АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Дальневосточный научный центр
Хабаровский комплексный НИИ

ПРЕПРИНТ

Материалы
Дальневосточной
Математической
Школы

КУЗНЕЦОВ Н.В.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

Хабаровск, 1978.

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР АН СССР
ХАБАРОВСКИЙ КОМПЛЕКСНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт

Н.В.Кузнецов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

Хабаровск, 1978

УДК 5II.3+5I7.43+5I9.4

Для функции распределения точек дискретного спектра оператора Лапласа в пространстве автоморфных функций модулярной группы получена асимптотическая формула $N(\lambda) = c_0\lambda + c_1\sqrt{\lambda}\ln\lambda + c_2\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda})$, где c_0, c_1, c_2 – постоянные. Аналогичные формулы доказаны и для задач Неймана и Дирихле для оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы. Найденные асимптотические формулы дают первый пример существования второго члена в функции распределения собственных значений оператора Лапласа в задаче, не допускающей разделения переменных.

§ I. ВВЕДЕНИЕ.

Обозначим через H верхнюю полуплоскость комплексного переменного z, $z = x+iy,\ y>0$, и через G модулярную группу. G изоморфна $SL(2,\mathbb{Z})/\pm\{1\}$ и действует на H посредством дробно-линейных преобразований

$$z \to gz = \frac{az+b}{cz+d}\ . \qquad (I.I)$$

a, b, c, d – целые рациональные, $ad - bc = 1$.

Определенная на H функция $f(z)$ называется автоморфной функцией относительно группы G, или G-инвариантной, если для любого $g \in G$

$$f(gz) = f(z). \qquad (I.2)$$

Если, в дополнение к (I.2), f имеет интегрируемый квадрат модуля на фундаментальной области $\mathcal{D}$ модулярной группы,

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in H \,\middle|\, |z| > 1,\ -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2} \right\} \qquad (I.3)$$

по инвариантной мере $dz = y^{-2}dx\,dy$, то f называется параболической формой группы G веса нуль (или просто параболической формой, если нет опасности недоразумений).

В резком контрасте с классической теорией регулярных параболических форм целого веса пространство $\mathfrak{M}_0$ параболических форм веса нуль бесконечномерно. Единственным общим методом его исследования является расщепление на инвариантные подпространства оператора Лапласа L,

$$L = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \qquad (I.4)$$

инвариантного относительно сдвигов $z \to gz$. В основе метода лежит фундаментальная теорема о полноте системы собственных функций непрерывного и дискретного спектра оператора L [1]; успешность же конкретных применений зависит от степени детальности информации о собственных функциях и собственных значениях оператора L.

Собственной функцией непрерывного спектра оператора Лапласа является аналитическое продолжение на прямую $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ ряда Эйзенштейна-Мааса $E(z,s)$, определяемого для $\mathrm{Re}\, s > 1$ равенством

$$E(z,s) = \sum_{g \in G_\infty \backslash G} (\mathrm{Im}\, gz)^s$$

$$= y^s + \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \qquad (I.5)$$

Ряд Эйзенштейна-Мааса модулярной группы изучен весьма подробно [2] и в стандартных применениях связанные с его поведением вопросы не составляют проблем.

Этого нельзя сказать о собственных функциях дискретного спектра, хотя об их свойствах известно довольно много [3].

Обозначим собственные функции дискретного спектра $u_0(z), u_1(z), u_2(z), \ldots$, нумеруя их в порядке возрастания соответствующих собственных значений, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$

функция u_0 является константой, $u_0(z) = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$; все остальные разлагаются в ряды Фурье вида

$$u_j(z) = \sum_{n \ne 0} \rho_j(n)\, e^{2\pi i n x} \sqrt{y}\, K_{i\varkappa_j}(2\pi|n|y), \quad \varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - \tfrac{1}{4}}. \qquad (I.6)$$

Это разложение следует из периодичности $u_j(z)$ по x с периодом 1, дифференциального уравнения

$$L u_j = \lambda_j u_j \qquad (I.7)$$

и условия конечности интеграла от квадрата модуля собственной функции по фундаментальной области.

Разложение (I.6) сводит многие вопросы о поведении функций u_j к вопросам об их коэффициентах Фурье $\rho_j(n)$, или, что то же самое, к вопросам о поведении собственных значений перестановочного с оператором Лапласа кольца операторов Гекке T_n, действующих в пространстве автоморфных функций по правилу

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b \,(\mathrm{mod}\, d)} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \qquad (I.8)$$

Соответствие между спектром операторов T_n и коэффициентами Фурье собственных функций - такого же характера, как и в классической теории модулярных форм. Именно, систему $\{u_j\}$ можно выбрать так, чтобы каждая из функций $u_j(z)$ являлась собственной функцией всех операторов Гекке T_n с $n \ge 1$. При таком выборе для любого $j \ge 1$ $\rho_j(1) \ne 0$ и отношение $\rho_j(n)/\rho_j(1)$ является собственным значением дискретного спектра оператора T_n, которому отвечает собственная функция $u_j(z)$.

Это соответствие влечет ряд арифметических свойств коэффициентов Фурье $\rho_j(n)$ и, как показано в [3], предельную оценку

$$|\rho_j(n)| \le |\rho_j(1)|\, d(n). \qquad (I.9)$$

При этом, в силу эрмитовости T_n, числа $\rho_j(n)/\rho_j(1)$ вещественны. Поэтому можно считать, что $\rho_j(1)$ для каждого $j \geq 1$ либо положительное, либо чисто мнимое с положительной мнимой частью. Так как функция Макдональда $K_{ir}(y)$ чисто мнимого порядка ir вещественна для положительных y, это означает, что каждая из собственных функций $u_j(z)$ разлагается в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам.

В первом случае $u_j(z)$ является четной функцией x и, как заметил Р.Картье [4], является собственной функцией краевой задачи

$$Lu = \lambda u, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\dot{\mathfrak{D}}} = 0, \qquad (I.10)$$

а во втором случае - собственной функцией задачи

$$Lu = \lambda u, \quad u\big|_{\dot{\mathfrak{D}}} = 0; \qquad (I.11)$$

(здесь $\dot{\mathfrak{D}}$ - граница фундаментальной области $\mathfrak{D}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ - дифференцирование по внешней нормали).

Таким образом, имеется довольно ясная картина свойств собственных функций дискретного спектра *).

---

*) В частном разговоре Л.Д.Фаддеев сказал мне в августе 1977 г. "Я думал, что про собственные функции дискретного спектра вообще ничего нельзя сказать".

