \pi z)}\,dt = -2\,h(z), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Далее, для всех вещественных t и $x > 0$

$$|J_{2it}(x)| \leqslant e^{\pi|t|}\,(t^2 + x^2)^{-1/4} \tag{2.19}$$

Поэтому при тех же условиях

$$|\psi(x,t)| \leqslant x\, e^{\pi|t|} \min\left(\frac{\ln(2 + \frac{|t|}{x})}{|t|^{1/2}}, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{2.20}$$

Таким образом, для всех $c \geqslant 1$ и $t \in \mathbb{R}$ для фиксированных $n, m \geqslant 1$

$$\left|\frac{t\, ch(\pi t)}{sh(2\pi t)}\, h(t \pm \tfrac{i}{2})\,\psi\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}; t\right)\right| \leqslant (1+|t|)^{-3/2-\delta}\,\frac{\ln(2+c|t|)}{c} \tag{2.21}$$

где, по условию, $\delta > 0$. Это показывает, что интегрирование по t и в правой части можно провести почленно. Далее, при фиксированном $u > 0$ замена прямой интегрирования прямыми $\operatorname{Im} t = \pm 1/2$ дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{sh(\pi t)}\left(h(t+\tfrac{i}{2}) + h(t-\tfrac{i}{2})\right)\left(J_{2it}(u) + J_{-2it}(u)\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z)}{ch(\pi z)}\left\{(iz-\tfrac{1}{2})\left(J_{2iz-1} + J_{-2iz+1}\right) - (iz+\tfrac{1}{2})\left(J_{2iz+1} + J_{-2iz-1}\right)\right\}dz \tag{2.22}$$

В силу четности $h(z)$ правая часть здесь равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z)}{ch(\pi z)}\left((2iz-1)\,J_{2iz-1} - (2iz+1)\,J_{2iz+1}\right)dz. \tag{2.23}$$

Далее, в силу рекуррентных формул для функций Бесселя, имеем

$$(\nu-1)\,J_{\nu-1}(u) - (\nu+1)\,J_{\nu+1}(u) = 2\nu\, J_\nu'(u) + \frac{2\nu}{u}\,J_\nu(u) \tag{2.24}$$

Следовательно,

$$\int_x^{\infty}\left((\nu+1)\,J_{\nu+1}(u) - (\nu-1)\,J_{\nu-1}(u)\right)\frac{du}{u} = -\frac{2\nu}{x}\,J_\nu(x) \tag{2.25}$$

что вместе с (2.15), (2.22) и (2.23) приводит к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t\, ch(\pi t)}{\pi\, sh(2\pi t)}\left(h(t+\tfrac{i}{2}) + h(t-\tfrac{i}{2})\right)\psi(x,t)\,dt = -2\,\varphi(x) \tag{2.26}$$

где φ определена интегралом (2.6). Оставшийся интеграл легко вычисляется и в результате получаем (2.5).

§ 3. Ряды Ранкина собственных функций.

Условимся, для краткости, называть ряд Дирихле, коэффициенты которого являются квадратами модуля коэффициентов Фурье данной автоморфной функции f (или модулярной, или параболической формы f) рядом Ранкина функции (формы) f, поскольку Ранкин первым дал метод исследования таких рядов [9].

В соответствии с этим определением рядом Ранкина j-ой собственной функции является ряд

$$\mathcal{R}_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\rho_j(n)|^2}{n^s} \qquad (3.1)$$

Основные свойства рядов $\mathcal{R}_j(s)$ – мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного s и функциональное уравнение – следуют из интегрального представления ([3], с.29–32)

$$\mathcal{R}_j(s) = \frac{4\pi^s \Gamma(s)}{\Gamma^2(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+i\varkappa_j)\Gamma(\frac{s}{2}-i\varkappa_j)} \int_{\mathcal{D}} |u_j|^2 E(z,s)\,dz \qquad (3.2)$$

Здесь $\mathcal{D}$ – фундаментальная область группы G, $\mathcal{D} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1,\ |\operatorname{Re} z| < 1/2\}$, а $E(z,s)$ – ряд Эйзенштейна-Маасa, определяемый для $\operatorname{Re} s > 1$ равенством

$$E(z,s) = \sum_{g \in G_\infty \backslash G} (\operatorname{Im} gz)^s \qquad (3.3)$$

Из хорошо известного разложения $E(z,s)$ в ряд Фурье,

$$E(z,s) = y^s + y^{1-s}\omega(s) + \frac{4\pi^s\sqrt{y}}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(n)\cos(2\pi n x) K_{s-1/2}(2\pi n y), \qquad (3.4)$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда порядка ν и

$$\omega(s) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \qquad (3.5)$$

следует, что в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1/2$ единственной особенностью $\mathcal{R}_j(s)$ является простой полюс в $s = 1$

(с вычетом $\frac{12}{\pi^2}\operatorname{ch}(\pi\varkappa_j)$). Кроме этого факта, в дальнейшем понадобится оценка $|\mathcal{R}_j(s)|$ при $j \to \infty$ в скрестности точки s

<u>Лемма.</u> <u>В круге</u> $|s-1| \leq 1/2$ <u>для всех</u> $j \geq 1$

$$|\mathcal{R}_j(s)| \ll \varkappa_j^{1-\sigma}\left\{e^{\pi\varkappa_j} + |\rho_j(1)|^2 \ln^4\varkappa_j \left(\frac{1}{|s-1|} + \varkappa_j^{\max(0,\sigma-1)}\right)\right\}, \quad \sigma = \operatorname{Re} s, \qquad (3.6)$$

<u>с абсолютной постоянной в символе</u> $\ll$.

Для доказательства достаточно оценить интеграл

$$\mathcal{J}_j(\alpha) = \int_{\mathcal{D}} |u_j(z)|^2 y^\alpha\,dz \qquad (3.7)$$

в интервале $-1/2 \leq \alpha \leq 3/2$. Действительно, модуль разности $E(z,s) - y^s - \omega(s)y^{1-s}$ для $z \in \mathcal{D}$ ограничен абсолютной постоянной в круге $|s-1| \leq 1/2$. С учетом нормировки u_j и разложения Стирлинга для гамма-функции это дает

$$|\mathcal{R}_j(s)| \ll \varkappa_j^{1-\sigma} e^{\pi\varkappa_j}\{1 + \mathcal{J}_j(\sigma) + |\omega(s)|\mathcal{J}_j(1-\sigma)\} \qquad (3.8)$$

Заметим, что из неравенства $y \geq y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ для $z \in \mathcal{D}$ следует, что $y_0^{-\alpha}\mathcal{J}_j(\alpha)$ является монотонно возрастающей функцией α ; кроме того, $\mathcal{J}_j(0) = 1$. Поэтому для $1 \leq \operatorname{Re} s \leq 3/2$ имеем

$$|\mathcal{R}_j(s)| \ll \varkappa_j^{1-\sigma} e^{\pi\varkappa_j}\left\{1 + \frac{1}{|s-1|} + \mathcal{J}_j(\sigma)\right\} \qquad (3.9)$$

и для $1/2 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$

$$|\mathcal{R}_j(s)| \ll \varkappa_j^{1-\sigma} e^{\pi\varkappa_j}\left\{1 + \mathcal{J}_j(1) + \frac{1}{|s-1|}\mathcal{J}_j(\tfrac{1}{2})\right\}. \qquad (3.10)$$

Далее, поскольку $\mathfrak{D}$ целиком содержится в полосе $y > y_0,\ |x| \le 1/2$, то

$$\mathcal{J}_j(\alpha) \le \int_{y_0}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} |u_j|^2\, y^{\alpha-2}\, dx\, dy \tag{3.11}$$

Подставим сюда разложение (2.3) собственной функции в ряд Фурье. В [3] показано, что для любого $n \ge 1$ и $j \ge 1$

$$|\rho_j(n)| \le |\rho_j(1)|\ d(n) \tag{3.12}$$

где $d(n)$ – число положительных делителей n. Вместе с (3.11) это дает неравенство

$$\mathcal{J}_j(\alpha) \le |\rho_j(1)|^2\ \tilde{\mathcal{J}}(\varkappa_j, \alpha) \tag{3.13}$$