О самом дискретном спектре пока известно совсем немного. Первые собственные значения (I4 для задачи Неймана и I5 для задачи Дирихле) вычислены на ЭВМ Картье [4]. В частности, $\lambda_1 \approx 5{,}26$ и среди вычисленных собственных значений нет кратных. Для функции распределения собственных значений

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \le \lambda} 1 \qquad (I.12)$$

при $\lambda \to +\infty$ известна асимптотическая формула, аналогичная формуле Г.Вейля,

$$N(\lambda) = \frac{1}{12}\lambda + o(\lambda). \qquad (I.13)$$

Недавно Е.В.Гайдукову и мне удалось заметить [11], что в этой задаче справедлив аналог формулы Куранта, а именно, что при $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) = \frac{1}{12}\lambda + O(\sqrt{\lambda}\,\ln\lambda). \qquad (I.14)$$

Целью настоящей работы является уточнение этой формулы. К этому меня побудил вопрос А.Б.Венкова и последовавшее за ним стимулирующее обсуждение задачи. Дополнительным стимулом послужил разговор с В.Б.Лидским, в котором он высказал мнение о безнадежности попыток выделить второй регулярный член в формуле (I.13).

Формула (I.13) уточняется здесь следующим образом.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ - значения параметра λ, для которых существует $\mathfrak{G}$-инвариантное решение уравнения

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = \lambda u,$$

с интегрируемым квадратом модуля на фундаментальной области модулярной группы. Тогда при $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) = \frac{1}{12}\lambda - \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}\left\{\ln\lambda - 2 - \ln\frac{\pi}{3} + O\left(\left(\frac{\ln\ln\lambda}{\ln\lambda}\right)^{1/2}\right)\right\} \qquad (\text{I.15})$$

Асимптотическая формула (I.15) аналогична формулам для собственных значений краевой задачи с однородными краевыми условиями

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = \lambda u, \qquad (\text{I.16})$$

поставленной в компактной области $\mathcal{B}$ с кусочно-гладкой границей $\dot{\mathcal{B}}$.

Для функции распределения собственных значений $N_0(\lambda)$ этой задачи известна формула Куранта

$$N_0(\lambda) = \frac{mes\,\mathcal{B}}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}\ln\lambda). \qquad (\text{I.17})$$

В тех случаях, когда задача допускает разделение переменных, формулу Куранта можно уточнить, выделив второй степенной член [6-8]

$$N_0(\lambda) = \frac{mes\,\mathcal{B}}{4\pi}\lambda \pm \frac{mes\,\dot{\mathcal{B}}}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{1/3}), \qquad (\text{I.18})$$

где $mes\,\mathcal{B}$ и $mes\,\dot{\mathcal{B}}$ – площадь и периметр области $\mathcal{B}$, знак плюс берется при краевом условии $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\dot{\mathcal{B}}} = 0$, а знак минус – при условии $u\big|_{\dot{\mathcal{B}}} = 0$.

Сравнение этих формул с (I.15) показывает, прежде всего, что отмеченная аналогия является не вполне точной, поскольку в левой части (I.15) стоит сумма двух

разных функций распределения, а именно – общее число не превышающих λ собственных значений краевой задачи (I.10) и задачи (I.11). Поэтому аналогия была бы полнее, если бы второй член был выделен в каждой из этих функций распределения в отдельности. Это выделение действительно возможно; справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N^{(+)}(\lambda)$ и $N^{(-)}(\lambda)$ – функции распределения собственных значений оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы, которым отвечают четные и нечетные собственные функции соответственно. Тогда при $\lambda \to \infty$

$$N^{(+)}(\lambda) = \frac{1}{24}\lambda - \frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}\left\{3\ln\lambda - 6 - 4\ln\pi + \ln 2 + O\left(\left(\frac{\ln\ln\lambda}{\ln\lambda}\right)^{1/2}\right)\right\} \qquad (\text{I.19})$$

$$N^{(-)}(\lambda) = \frac{1}{24}\lambda - \frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}\left\{\ln\lambda - 2 + 3\ln 2 + O\left(\left(\frac{\ln\ln\lambda}{\ln\lambda}\right)^{1/2}\right)\right\} \qquad (\text{I.20})$$

По внешнему виду эти формулы аналогичны (I.18), но в действительности различий между формулами (I.19) – (I.20) и формулами (I.18) больше, чем сходства.

Прежде всего, коэффициент перед главным членом здесь вдвое меньше, нежели в аналогичной формуле Куранта (площадь фундаментальной области модулярной группы равна $\frac{\pi}{3}$). Таким образом, если рассматривать краевые задачи (I.10) и (I.11) как предельную форму соответствующих краевых задач с чисто дискретным спектром в компактной области $\mathcal{D}_Y = \{ z \in \mathcal{D} \mid y \le Y \}$, то при $Y \to +\infty$, грубо говоря, половина собственных значений задач в $\mathcal{D}_Y$ дает непрерывный спектр, а другая "половина" – дискретный спектр задач в $\mathcal{D}$ (расположенный на непрерывном).

Наличие членов с $\sqrt{\lambda}\ln\lambda$ в (I.19)-(I.20) связано с бесконечностью периметра фундаментальной области. Коэффициенты перед этими членами таковы, что для всех достаточно больших λ выполнено неравенство

$$N^{(+)}(\lambda) < N^{(-)}(\lambda)$$

хотя для задач с чисто дискретным спектром в компактной области $\mathcal{D}_Y$ из минимаксимального принципа вытекает противоположное неравенство. Таким образом, при $Y \to \infty$ в задаче с условием $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial \mathcal{D}_Y} = 0$ в непрерывный спектр переходит существенно большая доля собственных значений, чем в задаче с нулевым краевым условием; это объясняется четностью собственной функции непрерывного спектра – ряда Эйзенштейна (I.5).

Формулу (I.5) можно получить из формулы следа Сельберга, хотя здесь для этой цели используется более удобная формула следа из [5]. Для получения (I.19) и (I.20) необходимо расщепить формулу следа, т.е. вычислить суммы вида $\sum\limits_j^{(\pm)} \tilde{h}(\lambda_j)$, распространенные на собственные значения, которым отвечают собственные функции определенной четности.

Один метод вычисления таких сумм указал А.Б.Вен-

ков [10]; здесь дается другой способ, который приводит к более простому выражению в правой части расщепленной формулы следа.

Приведем явный вид формулы следа из [5] и ее расщепленной формы.

Пусть для целых $c \ge 1$ и целых $n \ge 0$ $A_n(c)$ (соотв. $a_n(c)$) обозначает число решений сравнения $x^2 + nx + 1 \equiv 0 \pmod c$ (соотв. $x^2 + nx - 1 \equiv 0 \pmod c$). Образуем ряды Дирихле

$$L_n^{(+)}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{A_n(c)}{c^s}, \qquad L_n^{(-)}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{a_n(c)}{c^s}. \tag{I.21}$$

С помощью явных формул для числа решений этих сравнений можно показать, что ряды $L_n^{(\pm)}(s)$ допускают мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного s [5]. В частности, $s=1$ является полюсом; положим

$$B(n) = \frac{\pi^2}{6} \operatorname{Res}_{s=1} L_n^{(+)}(s), \qquad b(n) = \frac{\pi^2}{6} \operatorname{Res}_{s=1} L_n^{(-)}(s). \tag{I.22}$$

Положим еще

$$\varepsilon_j = \begin{cases} +1, & u_j(z) \text{ четная} \\ -1, & u_j(z) \text{ нечетная} \end{cases} \tag{I.23}$$

С этими обозначениями справедливы следующие тождества.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $h(r)$ – четная функция комплексного переменного r, регулярная в полосе $|\operatorname{Im} r| \le \Delta$ с $\Delta > 3/4$ и при $|r| \to \infty$ в э т о й   п о л о с е $h(z) = O(|z|^{-2-\delta})$ д л я   н е к о т о р о г о   ф и к с и р о в а н н о г о $\delta > 0$. Т о г д а

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(x_j) = \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} z\, th(\pi z)\, h(z)\, dz + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+iz) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/2+iz) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right\} h(z)\, dz + \int_{-\infty}^{\infty}\left(1/8 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\, ch\frac{\pi z}{3}\right)\frac{h(z)}{ch(\pi z)}\, dz + \frac{1}{2} h(0) + 2\sum_{n=3}^{\infty} B(n)\, g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right), \tag{I.24}$$

г д е $x_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, и

$$g(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izv}\, h(z)\, dz. \tag{I.25}$$

ТЕОРЕМА 4. П у с т ь h у д о в л е т в о р я е т т е м   ж е   у с л о в и я м . Т о г д а

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j h(x_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\ln\pi + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+iz) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right\} h(z)\, dz + \frac{1}{2} h(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right). \tag{I.26}$$

Из формулы следа (I.24) и ее расщепленной формы (I.26) теоремы I и 2 довольно легко следуют; их доказательство проводится в § 2. Вывод расщепленной формулы следа (I.26), вполне аналогичный доказательству (I.24) в [5], дается в § 3-5.

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ.

Сначала получим формулу (I.15). При этом вместо $N(\lambda)$ удобнее оценивать сумму

$$S(x) = \sum_{x_j \le x} 1 = N\left(x^2 + \tfrac{1}{4}\right) \tag{2.1}$$

Пусть положительное x достаточно велико. С целью получить в левой части (I.24), величину, близкую к $S(x)$, положим функцию h равной

$$h(z;x) = C_{\alpha,\beta}\int_{-x}^{x}\frac{d\xi}{(ch\,\alpha(z-\xi))^{2\beta}} \tag{2.2}$$

где α и β - положительные параметры,

$$0 < \alpha < \frac{1}{\pi}, \qquad \beta \ge \ln x \tag{2.3}$$

а постоянная $C_{\alpha,\beta}$ равна

$$C_{\alpha,\beta} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{ch^{2\beta}\alpha\xi}\right)^{-1} = \frac{\alpha\,\Gamma(2\beta)}{2^{2\beta-1}\Gamma^2(\beta)} = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right). \tag{2.4}$$

Оценим слагаемые тождества (I.24) для указанной h.

ЛЕММА I. Д л я $0 \le z < x$

$$1 > h(z;x) > 1 - \frac{cth\,\alpha(x-z)}{\sqrt{\beta}\; ch^{2\beta}\alpha(x-z)} \tag{2.5}$$

а д л я $z > x$

$$\frac{cth\,\alpha(z-x)}{\sqrt{\beta}\; ch^{2\beta}\alpha(z-x)} > h(z;x) > 0 \tag{2.6}$$

Действительно, для $y > 0$

$$\int_{y}^{\infty}\frac{d\xi}{ch^{2\beta}\alpha\xi} = -\int_{y}^{\infty}\frac{1}{2\alpha\beta\; th(\alpha\xi)}\left(\frac{1}{ch^{2\beta}(\alpha\xi)}\right)' d\xi \le \frac{cth(\alpha y)}{2\alpha\beta\; ch^{2\beta}\alpha y} \tag{2.7}$$

и вместе с (2.4) это дает оценку снизу для $h(z;x)$

при $0 \le \tau < x$, так как

$$h(\tau; x) = 1 - C_{\alpha,\beta}\left(\int_{-\infty}^{-x} + \int_{x}^{\infty}\right) \frac{d\xi}{ch^{2\beta}\alpha(\tau-\xi)} \qquad (2.8)$$

Точно так же получается (2.6).

ЛЕММА 2. Для $v > 0$ и $\beta \ge 1$

$$|g(2v; x)| \le \frac{1}{v\sqrt{1+\frac{v^2}{\alpha^2\beta^2}}} e^{-\beta\varphi\left(\frac{v}{\alpha\beta}\right)}, \qquad (2.9)$$

где

$$\varphi(\xi) = 2\xi \operatorname{arctg}\xi - \ln(1+\xi^2) \qquad (2.10)$$

Действительно, имеем легко проверяемое равенство ([9], с.26)

$$g(2v; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau; x) e^{-2i\tau v} d\tau$$

$$= \frac{\sin(2xv)}{2\pi v} \frac{\Gamma\left(\beta+\frac{iv}{\alpha}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{iv}{\alpha}\right)}{\Gamma^2(\beta)}. \qquad (2.11)$$

С помощью первого выражения Бине для логарифма гамма-функции ([9],с.37) отношение гамма-функций можно записать в виде

$$\left(\frac{2\pi}{1+\frac{v^2}{\alpha^2\beta^2}}\right)^{1/2} \exp\left\{-\beta\varphi\left(\frac{v}{\alpha\beta}\right) + 2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{vx}{\alpha}\right)-1}{x} e^{-\beta x} dx\right\} \qquad (2.12)$$

что и дает неравенство (2.9).