в котором

$$\tilde{\mathcal{J}}(\varkappa, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} d^2(n) \int_{y_0}^{\infty} K_{i\varkappa}^2(2\pi n y)\, y^{\alpha-1}\, dy \tag{3.14}$$

Поскольку ([10], с.107) для $\alpha > 0$

$$K_{i\varkappa}^2(\alpha) = \frac{1}{16 i\pi} \int_{Re\, s = 2} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^s \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\varkappa\right)}{\Gamma(s)}\, ds \tag{3.15}$$

то $\tilde{\mathcal{J}}(\varkappa, \alpha)$ можно записать в виде интеграла

$$\tilde{\mathcal{J}}(\varkappa, \alpha) = \frac{y_0^{\alpha}}{16 i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\ \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\varkappa\right)}{(\pi y_0)^s\,(s-\alpha)\,\Gamma(s)}\, ds \tag{3.16}$$

где $\alpha < 2$. Для $\alpha \ge 1$ перенесём путь интегрирования на прямую $Re\, s = 3/4$. Подинтегральная функция имеет полюс 4-го порядка в $s = 1$ и простой полюс в $s = \alpha$; при $\alpha = 1$ эти полюса сливаются и возникает полюс 5-го порядка в $s = 1$. При $s = \sigma + 2it$, $\sigma \ge 3/4$, модуль этой

функции при $t \to \pm\infty$ оценивается величиной

$$\ll \left((1+|t+\varkappa|)(1+|t-\varkappa|)\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} |t|^{-3/2} |\zeta(\sigma+it)|^4\, e^{-\frac{\pi}{2}(|t+\varkappa|+|t-\varkappa|)} \tag{3.17}$$

В частности, для $\sigma = 3/4$ интеграл (3.16) есть $O(\varkappa^{-1/4} e^{-\pi\varkappa})$, что следует из оценки четвертого момента дзета-функции. Теперь осталось оценить сумму вычетов в $s = 1$ и $s = \alpha$ при больших $\varkappa$. Если $\alpha = 1$, то вычет в $s = 1$ оценивается величиной $O(\ln^4\varkappa\ e^{-\pi\varkappa})$. Для $\alpha > 1$ запишем подинтегральную функцию в виде $(s-\alpha)^{-1}$. $(s-1)^{-4} f(s; \varkappa)$, где $f(s, \varkappa)$ регулярна для $Re\, s > 1/2$. С этим обозначением сумма вычетов равна

$$\frac{1}{(\alpha-1)^4} \cdot \left\{ f(\alpha, \varkappa) - \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}(\alpha-1)^k f^{(k)}(1, \varkappa) \right\} \tag{3.18}$$

Для вещественных s функция $f(s, \varkappa)$ вещественна. Поэтому числитель в (3.18) равен $\frac{1}{4!}(\alpha-1)^4 f^{(IV)}(\tilde{\alpha}; \varkappa)$, где $\tilde{\alpha}$ заключено в интервале $(1, \alpha)$. Следовательно, при $\alpha \ge 1$ равномерно по α величина (3.18)

$$\ll \varkappa^{\alpha-1}\, \ln^4\varkappa \cdot e^{-\pi\varkappa} \tag{3.19}$$

Наконец, для $\alpha = 1/2$ вычет в $s = 1$ оценивается величиной $O(\ln^3\varkappa\ e^{-\pi\varkappa})$; вместе с (3.9) и (3.10) это доказывает лемму.

§ 4. ~~Ряды~~ Ранкина регулярных параболических форм веса k.

В этом разделе дается мероморфное продолжение рядов Дирихле вида

$$\mathcal{L}_\kappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Big(\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n,n;c)}{c} J_{\kappa-1}\Big(\frac{4\pi n}{c}\Big)\Big) \qquad (4.1)$$

где κ – целое четное, $\kappa \geq 2$; продолжение осуществляется с помощью представления $\mathcal{L}_\kappa(s)$ в виде конечной суммы рядов Ранкина параболических форм веса κ. Параболической формой веса κ здесь называется регулярная для $\operatorname{Im} z > 0$ функция $f(z)$, которая для $g \in G$, $g \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяет уравнению

$$f(gz) = (cz+d)^\kappa f(z) \qquad (4.2)$$

и обращается в нуль при $\operatorname{Im} z \to \infty$. Хорошо известно, [II], что пространство $\mathfrak{M}_\kappa$ параболических форм веса κ конечномерно и что оно порождается рядами Пуанкаре $P_n(z;\kappa)$,

$$P_n(z;\kappa) \stackrel{def}{=} n^{\kappa-1} \sum_{g \sim \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in G_\infty \backslash G} (cz+d)^{-\kappa} e^{2\pi i n g z} \qquad (4.3)$$

Лемма. Пусть $f_1, \ldots, f_{\nu_\kappa}$, $\nu_\kappa = \dim \mathfrak{M}_\kappa$, образуют ортонормированный базис $\mathfrak{M}_\kappa$. Положим

$$R_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_j(n)|^2}{n^{\kappa-1+s}} \qquad (4.4)$$

где $a_j(n)$ для $n \geq 1$ определяются разложением

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(n) e^{2\pi i n z} \qquad (4.5)$$

Тогда для целых чотных $\kappa \geq 2$

$$\mathcal{L}_\kappa(s) = \frac{i^\kappa}{2\pi}\Big(-\zeta(s) + \frac{\Gamma(\kappa-1)}{(4\pi)^{\kappa-1}} \sum_{j=1}^{\nu_\kappa} R_j(s)\Big) \qquad (4.6)$$

Равенство (4.6) вытекает из следующих свойств рядов Пуанкаре. Во-первых, легко проверяется формула Петерсона [II],

$$\int_{\mathcal{D}} f_j(z) \overline{P_n(z;\kappa)} y^\kappa dz = \frac{\Gamma(\kappa-1)}{(4\pi)^{\kappa-1}} a_j(n) \qquad (4.7)$$

Отсюда следует, что $P_n(z;\kappa)$ является линейной комбинацией вида

$$P_n(z;\kappa) = \frac{\Gamma(\kappa-1)}{(4\pi)^{\kappa-1}} \sum_{j=1}^{\nu_\kappa} \overline{a_j(n)} \, f_j(z), \qquad (4.8)$$

если базисные функции нормированы условием

$$(f_j, f_{j'})_\kappa = \int_{\mathcal{D}} f_j \overline{f_{j'}} \, y^\kappa dz = \delta_{j,j'} \qquad (4.9)$$

Во-вторых, коэффициенты $a_n(m;\kappa)$ разложения P_n в ряд Фурье,

$$P_n(z;\kappa) = \sum_{m=1}^{\infty} a_n(m;\kappa) e^{2\pi i m z}$$

выражаются через суммы Клостермана и функцию Бесселя порядка $\kappa-1$ формулами (см., например, [I2])

$$a_n(m;\kappa) = (nm)^{\frac{\kappa-1}{2}} \Big\{ \delta_{n,m} + \frac{2\pi}{i^\kappa} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n,m;c)}{c} J_{\kappa-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\Big)\Big\} \qquad (4.10)$$

Отсюда следует, что коэффициент с номером n ряда Дирихле $\mathcal{L}_\kappa$ равен

$$\frac{i^{k}}{2\pi}\left(-1+\frac{a_n(n;k)}{n^{k-1}}\right)=\frac{i^{k}}{2\pi}\left(-1+\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}}\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{|a_j(n)|^2}{n^{k-1}}\right), \qquad (4.11)$$

что немедленно дает (4.6).

Заметим, что для всех достаточно больших значений $Re\, s$ справедливо интегральное представление

$$\frac{\Gamma(k+s-1)}{(4\pi)^{k+s-1}} R_j(s) = \int_0^{\infty}\int_{-1/2}^{1/2} |f_j(z)|^2 y^{k+s} \frac{dx\, dy}{y^2} \qquad (4.12)$$

В этом интеграле $y^k |f_j(z)|^2$ является автоморфной функцией модулярной группы. Поэтому интеграл можно записать в виде

$$\int_{\mathfrak{D}} |f_j(z)|^2 y^k E(z,s)\, dz\,, \qquad (4.13)$$

если представить полосу $y>0,\ |x|\le 1/2$ в виде объединения образов фундаментальной области $\mathfrak{D}$ и затем в каждом из интегралов по области $g\mathfrak{D}$, $g\in G_\infty\backslash G$, сделать замену переменной $gz\to z$.

Этим способом для рядов $\mathcal{L}_k(s)$ получаем интегральное представление

$$\mathcal{L}_k(s)=\frac{i^k}{2\pi}\left\{-\zeta(s)+\frac{(4\pi)^s\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-1+s)}\sum_{j=1}^{\nu_k}\int_{\mathfrak{D}}|f_j(z)|^2 y^k E(z,s)\,dz\right\} \qquad (4.14)$$

которое дает мероморфное продолжение $\mathcal{L}_k(s)$ на всю плоскость комплексного переменного s. В частности, в полуплоскости $Re\, s\ge 1/2$ $\mathcal{L}_k(s)$ является регулярной функцией s, за исключением простого полюса в $s=1$, вычет в котором равен

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\mathcal{L}_k(s)=\frac{(-1)^{k/2}}{2\pi}\left(-1+\frac{12}{k-1}\dim\mathfrak{M}_k\right). \qquad (4.15)$$

§ 5. Ряды Дирихле, дополнительные к рядам Ранкина параболических форм.

Пусть определенная на полуоси $x\ge 0$ функция $\varphi(x)$ достаточно быстро убывает при $x\to 0$ и $x\to\infty$. Положим

$$Z_\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\left(\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c}S(n,n;c)\,\varphi\left(\frac{4\pi n}{c}\right)\right). \qquad (5.1)$$

Из оценки А.Вейля для сумм Клоостермана следует, что этот ряд абсолютно сходится в полуплоскости $Re\, s>1/2$, если $\varphi(x)$ ограничена для $x\ge 1$, а при $x\to 0$ $\varphi(x)=O(x^\delta)$ для некоторого $\delta>\frac{1}{2}$.

Если бы всякую функцию φ можно было представить в виде линейной комбинации функций Бесселя целого нечетного порядка, то ряд $Z_\varphi(s)$ сводился к комбинации рядов Ранкина параболических форм четного веса. Однако, система $\{J_{2\ell+1}(x)\}$, $\ell\ge 0$, ортогональная по мере $\frac{dx}{x}$ на полуоси $x\ge 0$, не полна (в пространстве функций, интегрируемых с квадратом модуля по мере $\frac{dx}{x}$ на полуоси $x\ge 0$). Поэтому в общем случае φ имеет ненулевую составляющую в ортогональном дополнении к функциям Бесселя целого нечетного порядка и ряд Z_φ кроме рядов Ранкина параболических форм содержит дополнительные члены.

Продолжение рядов $Z_\varphi(s)$ сводится к продолжению

$$L_n(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{A_n(c)}{c^s}, \qquad (5.2)$$

$Re\, s > 1$, где $A_n(c)$ – число решений сравнения $x^2 + nx + 1 \equiv 0 \pmod c$.

$$x^2 + nx + 1 \equiv 0 \pmod c. \qquad (5.3)$$

Действительно, при надлежащих условиях убывания φ при $x \to 0$ и $x \to +\infty$

$$Z_\varphi(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{1+s}} \sum_{m=1}^{c} S(m,m;c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(4\pi(n+\frac{m}{c}))}{(n+\frac{m}{c})^s} \qquad (5.4)$$

Разлагая внутреннюю сумму в ряд Фурье, получаем отсюда

$$Z_\varphi(s) = (4\pi)^{s-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(s) L_n(s), \qquad (5.5)$$

где

$$\varphi_n(s) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \varphi(x) \frac{dx}{x^s}, \qquad (5.6)$$

$$L_n(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^s} \left(\frac{1}{c} \sum_{m=1}^{c} S(m,m;c)\, e^{2\pi i n m/c}\right). \qquad (5.7)$$

Определения (5.2) и (5.7) совпадают. В самом деле,

$$S(m,m;c) = \sum_{\substack{(d,c)=1,\ 1 \le d \le |c| \\ ad \equiv 1 \pmod c}} e^{2\pi i m(a+d)/c} \qquad (5.8)$$

Поэтому внутренняя сумма в (5.7) равна c, если $a+d+n \equiv 0 \pmod c$ и 0 – в противном случае. Так как $(d,c)=1$, то сравнение $a+d+n \equiv 0 \pmod c$ эквивалентно сравнению $ad + d^2 + nd \equiv 1 + d^2 + nd \equiv 0 \pmod c$;

поэтому число тех d, для которых сумма по m в (5.7) равна c, равно $A_n(c)$.

Ряды $L_n(s)$ мероморфно продолжаются с помощью явных формул для числа решений сравнения (5.3). Прежде всего, в силу мультипликативности имеем

$$L_n(s) = \prod_p v_p(s;n) \qquad (5.9)$$

где произведение берется по всем простым, а $v_p(s;n)$ определены равенством (I.4). Элементарный (хотя и несколько громоздкий) подсчет $A_n(p^\alpha)$ приводит к следующим формулам, которые непосредственно дают мероморфное продолжение $L_n(s)$ на всю плоскость комплексного переменного s. Для задачи продолжения явный вид $v_p(s;n)$ важен лишь для $p \nmid n^2-4$; для $p \mid n^2-4$ и $p=2$ соответствующие формулы приводятся только для полноты.

Лемма.

I. Для $n = \pm 2$ и $Re\, s > 1$

$$v_p(s;n) = \left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \qquad (5.10)$$

и

$$L_{\pm 2}(s) = \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \qquad (5.11)$$

II. Для $n \ne \pm 2$ и $p > 2$

1) если $n \not\equiv \pm 2 \pmod p$

$$v_p(s;n) = \left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\left(\frac{n^2-4}{p}\right)\right)^{-1}, \qquad (5.12)$$

2) если $n \equiv \pm 2 \pmod{p^{2\gamma}}$, $\gamma \geq 1$, и $m = \frac{n^2-4}{p^{2\gamma}}$ взаимно просто с p,

$$v_p(s;n) = \left(1+\frac{1}{p^s}\right)\frac{1-p^{\gamma(1-2s)}}{1-p^{1-2s}} + p^{\gamma(1-2s)}\frac{p^s+\left(\frac{m}{p}\right)}{p^s-1}, \qquad (5.13)$$

3) если $n \equiv \pm 2 \pmod{p^{2\gamma+1}}$, $\gamma \geq 0$, и $m = p^{-2\gamma-1}(n^2-4)$ взаимно просто с p,

$$v_p(s;n) = \left(1+\frac{1}{p^s}\right)\frac{1-p^{(\gamma+1)(1-2s)}}{1-p^{1-2s}}, \qquad (5.14)$$

4) для $n \neq \pm 2$ и $p = 2$

$$v_2(s;n) = 1, \quad n \equiv 1 \pmod 2, \qquad (5.15)$$

$$= 1+\frac{1}{2^s}, \quad n \equiv 0 \pmod 4, \qquad (5.16)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\frac{2}{4^s}\right), \quad \frac{n}{2} \equiv 3 \pmod 8 \text{ или } 5 \pmod 8, \qquad (5.17)$$