ЛЕММА 3. Для $\alpha^2\beta \ge 4$, $0 < \alpha < \frac{1}{\pi}$

$$\left|\sum_{n=3}^{\infty} B(n)\, g(2v_n; x)\right| \ll \frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}} e^{\alpha^2\beta/4\left(1-\frac{\alpha^2}{8}\right)}, \quad v_n = \ln\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}. \qquad (2.13)$$

Действительно, модуль суммы слева не превосходит

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{B(n)}{v_n\sqrt{1+\frac{v_n^2}{\alpha^2\beta^2}}} e^{-\beta\varphi\left(\frac{v_n}{\alpha\beta}\right)} = \int_{v_3}^{\infty} \frac{e^{-\beta\varphi\left(\frac{v}{\alpha\beta}\right)}}{v\sqrt{1+\frac{v^2}{\alpha^2\beta^2}}}\, d\left(\sum_{n\le 2ch v} B(n)\right). \qquad (2.14)$$

Правая часть в силу оценки $\sum_{n\le x} B(n) = x + O(\sqrt{x\ln x})$ (см.[5]) не превосходит величины

$$\ll 1 + \int_{\frac{v_3}{\alpha\beta}}^{\infty} e^{-\beta(\varphi(\xi)-\alpha\xi)} \frac{d\xi}{\xi\sqrt{1+\xi^2}} \qquad (2.15)$$

К интегралу применим метод Лапласа. Функция $\varphi(\xi) - \alpha\xi$ имеет минимум при $\xi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, равный $2\ln\cos\frac{\alpha}{2} \ge -\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{8}}$, а модуль второй производной ограничен снизу 1 для $0 \le \xi \le 1$; отсюда (2.13) следует.

ЛЕММА 4. Для $\alpha^2\beta \ge 4$, $\alpha < \frac{1}{\pi}$

$$\int_0^{\infty} \tau\, th(\pi\tau)\, h(\tau; x)\, d\tau = \frac{x^2}{2} + O(1). \qquad (2.16)$$

Интеграл в левой части равен

$$\int_0^{\infty} \tau\, h(\tau; x)\, d\tau + O(1) = \frac{1}{2}C_{\alpha,\beta}\int_0^{\infty}\tau^2\left(\frac{1}{ch^{2\beta}\alpha(x-\tau)} - \frac{1}{ch^{2\beta}\alpha(x+\tau)}\right)d\tau + O(1)$$

$$= \frac{1}{2}C_{\alpha,\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2x\xi+\xi^2}{ch^{2\beta}\alpha\xi}\,d\xi + O\left(\frac{x^2}{\sqrt{\beta}}e^{-\alpha\beta x}+1\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{d^2}{dv^2}\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{iv}{\alpha}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{iv}{\alpha}\right)}{\Gamma^2(\beta)}\right)\Bigg|_{v=0} + O(1) \qquad (2.17)$$

и дифференцирование (2.12) дает нужную оценку.

ЛЕММА 5. Пусть

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+iz) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}+iz\right) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right\} +$$

$$+\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}}ch\frac{\pi z}{3}\right)\frac{1}{ch(\pi z)} \qquad (2.18)$$

Тогда для $\alpha^2\beta \geqslant 4$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau)\, h(\tau;x)\,d\tau = -\frac{2}{\pi} x \ln x + \frac{1}{\pi}\left(2+\ln\frac{\pi}{2}\right)x + O(\ln^2 x) \qquad (2.19)$$

Действительно, левая часть равна

$$\int_{-x}^{x} \gamma(\tau)\,d\tau + O(\ln^2 x), \qquad (2.20)$$

так как $\gamma(\tau) = O(\ln(2+|\tau|))$, для $-x+\ln x \leqslant \tau \leqslant x+\ln x$ имеем $h(\tau) = 1+O(\frac{1}{x})$, в интервалах $|\tau - x| \leqslant \ln x$ и $|\tau + x| \leqslant \ln x$ h не превосходит 1, а для $|\tau| \geqslant x+\ln x$ $|h|$ быстро убывает.

Далее,

$$\int_{-x}^{x} \gamma(\tau)\,d\tau = \frac{x}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\left\{\arg\Gamma(1+ix) + \arg\Gamma(\tfrac{1}{2}+ix) + \arg\zeta(1+2ix)\right\} + O(1) \qquad (2.21)$$

после чего (2.19) следует из разложения Стирлинга и оценки $\arg\zeta(1+2ix) = O(\ln x)$.

Оценим теперь $S(x) - S(x \pm x_0)$ для фиксированного $x_0 \geqslant 1$. Положим в полученных оценках $\beta = 40 \ln x$ $\alpha = \frac{2}{9}$. Тогда правая часть (1.24) для h, определенной равенством (2.2), равна

$$\frac{x^2}{12} - \frac{2}{\pi} x \ln x + O(x). \qquad (2.23)$$

В левой части для $0 < x_j \leqslant x - x_0$, $1 \leqslant x_0 \leqslant 2$, в силу неравенства

$$\ln ch\, \xi > \frac{\xi^2}{2}\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1/2 \qquad (2.24)$$

и оценки (2.5) имеем

$$1 > h(x_j;x) > 1 - \frac{1}{x^{3/2}} \qquad (2.25)$$

При $x + x_0 \leqslant x_j \leqslant 2x$ те же неравенства дают

$$h(x_j;x) < x^{-1/2} \qquad (2.26)$$

а вклад слагаемых с $x_j \geqslant 2x$, экспоненциально мал.

Так как для всех $\tau \geqslant 0$ $0 < h(\tau;x) < 1$, то левая часть (1.24) с h из (2.2) заключена в границах

$$S(x-x_0) + O(\sqrt{x}) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j;x) \leqslant S(x+x_0) + O(\sqrt{x}) \qquad (2.27)$$

Вместе с (2.23) это означает, что для фиксированного x_0, $1 \leqslant x_0 \leqslant 2$,

$$S(x+x_0) - S(x-x_0) = O(x) \qquad (2.28)$$

и одновременно дает оценку

$$S(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{\pi} x \ln x + O(x). \qquad (2.29)$$

После этого сумму в левой части можно оценить точнее. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Так как число чисел x_j с условием $x-1 \leqslant x_j \leqslant x-\varepsilon$ не превосходит $S(x-1) - S(x) \leqslant x$, то, в силу (2.5)

$$\sum_{x-1 \leqslant x_j \leqslant x-\varepsilon} h(x_j;x) = \sum_{x-1 \leqslant x_j \leqslant x-\varepsilon} 1 + O(x)\frac{e^{-T}}{\sqrt{T}}, \quad T = \beta\alpha^2\varepsilon^2, \qquad (2.30)$$

Аналогично,

$$\sum_{x+\varepsilon \leqslant x_j \leqslant x+1} h(x_j,x) = O(x)\frac{e^{-T}}{\sqrt{T}}, \quad T = \beta\alpha^2\varepsilon^2. \qquad (2.31)$$