5) для $\frac{n}{2} \equiv \pm 1 \pmod 8$ с условием $\frac{n}{2} \not\equiv \pm 1 \pmod{16}$

$$v_2(s;n) - \left(1+\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\frac{2}{4^s}+\frac{4}{8^s}\right) = 2^{3-6s}, \quad \frac{n}{2} \equiv \pm 9 \pmod{16}, \qquad (5.18)$$

$$= 2^{3-6s} + \frac{2^{4-6s}}{2^s-1}, \quad \frac{n}{2} \equiv \pm 23 \pmod{64}, \qquad (5.19)$$

$$= 0, \quad \frac{n}{2} \not\equiv -9, \pm 23 \pmod{64} \qquad (5.20)$$

6) для $\frac{n}{2} \equiv \pm 1 \pmod{2^{2\gamma}}$ с условием $\gamma \geq 2$, $\frac{n}{2} \not\equiv \pm 1 \pmod{2^{2\gamma+1}}$,

$$v_2(s;n) = \left(1+\frac{1}{2^s}\right)\frac{1-2^{(\gamma+1)(1-2s)}}{1-2^{1-2s}}, \qquad (5.21)$$

7) для $\frac{n}{2} \equiv \pm 1 \pmod{2^{2\gamma+1}}$ с условием $\gamma \geq 0$, $\frac{n}{2} \not\equiv \pm 1 \pmod{2^{2\gamma+2}}$,

$$v_2(s;n) - \left(1+\frac{1}{2^s}\right)\frac{1-2^{(\gamma+2)(1-2s)}}{1-2^{1-2s}} = 0, \quad \frac{n}{2} \not\equiv \pm(1+2^{2\gamma+1}) \pmod{2^{2\gamma+3}}, \qquad (5.22)$$

$$= 2^{(\gamma+2)(1-2s)}, \quad \frac{n}{2} \equiv \pm(1+2^{2\gamma+1}) \pmod{2^{2\gamma+3}}, \text{ но не } \pmod{2^{2\gamma+4}}, \qquad (5.23)$$

$$= 2^{(\gamma+2)(1-2s)}\cdot\frac{2^s+1}{2^s-1}, \quad \frac{n}{2} \equiv \pm(1+2^{2\gamma+1}) \pmod{2^{2\gamma+4}} \qquad (5.24)$$

Из (5.14) следует, что для $n \neq \pm 2$

$$L_n(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} L_n(s,\chi)\, v_2(s;n) \prod_{p \mid n^2-4}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} v_p(s,n) \qquad (5.25)$$

где

$$L_n(s,\chi) = \sum_{m \geq 1,\, m \equiv 1 \pmod 2} m^{-s}\left(\frac{n^2-4}{m}\right). \qquad (5.26)$$

Поскольку для $|n| > 2$ число n^2-4 не может быть полным квадратом, то $L_n(s,\chi)$ является целой функцией s [6]. Конечное число функций $v_p(s,n)$ с $p \mid n^2-4$ продолжается на всю плоскость s равенствами (5.13)-(5.24). Тем самым (5.25) дает мероморфное продолжение $L_n(s)$, $n>2$, на всю плоскость s.

Отметим еще, что $L_0(s)$ и $L_{\pm 1}(s)$,

$$L_0(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} L(s,\chi_4), \qquad (5.27)$$

$$L_{\pm 1}(s) = \frac{\zeta(s)}{(1+\frac{1}{2^s})\zeta(2s)} \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p^s}\left(\frac{3}{p}\right)\right)^{-1}, \qquad (5.28)$$

также допускают мероморфное продолжение на всю плоскость s.

Следовательно, ряд $Z_{\varphi}(s)$, определенный для достаточно больших значений $\mathrm{Re}\, s$ равенством (5.I), допускает продолжение в область, в которой ряд (5.5) сходится абсолютно (например, если бесконечно гладкая φ с производными убывает быстрее любой степени x при $x \to 0$ и $x \to \infty$, то $Z_{\varphi}(s)$ мероморфно продолжается на всю плоскость s).

§ 6. Вывод формулы следа.

Пусть функция $h(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, так что условия справедливости тождества (2.5) также выполнены. Положим в этом тождестве $n = m$ и, разделив обе части на n^s с $\mathrm{Re}\, s > 1/2$, просуммируем полученное равенство по всем $n \geq 1$. Ряды в левой части сходятся абсолютно для $\mathrm{Re}\, s > 1$ вследствие неравенства (3.I2) и оценки (2.I7).

Вследствие абсолютной сходимости порядок суммирования можно изменить; учитывая еще известное тождество Рамануджана ([I3], с.I3) $(\mathrm{Re}\, s > 1 + |\mathrm{Re}\, a| + |\mathrm{Re}\, b|)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\,\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-a)\,\zeta(s-b)\,\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} \tag{6.I}$$

в результате получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(\varkappa_j)}{ch(\pi\varkappa_j)} \mathcal{R}_j(s) + \frac{\zeta^2(s)}{\pi\,\zeta(2s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(s+2iz)\,\zeta(s-2iz)}{|\zeta(1+2iz)|^2} h(z)\,dz =$$

$$= \frac{\zeta(s)}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} z\, th(\pi z)\, h(z) + Z_{\varphi}(s), \tag{6.2}$$

где $\mathcal{R}_j(s)$ и $Z_{\varphi}(s)$ определены равенствами (3.I) и (5.I) (с φ из (2.6)) соответственно.

Из (6.2) формула следов получается приравниванием вычетов левой и правой частей в $s = 1$.

Если $h(z)$ при $|z| \to \infty$ есть $O(|z|^{-2-\delta})$, $\delta > 0$, то, в силу оценок (3.6) и (2.I7), ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(\varkappa_j)}{ch(\pi\varkappa_j)} (s-1)\,\mathcal{R}_j(s) \tag{6.3}$$

сходится равномерно по s в круге $|s-1| \leq \min(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2})$ и представляет в нем регулярную функцию s. Таким образом, левая часть (6.2) аналитична в круге $|s-1| \leq \min(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2})$ за исключением точки $s = 1$. В этой точке – полюс второго порядка и первые два члена Лорановского разложения по степеням $(s-1)$ имеют вид

$$\frac{1}{(s-1)^2} \cdot \frac{1}{\pi\,\zeta(2)} \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\,dz +$$

$$+ \frac{1}{(s-1)} \cdot \Big\{ \frac{12}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} h(\varkappa_j) + \frac{1}{\pi\,\zeta(2)} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(2\gamma - 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\Big) h(z)\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\zeta(2)}(-h(0))\Big\} \tag{6.4}$$

где γ – постоянная Эйлера.

Вычислим теперь первые члены разложения в ряд Лорана в правой части (6.2).

Пусть $N \geq 0$ – произвольное целое с условием, что функция $h(z)$ регулярна в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \leq N + \frac{1}{2} + \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. По меньшей мере, одно такое N (а именно, $N = 0$) в условиях теоремы 3 существует. Сместим путь интегрирования в интеграле (2.6) в нижнюю полуплоскость и будем выполнять интегрирование по прямой $\Im z = -\alpha$, взяв α с условием

$$\min\left(N+\tfrac{3}{2},\, 4\right) > \alpha > \max\left(N+\tfrac{1}{2},\, \tfrac{3}{4}\right) \qquad (6.5)$$

Это дает для φ представление

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\ell=0}^{N}(-1)^{\ell}(2\ell+1)\,h\!\left(i\ell+\tfrac{i}{2}\right)J_{2\ell+1}(x) + \psi(x), \qquad (6.6)$$

где

$$\psi(x) = \frac{2i}{\pi}\int\limits_{\Im z=-\alpha} J_{2iz}(x)\,\frac{z}{ch(\pi z)}\,h(z)\,dz. \qquad (6.7)$$

Следовательно, с обозначением (4.I),

$$Z_{\varphi}(s) = \frac{2}{\pi}\sum_{\ell=0}^{N}(-1)^{\ell}(2\ell+1)\,h\!\left(i\ell+\tfrac{i}{2}\right)\mathcal{L}_{2\ell+2}(s) + Z_{\psi}(s). \qquad (6.8)$$