Таким образом, вместо (2.27) имеем неравенства

$$S(x-\varepsilon) - \vartheta_1 x \frac{e^{-T}}{\sqrt{T}} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j;x) \leqslant S(x+\varepsilon) + \vartheta_2 x \frac{e^{-T}}{\sqrt{T}}, \qquad (2.32)$$

где A_1, A_2 — абсолютные постоянные. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(x_j; x-\varepsilon) - 2A_2 x \frac{e^{-T}}{\sqrt{T}} \leq S(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j; x+\varepsilon) + 2A_1 x \frac{e^{-T}}{\sqrt{T}}. \quad (2.33)$$

Поскольку для выбранных значений параметров

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(h(x_j, x+\varepsilon) - h(x_j, x-\varepsilon)\right) \leq \varepsilon x + \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \qquad (2.34)$$

то для любого ε с условием $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$S(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2}{\pi} x \ln x + \frac{2 + \ln\frac{\pi}{2}}{\pi} x + O(x)\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}} + \varepsilon + \frac{e^{-\varepsilon^2 \ln x}}{\varepsilon\sqrt{\ln x}}\right) \quad (2.35)$$

Выбирая здесь $\varepsilon = \sqrt{\frac{\ln \ln x}{\ln x}}$ и заменяя затем x на $\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$, получаем асимптотическую формулу (I.I5).

Формулы теоремы 2 следуют из тех же самых оценок, поскольку для сумм, распространенных по собственным значениям, которым отвечают четные и нечетные собственные функции, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}^{(+)} h(x_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1+\varepsilon_j}{2} h(x_j) = \frac{1}{24} \int_{-\infty}^{\infty} r \, th(\pi r) \, h(r) \, dr +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ln \pi - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/2 + ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2ir) \right\} h(r) dr +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}} ch \frac{\pi r}{3}\right) \frac{h(r)}{ch(\pi r)} dr + \frac{1}{2} h(0) +$$

$$+ \sum_{n=3} B(n) \, g\left(2 \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \, g\left(2 \ln \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right), \qquad (2.36)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}^{(-)} h(x_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon_j}{2} h(x_j) = \frac{1}{24} \int_{-\infty}^{\infty} r \, th(\pi r) \, h(r) \, dr -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/2 + ir)\right) h(r) dr + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}} ch \frac{\pi r}{3}\right) \frac{h(r)}{ch(\pi r)} dr +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} B(n) \, g\left(2 \ln \frac{n + \sqrt{n^2-4}}{2}\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \, g\left(2 \ln \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right). \qquad (2.37)$$

Для среднего значения величин $b(n)$ справедлива такая же оценка, что и для величин $B(n)$ (см. § 5),

$$\sum_{n \leq x} b(n) = x + O\left(\sqrt{x \ln x}\right) \qquad (2.38)$$

Поскольку вклад гиперболических элементов в правую часть формулы следа оценивался тривиально, то для определенной равенством (2.2) функции h, как и раньше, получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}^{(+)} h(x_j) = \frac{x^2}{24} - \frac{3}{2\pi}(x \ln x - x) + \frac{\ln \pi - \frac{1}{4}\ln 2}{\pi} x + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) \quad (2.39)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}^{(-)} h(x_j) = \frac{x^2}{24} - \frac{1}{2\pi}(x \ln x - x) - \frac{3 \ln 2}{4\pi} x + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right) \quad (2.40)$$

Отсюда формулы (I.I9) и (I.20) получаются точно тем же способом, как и формула (I.I5)

§ 3. РАСЩЕПЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ СЛЕДА. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ.

Расщепленную формулу следа сначала получим для частного случая, в котором, с фиксированными параметрами t и α в качестве h взята функция

$$H(r; t, \alpha) = ch(\pi r) \Gamma\left(\tfrac{\alpha}{2} + it + ir\right) \Gamma\left(\tfrac{\alpha}{2} + it - ir\right) \Gamma\left(\tfrac{\alpha}{2} - it + ir\right) \Gamma\left(\tfrac{\alpha}{2} - it - ir\right) \quad (3.\ldots)$$

которая, как далее будет видно, возникает, так сказать, сама собой.

ТЕОРЕМА. Пусть t вещественно, а параметр α взят с условием $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} H(\varkappa_j; t, \alpha) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz)+\frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right)H(z;t,\alpha)\,dz +$$
$$+\frac{1}{4}\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it\right)\left\{\ln 2+2\ln\pi-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{2}-it\right)\right\}+\frac{1}{4}H(0;t,\alpha)+$$
$$+\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it\right)\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,F\left(\frac{\alpha}{2}+it, \frac{\alpha}{2}-it; \frac{1}{2}; -\frac{n^2}{4}\right), \tag{3.2}$$

где F обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса, а остальные обозначения – как в теореме 4.

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathcal{D}} U_n(z, s_1)\,U_m(z, s_2)\,dz, \quad n, m \geq 1, \tag{3.3}$$

в котором $U_n(z, s)$ – вещественно-аналитический ряд Пуанкаре, определяемый для $\mathrm{Re}\,s > 1$ равенством

$$U_n(z,s) = \sum_{g \in G_\infty \setminus G} e^{2\pi i n g z}\,(\mathrm{Im}\, g z)^s . \tag{3.4}$$

Каждый из рядов $U_n(z,s)$ с $n \geq 1$, $\mathrm{Re}\,s > 1$ является автоморфной функцией модулярной группы. Поэтому интеграл (3.3) равен

$$\int_0^{\infty}\int_{-1/2}^{1/2} U_n(z, s_1)\, e^{2\pi i m \bar z}\, y^{s_2-2}\,dx\,dy . \tag{3.5}$$

Таким образом, этот интеграл выражается через m-ый коэффициент Фурье ряда $U_n(z, s_1)$. Коэффициенты Фурье вычислены в [3], § 2; это дает для интеграла (3.3) для $\mathrm{Re}\, s_1, \mathrm{Re}\, s_2 > 1$ выражение

$$8\pi\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^{s_2-s_1}\frac{\Gamma(s_1+s_2-1)}{2^{s_1+s_2}\,\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(n,-m;c)}{c^{s_1+s_2}}\,K_{s_1-s_2}\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right), \tag{3.6}$$

где S – сумма Клоостермана,

$$S(n,-m;c) = \sum_{\substack{1 \leq d < |c|,\\ (d,c)=1,\ ad \equiv 1 (\mathrm{mod}\, c)}} e^{2\pi i\left(\frac{nd}{c}-\frac{ma}{c}\right)} \tag{3.7}$$

и $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда порядка ν.