Пусть s удовлетворяет условию $\frac{3}{2} < \Re s < 2\alpha$. Тогда двойной ряд $Z_{\psi}(s)$ сходится абсолютно и порядок суммирования по n и c можно изменить. Таким образом,

$$Z_{\psi}(s) = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1+s}}\sum_{m=1}^{c}S(m,m;c)\,\tilde{\psi}\!\left(\tfrac{m}{c};s\right) \qquad (6.9)$$

и в то же время

$$Z_{\psi}(s) = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1+s}}\sum_{m=0}^{c-1}S(m,m;c)\,\tilde{\psi}\!\left(1-\tfrac{m}{c};s\right) \qquad (6.10)$$

где для $0 < \xi \le 1$

$$\tilde{\psi}(\xi;s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi(4\pi(n+\xi))}{(n+\xi)^{s}}. \qquad (6.11)$$

Этот ряд сходится абсолютно для $\Re s > \frac{1}{2}$, так как при $x\to\infty$ $\psi(x) = O(x^{-1/2})$. Кроме того, поскольку $\psi(x) = O(x^{2\alpha})$ при $x\to 0$, для $\Re s < 2\alpha$ имеем

$$\tilde{\psi}(0;s) = \tilde{\psi}(1;s) \qquad (6.12)$$

Учитывая еще вещественность сумм Клоостермана, из последних равенств получаем

$$Z_{\psi}(s) = \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1+s}}\sum_{m=1}^{c}S(m,m;c)\left(\tilde{\psi}\!\left(1-\tfrac{m}{c};s\right)+\tilde{\psi}\!\left(\tfrac{m}{c};s\right)\right) \qquad (6.13)$$

Далее, для коэффициентов Фурье функции $\frac{1}{2}\left(\tilde{\psi}(\xi;s)+\tilde{\psi}(1-\xi;s)\right)$ имеем

$$\begin{aligned}\psi_n(s) &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2\pi i n\xi}\left(\tilde{\psi}(\xi;s)+\tilde{\psi}(1-\xi;s)\right)d\xi \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi n\xi)\,\tilde{\psi}(\xi;s)\,d\xi \\ &= \int_0^{\infty}\cos(2\pi n\xi)\,\frac{\psi(4\pi\xi)}{\xi^{s}}\,d\xi\end{aligned} \qquad (6.14)$$

Используем здесь для ψ интегральное представление (6.7) и изменим порядок интегрирования, что законно в силу оценки

$$\left|\frac{1}{ch(\pi z)}J_{2iz}(x)\right| \le \min\left(\frac{x^{2\alpha}}{(1+|z|)^{2\alpha+1/2}},\, \frac{1}{\sqrt{x}}\right),\quad \Im z = -\alpha. \qquad (6.15)$$

Это приводит к хорошо известному интегралу Вебера-Шафхейтлина ([IO], с.6I-63) и в результате получаем

$$\psi_n(s) = \frac{i\pi^{s-\frac{1}{2}}}{n^{1-s}}\int\limits_{\Im z=-\alpha}\frac{\Gamma\!\left(iz+\frac{1-s}{2}\right)F\!\left(iz+\frac{1-s}{2},\, iz+\frac{2-s}{2};\, 1+2iz;\, \frac{1}{n^{2}}\right)h(z)\,z\,dz}{2^{-2iz}\,n^{2iz}\,ch(\pi z)\,\Gamma(1+2iz)\,\Gamma\!\left(-iz+\frac{s}{2}\right)},\quad n\ge 3 \qquad (6.16)$$

$$\psi_2(s) = \frac{i\pi^{s-\frac{3}{2}}}{2^{1-s}}\int\limits_{\Im z=-\alpha}\frac{\Gamma\!\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma\!\left(iz+\frac{1-s}{2}\right)h(z)\,z\,dz}{ch(\pi z)\,\Gamma\!\left(iz+\frac{s}{2}\right)\Gamma\!\left(-iz+\frac{1}{2}\right)\Gamma\!\left(iz+\frac{1+s}{2}\right)}, \qquad (6.17)$$

$$\psi_1(s)=\frac{i}{\pi}(2\pi)^{s-1}\int\limits_{\operatorname{Im} z=-\alpha}\frac{\Gamma\left(iz+\frac{1-s}{2}\right)F\left(iz+\frac{1-s}{2},\,-iz+\frac{1-s}{2};\,\frac{1}{2};\,\frac{1}{4}\right)h(z)\,z\,dz}{ch(\pi z)\,\Gamma\left(iz+\frac{1+s}{2}\right)}, \tag{6.18}$$

$$\psi_0(s)=\frac{i}{\pi}(2\pi)^{s-1}\int\limits_{\operatorname{Im} z=-\alpha}\frac{\Gamma\left(iz+\frac{1-s}{2}\right)}{ch(\pi z)\,\Gamma\left(iz+\frac{1+s}{2}\right)}\,h(z)\,z\,dz, \tag{6.19}$$

где F обозначает гипергеометрический ряд Гаусса.

Теперь представление вида (5.5)

$$Z_\psi(s) = L_0(s)\,\psi_0(s) + 2\sum_{n=1}^{\infty} L_n(s)\,\psi_n(s) \tag{6.20}$$

дает продолжение $Z_\psi(s)$ в полосу $1/2 < \operatorname{Re} s < 2\alpha$.

Действительно, для $L_n(s)$ при любом фиксированном s и любом $\varepsilon > 0$ имеем тривиальную оценку при $n \to \infty$

$$|L_n(s)| \leqslant |\zeta(s)|\; n^{\max(0,\,1-\operatorname{Re} s)+\varepsilon}, \qquad \operatorname{Re} s \geqslant 1/2 \tag{6.21}$$

поскольку, в силу (2.53) и (2.54), для $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ и $n \geqslant 3$

$$\Big|\prod_{p\mid n^2-4}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} v_p(s,n)\Big| \ll d(n^2-4) \tag{6.22}$$

а для $L_n(s,\chi)$, $\chi(m)=\left(\frac{n^2-4}{m}\right)$, справедлива оценка

$$|L_n(s,\chi)| \ll n^{\max(0,\,1-\operatorname{Re} s)+\varepsilon} \tag{6.23}$$

Далее ([I4], c.86-89), если $0 \leqslant x \leqslant x_0 < 1$, то при $|z| \to \infty$, $\operatorname{Im} z = -\alpha$ и $0 < \operatorname{Re} s < 2\alpha$

$$\left|F\left(iz+\frac{1-s}{2},\; iz+\frac{2-s}{2};\; 1+2iz;\; x\right)\right| \ll 1. \tag{6.24}$$

Поэтому для $n \geqslant 3$ и $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$

$$|\psi_n(s)| \ll \frac{1}{n^{1+2\alpha-\operatorname{Re} s}}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)^{1-\operatorname{Re} s}\,|h(-i\alpha+t)|\,dt \tag{6.25}$$

и интеграл сходится при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ в силу условия на порядок убывания $|h(t)|$.

Следовательно, в условиях теоремы ряд (6.20) сходится в полосе $1/2 < \operatorname{Re} s < 2\alpha$. Это дает мероморфное продолжение $Z_\varphi(s)$, а вместе с этим, в силу (6.8) и продолжимости $\mathcal{L}_K(s)$ на всю плоскость s, и ряда $Z_\varphi(s)$ в указанную полосу. Поскольку $\psi_n(s)$ регулярны для $1/2 < \operatorname{Re} s < 2\alpha$, а ряды $\mathcal{L}_K(s)$ и $L_n(s)$, $n \neq 2$, имеют в $s=1$ простой полюс, то $Z_\varphi(s)$ имеет в $s=1$ полюс второго порядка, происходящий от слагаемого $2L_2(s)\psi_2(s)$.

Для вычисления первых членов Лорановского разложения положим $s=1$ в формулах (6.16) – (6.19) с $n \neq 2$. В этом случае гипергеометрическая функция сводится к элементарным. Имеем ([I4], c.110),

$$F\left(iz,\, iz+\frac{1}{2};\, 1+2iz;\, x\right) = \left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2iz}, \qquad 0 \leqslant x < 1, \tag{6.26}$$

и

$$F\left(iz,\,-iz;\,\frac{1}{2};\,x^2\right) = ch\,(2z \arcsin x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{6.27}$$

Используя еще для гамма-функции формулу удвоения,

$$\Gamma(1+2iz) = 2^{2iz}\,\pi^{-1/2}\,\Gamma\left(iz+\frac{1}{2}\right)\Gamma(iz+1) \tag{6.28}$$

и функциональные уравнения, получаем для $n \geqslant 3$

$$\psi_n(1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\operatorname{Im} z=-\alpha}\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^{-2iz} h(z)\,dz = 2g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right) \tag{6.29}$$

где $g(v)$ определяется по h интегралом (I.9).

Для $n=0,\ 1$ имеем

$$\psi_0(1)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\operatorname{Im} z=-\alpha}\frac{h(z)}{ch(\pi z)}\,dz$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(z)}{ch(\pi z)}\,dz-\frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{N}(-1)^{l}h(il+i/2) \qquad (6.30)$$

и

$$\psi_1(1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ch\frac{\pi z}{3}}{ch(\pi z)}\,h(z)\,dz-\frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{N}(-1)^{l}h(il+i/2)\cos\left(\frac{\pi l}{3}+\frac{\pi}{6}\right) \qquad (6.31)$$

Наконец, в силу (5.11), при $s\to 1$ имеем

$$L_2(s)\psi_2(s)=\frac{1}{(s-1)^2}\cdot\frac{1}{2\pi\zeta(2)}\int_{-\infty}^{\infty}h(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{2\pi\zeta(2)}\Big\{\int\limits_{\operatorname{Im} z=-\alpha}\Big(3\gamma+\ln(2\pi)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{2}\Big)-2\frac{\zeta'}{\zeta}(2)-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(iz)-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(iz+\frac{1}{2}\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(-iz+\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(iz+1)\Big)h(z)\,dz\Big\}+O(1) \qquad (6.32)$$

Коэффициент перед $\frac{1}{2}(s-1)^{-2}$ здесь такой же, как в (6.4), а коэффициент перед $(s-1)^{-1}$ в силу функционального уравнения $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+z)=\frac{1}{z}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)$ и четности $h(z)$ преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi\zeta(2)}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(3\gamma+\ln(2\pi)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/2)-2\frac{\zeta'}{\zeta}(2)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(iz+1)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(iz+\frac{1}{2}\Big)\Big)h(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{4\zeta(2)}h(0)-\frac{1}{2\zeta(2)}\sum_{l=0}^{N}h(il+i/2)\,, \qquad (6.33)$$

где последняя сумма происходит от полюсов функции $\frac{\Gamma'}{\Gamma}\big(-iz+\frac{1}{2}\big)$.

Этим заканчивается вычисление первых членов Лорановского разложения пр..ой части (6.2). Обозначим через $B(n)$ для $n\neq 2,\ n\geq 0$, вычет функции $\zeta(2s)L_n(s)$

в $s=1$, так что, в силу (5.25),

$$B(n)=\psi_2(1;n)\Big\{\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv 1 (\mathrm{mod}\,2)}}^{\infty}\frac{1}{m}\Big(\frac{n^2-4}{m}\Big)\Big\}\prod_{\substack{p\,|\,n^2-4\\ p>2}}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}\psi_p(1;n) \qquad (6.34)$$

Тогда из (6.8),(6.20),(4.15),(6.29)-(6.33) получаем (с учетом равенств $B(0)=\frac{\pi}{4}$, $B(1)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$), что первые два члена разложения правой части (6.2) по степеням $(s-1)$ имеют вид

$$\frac{1}{(s-1)^2}\cdot\frac{1}{\pi\zeta(2)}\int_{-\infty}^{\infty}h(z)\,dz+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{\zeta(2)}\Big\{\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}z\,th(\pi z)\,h(z)\,dz+$$

$$+4\sum_{n=3}^{\infty}B(n)\,g\Big(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\Big)+\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}+\frac{2}{3\sqrt{3}}ch\frac{\pi z}{3}\Big)\frac{h(z)}{ch(\pi z)}\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(3\gamma+\ln(2\pi)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{2}\Big)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(iz+1)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(iz+\frac{1}{2}\Big)\Big)h(z)\,dz+\frac{1}{2}h(0)+$$

$$+\sum_{l=0}^{N}h(il+i/2)\Big(\frac{2l+1}{6}-2\dim\mathfrak{M}_{2l+2}-1+(-1)^{l+1}\Big(\frac{1}{2}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\cos\Big(\frac{\pi l}{3}+\frac{\pi}{6}\Big)\Big)\Big)\Big\} \qquad (6.35)$$

Для размерности пространства параболических форм веса $2l+2$ хорошо известна формула [15]

$$\dim\mathfrak{M}_{2l+2}=\Big[\frac{l}{6}-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{l+1}}{4}\Big]\,,\quad l\geq 1\,, \qquad (6.36)$$

где $[\cdot]$ означает целую часть; легко проверить, что для всех $l\geq 1$ правую часть (6.36) можно записать в форме

$$\frac{2l+1}{12}-\frac{1}{2}+(-1)^{l}\Big(\frac{1}{4}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos\Big(\frac{l\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\Big)\Big) \qquad (6.37)$$

Поэтому коэффициенты перед $h(il+\frac{1}{2})$ в (6.35) обращаются в 0 для $l \geq 1$ и последняя сумма в (6.35) равна $-2h(\frac{i}{2})$. Отметим, впрочем, что это заключение можно было сделать сразу, так как N – произвольное целое с условием, что $h(t)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Im} t| \leq N+\frac{1}{2}+\varepsilon_0$ с $\varepsilon_0 > 0$, а эту полосу можно было бы предположить сколь угодно широкой; поэтому продолжение $Z_\varphi(s)$ попутно дает формулу для $\dim \mathfrak{M}_k$.

Теперь для доказательства теоремы 3 достаточно приравнять выражения (6.4) и (6.35) и учесть, что

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 \tag{6.38}$$

§ 7. Распределение норм примитивных гиперболических классов.

7.1. Точная формула.

Лемма. Пусть $\pi_G(x)$ обозначает число классов сопряженных примитивных гиперболических элементов модулярной группы, норма которых не превышает x. Пусть для целых $n \geq 3$

$$\varepsilon_n = \tfrac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2-4}\right) \tag{7.1}$$

и $\mathcal{A}$ – множество положительных чисел вида $(\varepsilon_n)^m$ с $n \geq 3$, $m \geq 1$. Тогда для любого $x \geq 1$ с условием $x \notin \mathcal{A}$

$$\pi_G(x) + \tfrac{1}{2}\pi_G(\sqrt{x}) + \tfrac{1}{3}\pi_G(\sqrt[3]{x}) + \ldots = \sum_{3 \leq n \leq \frac{x+1}{\sqrt{x}}} \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_n^{-1}}{\ln \varepsilon_n} B(n) \tag{7.2}$$

где $B(n)$ – вычет в $s=1$ функции $\zeta(2s)L_n(s)$.