С другой стороны, коэффициенты Фурье ряда U_n по собственным функциям оператора Лапласа вычисляются в явной форме через Γ-функции и n-ый коэффициент Фурье собственной функции (см. [12] или [3], § 4). Это приводит для того же интеграла к другому выражению

$$\frac{\pi\sqrt{nm}}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}(4\pi)^{1-s_1-s_2}\,n^{-s_1}m^{-s_2}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j(n)\,\rho_j(m)\,\Lambda(\varkappa_j; s_1, s_2)+\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}(nm)^{-iz}\,\sigma_{2iz}(n)\,\sigma_{2iz}(m)\,\frac{\Lambda(z; s_1, s_2)}{|\zeta(1+2iz)\,\Gamma(1/2+iz)|^2}\,dz\right\} \tag{3.8}$$

где $\rho_j(n)$ определяются разложением (1.6) и

$$\Lambda(z; s_1, s_2) = \Gamma\left(s_1-\tfrac{1}{2}+iz\right)\Gamma\left(s_1-\tfrac{1}{2}-iz\right)\Gamma\left(s_2-\tfrac{1}{2}+iz\right)\Gamma\left(s_2-\tfrac{1}{2}-iz\right). \tag{3.9}$$

Здесь следует отметить, что в формуле (4.72) работы [3] и, как следствие, в формуле (4.75) из [3], имеется досадная описка – в знаменателе в интегралах по непрерывному спектру в этих формулах пропущен знак модуля (вместо $\Gamma^2(1/2+i\tau)\,\zeta^2(1+2i\tau)$ должен стоять модуль этой функции).

Положим в равенствах (3.6) и (3.8)

$$s_1+s_2 = 1+\alpha, \quad s_1-s_2 = 2it, \tag{3.10}$$

где t вещественно, $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$. Это дает для всех целых $n, m \geq 1$ тождество

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(n)\rho_j(m)}{ch(\pi\varkappa_j)} H(\varkappa_j;t,\alpha) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (nm)^{-i\tau}\sigma_{2i\tau}(n)\sigma_{2i\tau}(m)\frac{H(\tau;t,\alpha)}{|\zeta(1+2i\tau)|^2}d\tau =$$

$$= 2^{2-\alpha}\,\Gamma(\alpha)\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(n,-m;c)}{c}\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right)^{\alpha} K_{2it}\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right), \tag{3.11}$$

где H определена равенством (3.3).

Ранее уже отмечалось, что для каждого $j \geq 1$ величины $\rho_j(n)/\rho_j(1)$, $n \geq 1$, вещественны. Кроме того, $\rho_j(1)$ можно считать положительным, если соответствующая собственная функция является четной и чисто мнимым, если собственная функция нечетная. Следовательно, для всех $j \geq 1$, $n \geq 1$

$$\rho_j^2(n) = \varepsilon_j\,|\rho_j(n)|^2 \tag{3.12}$$

Положим теперь $n = m$ в (3.11) и, разделив обе части полученного равенства на n^s с $\mathrm{Re}\,s > 1$, просуммируем по всем $n \geq 1$. В левой части, точно так же, как в [5], § 6, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j\,\mathcal{R}_j(s)\frac{H(\varkappa_j;t,\alpha)}{ch(\pi\varkappa_j)} + \frac{\zeta^2(s)}{\pi\,\zeta(2s)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(s+2i\tau)\zeta(s-2i\tau)}{|\zeta(1+2i\tau)|^2}H(\tau;t,\alpha)d\tau \tag{3.13}$$

где $\mathcal{R}_j(s)$ – ряд Ранкина j-ой собственной функции,

$$\mathcal{R}_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\rho_j(n)|^2}{n^s}. \tag{3.14}$$

Как показано в [5], § 6, функция (3.13) мероморфна в некоторой окрестности $s = 1$ и первые два члена ее Лорановского разложения по степеням $s-1$ имеют вид

$$\frac{1}{(s-1)^2}\cdot\frac{1}{\pi\zeta(2)}\int_{-\infty}^{\infty}H(\tau;t,\alpha)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{\zeta(2)}\left\{2\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j H(\varkappa_j;t,\alpha) - \frac{1}{2}H(0;t,\alpha) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\gamma - 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2i\tau) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2i\tau)\right)H(\tau;t,\alpha)\,d\tau\right\} \tag{3.15}$$

где γ – постоянная Эйлера.

При вычислении этих членов в просуммированной правой части (3.11) будем следовать схеме, изложенной в [5], § 5. Временно предположим, что вещественная часть параметра α велика, скажем $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 3$; затем это ограничение снимается с помощью принципа аналитического продолжения, поскольку ряд в левой части (3.2) определяет мероморфную функцию α во всей плоскости, а ряд в правой части определяет регулярную функцию в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$.

Положим

$$\varphi(x) = x^{\alpha} K_{2it}(x) \tag{3.16}$$

и пусть для $\mathrm{Re}\,s > \frac{3}{2}$

$$Z_\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} S(n,-n;c)\, \varphi\left(\frac{4\pi n}{c}\right). \qquad (3.17)$$

Этот ряд сходится абсолютно и изменение порядка суммирования дает для него представление

$$Z_\varphi(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{1+s}} \sum_{m=1}^{c} S(m,-m;c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(4\pi\left(n+\frac{m}{c}\right)\right)}{\left(n+\frac{m}{c}\right)^s} \qquad (3.18)$$

Внутренняя сумма здесь при $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 3$ и $\mathrm{Re}\, s < 2$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. Учитывая, что

$$\sum_{m=1}^{c} S(m,-m;c)\, e^{\pm 2\pi i n m/c} = c\, a_n(c), \qquad (3.19)$$

получаем

$$Z_\varphi(s) = L_0^{(-)}(s)\, \varphi_0(s) + 2\sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(-)}(s)\, \varphi_n(s), \qquad (3.20)$$

где ряды Дирихле $L_n^{(-)}(s)$ определяются равенствами (I.2I), а

$$\varphi_n(s) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(4\pi x)}{x^s} \cos(2\pi n x)\, dx. \qquad (3.21)$$

Ряды Дирихле $L_n^{(-)}(s)$ с $n \geq 1$ имеют в $s=1$ простой полюс [5], а для ряда $L_0^{(-)}(s)$ имеем

$$L_0^{(-)}(s) = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \frac{4}{8^s\left(1-\frac{1}{2^s}\right)}\right) \prod_{p>2} \frac{1+1/p^s}{1-1/p^s}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{2}{4^s}\right) \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}. \qquad (3.22)$$