Для доказательства фиксируем $x > 1$, $x \notin \mathcal{A}$ и с достаточно большим положительным параметром λ положим в формуле следа Сельберга (1.10) и в формуле следа (1.8) функцию h равной

$$h(t; x, \lambda) = 2e^{-t^2/4\pi\lambda^2} \int_{-\ln x}^{\ln x} e^{it\xi} \frac{\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}}{\xi}\, d\xi \tag{7.3}$$

Затем вычтем почленно полученные равенства. Это приводит к тождеству

$$\sum_{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln N(P)}{(N(P))^{n/2} - (N(P))^{-n/2}}\, g(n \ln N(P)) = 2\sum_{n=3}^{\infty} B(n)\, g(2\ln \varepsilon_n), \tag{7.4}$$

где

$$g(v) \equiv g(v; x, \lambda) = 2\lambda \int_{-\ln x}^{\ln x} e^{-\pi\lambda^2(v-\xi)^2} \frac{\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}}{\xi}\, d\xi. \tag{7.5}$$

Перейдем теперь к пределу $\lambda \to +\infty$ в (7.4). Для каждого фиксированного $v \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g(v; x, \lambda) = \begin{cases} \frac{2}{v}\operatorname{sh}\frac{v}{2}, & -\ln x < v < \ln x, \\ 0, & |v| > \ln x \end{cases} \tag{7.6}$$

Далее, поскольку для $v \geq 2\ln x$

$$0 < g(v; x, \lambda) \leq \lambda e^{-\pi\lambda^2 v^2} \tag{7.7}$$

ряды в обеих частях (7.4) сходятся равномерно по λ. Поэтому переход к пределу $\lambda \to \infty$ можно выполнить почленно. В правой части получаем сумму из правой части (7.2), а в левой возникает конечная сумма

$$\Lambda_G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{P \\ N(P) \leq x^{1/n}}} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\pi_G(x^{1/n}), \quad x \notin \mathcal{A} \tag{7.8}$$

что и доказывает (7.2).

Величины $B(n)$, в силу (5.9) и (5.25) определяются формулами (I.5).

Далее, обращение (7.8) дает

$$\pi_G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \Lambda_G(x^{1/m}) \qquad (7.9)$$

что следует из известного тождества для функции Мебиуса

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} \qquad (7.10)$$

Таким образом, для $x > 1$, $x \notin A$,

$$\pi_G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \sum_{\varepsilon_n \le x^{1/m}} \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_n^{-1}}{\ln \varepsilon_n} B(n) \qquad (7.11)$$

Отсюда утверждение теоремы 2 следует непосредственно, поскольку число $\nu_G(N)$ примитивных гиперболических классов с данным следом N равно $\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\pi_G(\varepsilon_N^2+\varepsilon) - \pi_G(\varepsilon_N^2-\varepsilon)\right)$.

7.2. Среднее значение $B(n)$

Чтобы получить теперь оценку $\pi_G(x)$ для $x \to +\infty$ достаточно оценить сумму

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{n \le x} B(n) \qquad (7.12)$$

Прежде всего заметим, что это среднее можно оценить независимо от формулы следа (I.8). Действительно, из определения $B(n)$, как вычета функции $\zeta(2s) L_n(s)$ в $s=1$ имеем для любого достаточно большого поло-

жительного Y

$$\frac{1}{\zeta(2)} B(n) = \frac{3}{Y} \sum_{c \le Y} \left(1 - \frac{c}{Y}\right)^2 A_n(c) - \frac{3}{i\pi} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{L_n(s) Y^{s-1}}{s(s+1)(s+2)} ds \qquad (7.13)$$

где $A_n(c)$ – число решений сравнения $x^2 + nx + 1 \equiv 0 \pmod{c}$

и

$$L_n(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{A_n(c)}{c^s}. \qquad (7.14)$$

Из формул (5.9) и (5.13),(5.14) следует, что на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$

$$|L_n(s)| \le d(n^2-4) \left| \frac{\zeta(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(1+2it)} \right| \left| L_n(\tfrac{1}{2}+it, \chi) \right| \qquad (7.15)$$

Далее, для фиксированного $c \ge 1$

$$\sum_{n \le X} A_n(c) = \sum_{\substack{1 \le d \le c \\ (d,c)=1}} \left(\frac{X}{c} + O(1)\right) = \frac{\varphi(c)}{c} X + O(c) \qquad (7.16)$$

где $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера. Так как

$$\sum_{c \le Y} \frac{\varphi(c)}{c} \left(1 - \frac{c}{Y}\right)^2 = \frac{Y}{3\zeta(2)} + O(1) \qquad (7.17)$$

то из (7.13) следует оценка

$$\left| X - \sum_{n \le X} B(n) \right| \ll Y + \frac{X}{Y} + \frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{n \le X} d(n^2-4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L_n(\frac{1}{2}+it, \chi)|}{1 + |t|^{5/2}} dt. \qquad (7.18)$$

После этого можно применить стандартную технику укороченных функциональных уравнений, причем рост по t здесь не играет роли. Таким путем можно надеяться на оценку $O\left(Y+\frac{X^{1+\varepsilon}}{\sqrt{Y}}\right)$ для правой части (7.18), что при $Y=X^{2/3}$ привело бы к оценке

$$\sum_{n\le X} B(n) = X + O(X^{2/3+\varepsilon}) \tag{7.19}$$

для любого $\varepsilon>0$.

Однако, более естественный метод заключается в использовании формулы следа (I.8), из которой следует

Лемма. При $X\to+\infty$

$$\sum_{n\le X} B(n) = X + O\left((X\ln X)^{1/2}\right) \tag{7.20}$$

Для получения оценки суммы в левой части следует выбрать в (I.8) функцию $g(v)$ в виде $g(v)=f(2\operatorname{ch}\frac{v}{2})$ где $f(\xi)$ для $\xi\le X$ близка к 1 и мала для $\xi>X$. Если $f(\xi)$ задана для $\xi\ge 2$, то

$$h(r) = 4\int_2^\infty \frac{\cos\left(2r\operatorname{arch}\frac{\xi}{2}\right)}{\sqrt{\xi^2-4}} f(\xi)\,d\xi \tag{7.21}$$

С помощью интегрирования по частям получаем отсюда, что если f имеет производные до третьего порядка и при $\xi\to+\infty$

$$\sum_{k=0}^{3} |f^{(k)}(\xi)| \ll \xi^{-6-\delta}, \quad \delta>0 \tag{7.22}$$

то $h(r)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Im} r|\le 1$ и $h(r)=O(|r|^{-3})$ при $|r|\to\infty$ в этой полосе. Таким образом, при этих условиях h удовлетворяет условиям теоремы 3; выделяя в правой части слагаемое с $j=0$ (для которого $\varkappa_0=\frac{i}{2}$) и выражая интеграл с h через f, получаем равенство

$$\sum_{n=3}^{\infty} f(n)B(n) = \int_2^\infty \left(\frac{\xi-2}{\xi+2}\right)^{1/2} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{6}\int_2^\infty \frac{f(\xi)-f(2)}{(\xi^2-4)^{3/2}}\,\xi\,d\xi +$$

$$+\frac{f(2)}{2}\ln\frac{2}{\pi} - \int_2^\infty\left(\frac{1}{4\xi}+\frac{4}{3}\,\frac{\xi}{4\xi^2-1}\right)\frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi^2-4}}\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} h(\varkappa_j) +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(r)\,h(r)\,dr, \tag{7.23}$$

где

$$\gamma(r) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/2+ir) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ir) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2ir) \tag{7.24}$$

Пусть X достаточно велико. Пусть положительное ε и целое положительное N взяты с условием

$$\sqrt{X}\le\varepsilon\le\sqrt{X}\ln X, \quad \ln X\le N\le 2\ln X \tag{7.25}$$

Положим

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_N(\varepsilon)\left(\varepsilon^2-(x-X)^2\right)^N, & |x-X|\le\varepsilon \\ 0, & |x-X|\ge\varepsilon \end{cases} \tag{7.26}$$

где постоянная $C_N(\varepsilon)=\dfrac{\Gamma(N+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon^{2N+1}N!}$ выбрана из условия

$$\int_{X-\varepsilon}^{X+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = 1. \tag{7.27}$$

Далее, пусть

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & 2\le x\le X, \\ 0, & x>X \end{cases} \tag{7.28}$$

Положим в тождестве (7.23)

$$f(x) = \varphi(x) - \int_2^x f_\varepsilon(\xi)\,d\xi \qquad (7.29)$$

Тогда $f(x) = 1$ для $x \le X - \varepsilon$, $f(x) = 0$ для $x \ge X + \varepsilon$ и $0 \le f(x) \le 1$ для всех $x \ge 2$. Поэтому при указанном выборе f для левой части (7.23) получаем неравенства

$$\sum_{3 \le n \le X-\varepsilon} B(n) \le \sum_{n=3}^{\infty} f(n)B(n) \le \sum_{3 \le n \le X+\varepsilon} B(n). \qquad (7.30)$$

Правая часть (7.23) при этом же выборе f равна

$$X + O(\varepsilon) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} h(x_j) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t)\,h(t)\,dt \qquad (7.31)$$

Покажем теперь, что для достаточно больших $|t|$ справедливо неравенство

$$|h(t)| \le \varepsilon\sqrt{N}\left(\frac{NX}{\varepsilon}\right)^N \frac{1}{|t|^{N+1}} \qquad (7.32)$$

Действительно,

$$h(t) = \frac{2}{t}\int_{X-\varepsilon}^{X+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\sin\left(2t\ln\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)dx \qquad (7.33)$$

Пусть $D = \sqrt{x^2-4}\,\frac{d}{dx}$. Поскольку $f_\varepsilon(x)$ вместе с производными до порядка $N-1$ включительно обращается в нуль при $x = X \pm \varepsilon$, то N-кратное интегрирование по частям дает

$$h(t) = \frac{2}{t}\left(\frac{1}{2t}\right)^N \int_{X-\varepsilon}^{X+\varepsilon} \sin\left(2t\ln\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} + \frac{N\pi}{2}\right)(D^N f_\varepsilon)(x)\,dx \qquad (7.34)$$

Дифференцирование проще всего выполнить с помощью формулы Коши. Полагая $x = 2\,\mathrm{ch}\,y$, имеем для многочлена $P_N(x) = (\varepsilon^2 - (x-X)^2)^N$

$$D^N P_N(x) = \left(\frac{d}{dy}\right)^N P_N(x(y)) = \frac{N!}{2\pi i}\int_{|x(y)-X|=2\varepsilon} \frac{P_N(x(y))\,dy}{(y-y(x))^{N+1}} \qquad (7.35)$$

Если $|x(y) - X| = 2\varepsilon$, то для $X - \varepsilon \le x \le X + \varepsilon$

$$|P_N(x(y))| \le (5\varepsilon^2)^N, \quad |y - y(x)| \ge \sqrt{2}\,\frac{\varepsilon}{X} \qquad (7.36)$$

Таким образом,

$$|D^N P_N(x)| \le (3\varepsilon X)^N N! \ll (2\varepsilon NX)^N \qquad (7.37)$$

с абсолютной постоянной в символе $\ll$. Так как $C_N(\varepsilon) \ll \sqrt{N}\,\varepsilon^{-2N-1}$, то для $X - \varepsilon \le x \le X + \varepsilon$

$$|(D^N f_\varepsilon)(x)| \ll \sqrt{N}\left(\frac{2NX}{\varepsilon}\right)^N. \qquad (7.38)$$

В силу (7.34) это доказывает (7.32). Вместе с этим, из (7.33) следует, что для всех $|t| > 0$

$$|h(t)| \le \frac{2}{|t|} \qquad (7.39)$$

Следовательно, для любого достаточно большого T

$$\left|\sum_{x_j \le T} h(x_j)\right| \ll \sum_{x_j \le T} \frac{1}{x_j} \ll T \qquad (7.40)$$

и

$$\left|\sum_{x_j > T} h(x_j)\right| \ll \varepsilon\sqrt{N}\left(\frac{NX}{\varepsilon T}\right)^N T^2 \sum_{x_j > T} \frac{1}{x_j^3} \ll \varepsilon\sqrt{N}\,T^2\left(\frac{NX}{\varepsilon T}\right)^N \qquad (7.41)$$

Учитывая еще, что

$$|\gamma(t)| \ll \ln(2 + |t|), \qquad (7.42)$$

получаем

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n)B(n) - X\right| \ll \varepsilon + T + \varepsilon\sqrt{N}\,T^2\left(\frac{NX}{\varepsilon T}\right)^N \qquad (7.43)$$

Для $T = 8\frac{NX}{\varepsilon}$; $\ln X \leq N \leq 2\ln X$ правая часть $\ll \varepsilon + \frac{NX}{\varepsilon}$, что есть $O(\sqrt{X}(\ln X)^{1/2})$ при $\varepsilon = \sqrt{NX}$.
Вместе с неравенствами (7.30) это доказывает утверждение леммы.

7.3. Доказательство теоремы I.

Пусть

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{n \leq x} B(n) \qquad (7.44)$$

В силу (7.2) имеем

$$\Lambda_G(x) = \sum_{3 \leq n \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)B(n) + O(\sqrt{x})$$

$$= \int_3^{\sqrt{x}} \frac{1}{\ln t}\, d\mathcal{B}(t) + O(\sqrt{x})$$

$$= \frac{2\sqrt{x}\,\mathcal{B}(\sqrt{x})}{\ln x} - \frac{4x}{\ln x} + \int_3^{\sqrt{x}} \frac{3\,dt}{\ln t} + O\left\{\sqrt{x} + \int_3^{\sqrt{x}} \frac{|\mathcal{B}(t) - t|}{\ln t}\,dt\right\}$$

(7.45)

Подставляя сюда оценку (7.20), получаем

$$\Lambda_G(x) = \int_3^{\sqrt{x}} \frac{t\,dt}{\ln t} + O\left(\frac{x^{3/4}}{\sqrt{\ln x}}\right)$$

$$= \int_2^{x} \frac{dt}{\ln t} + O\left(\frac{x^{3/4}}{\sqrt{\ln x}}\right) \qquad (7.46)$$

Следовательно, для $m \geq 2$

$$\Lambda_G(x^{1/m}) \ll \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

и так как в правой части (7.9) имеется $\ll \ln x$ слагаемых с $m \geq 2$ и $\mu(1) = 1$, то отсюда следует оценка (I.2).

Литература.

1. Selberg A., Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20, (1956), 47-87.

2. Венков А.Б., Калинин В.Л., Фаддеев Л.Д., Неарифметический вывод формулы следа Сельберга. Записки научных семинаров ЛОМИ, том 37 (1973), "Наука" (Ленинградское отделение), 5-42.

3. Кузнецов Н.В., Гипотеза Петерсона для форм веса нуль и гипотеза Линника, препринт № 2 ХабКНИИ, Хабаровск (1977).

4. Андрианов А.Н., Фоменко О.М., Распределение норм гиперболических элементов модулярной группы и числа классов неопределенных бинарных квадратичных форм, ДАН СССР, (1971), том 196, № 3, 743-745.

5. Hejhal D.A., The Selberg trace formula and the Riemann zeta function, Duke Math. Journal, 43 (1976), №3, 441-482.

6. Девенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, "Наука", М., (1971).

7. Фаддеев Л.Д., Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского, Труды Московского Матем. общества, т. 17

(1967), 323-350.

8. Cartier P., Some numerical computations relating to automorphic functions, Computers in numbers theory, Academic press, London and New York, (1971), p. 37-48.

9. Rankin R.A., Contributions to the theory of Ramanujan's functions $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, Proc. Cambridge Philos. Soc., 35 (1939), 357-372.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т.2, "Наука", М., (1966).

11. Gunning R., Lectures on modular forms, Annals of Math. Studies, № 48, Princeton press, (1962).

12. Selberg A., On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, Proc. of Symposia in Pure Math., vol. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, (1965), p. 1-15.

13. Титчмарш Е.К., Теория дзета-функции Римана, ИЛ, Москва, (1953).

14. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т.I, "Наука", М., (1965).

15. Ogg A. Modular forms and Dirichlet series, New York - Amsterdam, (1969).

16. Huber H., Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, II, Math. Ann. 142 (1961), 385-398 and Math. Ann. 143 (1961), 463-464.

Дальневосточный научный центр АН СССР.

Хабаровский комплексный научно-исследовательский институт.

Хабаровск, ул. Ким-Ю-Чена, 65.

Подписано к печати 6/I-1978 г. ВЛ 05004

ХабКНИИТ. Р-т. Зак. 151. Тир. 150 экз. Цена 10 коп.

Хабаровск, ул. Серышева, 47.