Таким образом, слагаемое с $n=0$ дает в (3.20) полюс второго порядка в $s=1$; в силу известных формул для преобразования Меллина модифицированной функции Бесселя получаем

$$L_0^{(-)}(s)\varphi_0(s) = (2\pi)^{s-1} 2^{\alpha-2}\, \Gamma\left(\frac{\alpha+1-s}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1-s}{2}-it\right)\left(1-\frac{1}{2^s}+\frac{2}{4^s}\right)\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} \qquad (3.23)$$

Отсюда при $s \to 1$ немедленно следует, что первые два члена разложения в ряд Лорана имеют вид

$$L_0^{(-)}(s)\varphi_0(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \cdot \frac{2^{\alpha-2}}{\zeta(2)} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it\right) +$$

$$+ \frac{1}{s-1} \cdot \frac{2^{\alpha-2}}{\zeta(2)} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it\right)\left\{\frac{\ln 2}{2} + \ln\pi + 2\gamma - 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{2}+it\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{2}-it\right)\right\} + O(1), \quad s \to 1. \qquad (3.24)$$

Разложения всех остальных слагаемых в (3.20) начинаются с $(s-1)^{-1}$ и коэффициент при $(s-1)^{-1}$ равен

$$\frac{2}{\zeta(2)} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, \varphi_n(1). \qquad (3.25)$$

Коэффициенты $\varphi_n(s)$ выражаются через гипергеометрическую функцию ([I3], с.6I–63); это приводит к следующим первым членам разложения в ряд Лорана просуммированной правой части (3.II)

$$\frac{1}{(s-1)^2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\zeta(2)} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it\right) + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\zeta(2)} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it\right)\left\{\frac{\ln 2}{2} +\right.$$

$$+ \ln\pi + 2\gamma - 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{2}+it\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{2}-it\right) +$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, F\left(\frac{\alpha}{2}+it,\ \frac{\alpha}{2}-it;\ \frac{1}{2};\ -\frac{n^2}{4}\right)\right\} \qquad (3.26)$$

причем ряд сходится абсолютно для любого α с условием $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$. Теперь сравнение коэффициентов перед $(s-1)^{-2}$ здесь и в (3.I5) дает значение интеграла, аналогичного интегралу в лемме Бернса,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it+ir\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it-ir\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it+ir\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it-ir\right) \operatorname{ch}(\pi r)\, dr =$$

$$= \pi\, \Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-it\right), \qquad (3.27)$$

после чего сравнение коэффициентов перед $(s-1)^{-1}$ дает (3.2).

§ 4. РАСЩЕПЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ СЛЕДА. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ.

Частный случай расщепленной формулы следа (3.2) является ведущим, так как для любой четной функции $h(z)$, регулярной в полосе $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$ и удовлетворяющей при $|z| \to \infty$, $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$, условию $h(z) = O(|z|^{-2-\delta})$ с некоторым фиксированным $\delta > 0$, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} H(z;t,1)\left\{h(t+\tfrac{i}{2}) + h(t-\tfrac{i}{2})\right\} ch(\pi t)\, dt = h(z), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Действительно, в силу функционального уравнения для гамма-функции

$$H(z;t,1) = \frac{\pi^2\, ch(\pi z)}{ch(\pi z + \pi t)\, ch(\pi z - \pi t)}. \tag{4.2}$$

Поэтому интеграл в левой части (4.1) равен

$$\frac{1}{2i\pi^2}\left(\int_{-\frac{i}{2}-\infty}^{-\frac{i}{2}+\infty} + \int_{\frac{i}{2}+\infty}^{\frac{i}{2}-\infty}\right) h(t)\, \frac{sh(\pi t)\, ch(\pi z)}{sh(\pi t + \pi z)\, sh(\pi t - \pi z)}\, dz$$

т.е., по теореме о вычетах, $\frac{1}{2}\left(h(z) + h(-z)\right) = h(z)$.

Правда, просто положить $\alpha = 1$ в равенстве (3.2) нельзя, поскольку ряд в правой части при $\alpha = 1$ может оказаться расходящимся (во всяком случае, он не сходится абсолютно при $\alpha = 1$). Поэтому сначала для фиксированного $\alpha > 1$ умножим обе части (3.2) на функцию

$$\Phi(t) = \frac{ch(\pi t)}{2\pi^2}\left\{h(t+\tfrac{i}{2}) + h(t-\tfrac{i}{2})\right\}, \tag{4.3}$$

проинтегрируем полученное равенство по t от $-\infty$ до $+\infty$ и лишь затем выполним предельный переход $\alpha \to 1+0$.

Вычисления начнем с левой части (3.2).

ЛЕММА I.

$$\lim_{\alpha \to 1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j H(\varkappa_j; t, \alpha)\right\} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j h(\varkappa_j). \tag{4.4}$$

В силу равенства (4.1) достаточно проверить, что интегрирование и последующий предельный переход можно выполнить почленно.

Из разложения Стирлинга и условия на порядок убывания $|h|$ имеем при $t \to \pm\infty$

$$|\Phi(t) H(z;t,\alpha)| \ll |t|^{-2-\delta}(1+|t+z|)^{\alpha-1}(1+|t-z|)^{\alpha-1} e^{-\pi\left||t|-|z|\right|}. \tag{4.5}$$

Отсюда следует, во-первых, что для $1 \le \alpha \le 1+\frac{\delta}{4}$ ряд в левой части (3.2) сходится равномерно по t ; во-вторых, ряд из интегралов сходится равномерно по α. Поэтому допустимо почленное интегрирование и почленный предельный переход.

ЛЕММА 2.

$$\lim_{\alpha \to 1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right) H(z;t,\alpha)\, dz\right\} dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right) h(z)\, dz. \tag{4.6}$$

Здесь возможность почленного интегрирования и почленного перехода вытекает из тех же оценок и неравенства

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(1+iz)\right| \ll \ln(2+|z|), \quad z \in \mathbb{R},\ |z| \ge 1 \tag{4.7}$$

ЛЕММА 3.

$$\lim_{\alpha\to 1}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}+it)\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}-it)\,\Phi(t)\,dt = 2\,g(0), \quad (4.8)$$

где $g(v)$ определяется по h интегралом (I.25).

Это очевидно.

ЛЕММА 4.

$$\lim_{\alpha\to 1}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}+it)\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}-it)\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{\alpha}{2}+it)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{\alpha}{2}-it)\right\}\Phi(t)\,dt =$$

$$= -h(0) + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)\,h(r)\,dr. \quad (4.9)$$

Так же, как и выше, проверяется возможность почленного перехода к пределу. Это дает в левой части интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}+it)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}-it)\right)\left\{h(t+\tfrac{i}{2})+h(t-\tfrac{i}{2})\right\}dt. \quad (4.10)$$

Затем в интеграле с $h(t+\frac{i}{2})$ заменим путь интегрирования прямой $\operatorname{Im} t = -\frac{1}{2}$, обходя полюс по малой полуокружности сверху, а в интеграле с $h(t-\frac{i}{2})$ сместим путь интегрирования на прямую $\operatorname{Im} t = +\frac{1}{2}$, обходя полюс по малой полуокружности снизу. После этого равенство (4.9) вытекает из четности $h(t)$ и функционального уравнения

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\frac{1}{z}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+z). \quad (4.11)$$

Для дальнейших вычислений потребуются некоторые факты теории гипергеометрической функции. Прежде всего, из интеграла Бернса ([9], с.74-75) вытекает равенство

$$\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}+it)\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}-it)\,F(\tfrac{\alpha}{2}+it,\tfrac{\alpha}{2}-it;\tfrac{1}{2};-x) = \quad (4.12)$$

$$= W(t;x,\alpha) + W(-t;x,\alpha),$$

где

$$W(t;x,\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-2it)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+it)}{x^{\alpha/2+it}\,\Gamma(\frac{1-\alpha}{2}-it)}\,F(\tfrac{\alpha}{2}+it,\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{1}{2}+it;1+2it;-\tfrac{1}{x}). \quad (4.13)$$

Далее, для $0<\alpha<2$ и $x>0$ имеем основное интегральное представление Гаусса ([9], с.72).

$$F(\tfrac{\alpha}{2}+it,\tfrac{1+\alpha}{2}+it;1+2it;-\tfrac{1}{x}) =$$

$$= \frac{\Gamma(1+2it)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+it)\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}+it)}\int_0^1\frac{\xi^{\frac{\alpha}{2}+it-1}(1-\xi)^{-\frac{\alpha}{2}+it}}{(1+\frac{\xi}{x})^{1/2+\alpha/2+it}}\,d\xi \quad (4.14)$$

Наконец, при $\alpha=1$ эта гипергеометрическая функция сводится к элементарной ([9], с.110),

$$F(\tfrac{1}{2}+it;1+it;1+2it;-\tfrac{1}{x}) = \frac{x^{1/2+it}}{\sqrt{1+x}}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{2}\right)^{-2it}, \quad x>0. \quad (4.15)$$

Отметим еще, что для любого $x \geqslant x_0 > 0$ с фиксированным x_0 интеграл в (4.14) оценивается величиной $O(|t|^{-1/2})$ при $|t|\to\infty$, $|\operatorname{Im} t|\leqslant\varepsilon$, если $2>\alpha>1$ и $\varepsilon < 1-\frac{\alpha}{2}$. Поэтому при тех же условиях

$$|W(\pm t;x,\alpha)| \ll |x^{-\frac{\alpha}{2}\pm it}|\cdot|t|^{\alpha}e^{-\pi|t|}. \quad (4.16)$$

ЛЕММА 5.

$$\lim_{\alpha\to 1}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}+it)\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}-it)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b(n)\,F(\tfrac{\alpha}{2}+it,\tfrac{\alpha}{2}-it;\tfrac{1}{2};-\tfrac{n^2}{4})\right\}\Phi(t)\,dt =$$

$$= -A\,h(\tfrac{i}{2}) + 2\sum_{n=1}^{\infty}b(n)\,g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right), \quad (4.17)$$

где

$$A = \lim_{\alpha \to 1} (\alpha - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^{\alpha}} \qquad (4.18)$$

Прежде всего, изменим порядок суммирования и интегрирования, что законно в силу оценки (4.16), если величина $\alpha - 1$ достаточно мала. Затем в каждом из полученных интегралов воспользуемся представлением (4.12) ($c\ x = \frac{n^2}{4} \geqslant \frac{1}{4}$). Фиксируем настолько малое положительное число ε, $\varepsilon < 1/2$, что функция $h(t)$ регулярна в полосе $|\mathrm{Im}\, t| \leqslant 1/2 + \varepsilon$. Затем в интегралах с $W(\pm t; x, \alpha)$ заменим путь интегрирования прямыми $\mathrm{Im}\, t = \mp \varepsilon$. Это дает представление

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(W(t; x, \alpha) + W(-t; x, \alpha)\big)\, \Phi(t)\, dt = w^{(+)}(x,\alpha) + w^{(-)}(x,\alpha) +$$

$$+ \frac{x^{-\alpha/2}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}\, h(\tfrac{i}{2})\, F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}; 1; -\frac{1}{x}\right) \qquad (4.19)$$

где

$$w^{(\pm)}(x,\alpha) = \int_{\mathrm{Im}\, t = \mp\varepsilon} W(\pm t; x, \alpha)\, \Phi(t)\, dt \qquad (4.20)$$

а слагаемое с $h(\frac{i}{2})$ появляется вследствие полюса в $t = 0$ у функций $W(\pm t, x, \alpha)$.

В силу (4.16) справедлива оценка

$$|w^{(\pm)}(x,\alpha)| \leqslant x^{-\frac{\alpha}{2} - \varepsilon} \int_{\mathrm{Im}\, t = \mp\varepsilon} |t|^{\alpha - 2 - \delta}\, dt \qquad (4.21)$$

где интеграл сходится, если α достаточно близко к 1 ($\alpha > 1$). Эта оценка означает, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, w^{(\pm)}\left(\frac{n^2}{4}, \alpha\right)$$

сходятся равномерно по α в достаточно малой правой полуокрестности точки $\alpha = 1$. Поэтому в каждом из этих рядов предельный перехсд $\alpha \to 1$ можно выполнить почленно. Далее, в силу (4.13) и (4.15),

$$w^{(+)}(x,1) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathrm{Im}\, t = -\varepsilon} \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(-2it)\, \Gamma(\frac{1}{2} + it)}{\Gamma(-it)\, \sqrt{x+1}} \cdot \frac{h(t + \frac{i}{2}) + h(t - \frac{i}{2})}{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}{2}\right)^{2it}}\, \mathrm{ch}(\pi t)\, dt. \qquad (4.22)$$

Используя формулу удвоения для гамма-функций, получаем отсюда

$$w^{(+)}(x,1) = \frac{1}{4\pi\sqrt{x+1}} \int_{\mathrm{Im}\, t = -\varepsilon} (\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^{-2it} \{h(t + \tfrac{i}{2}) + h(t - \tfrac{i}{2})\}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^{-2it}\, h(t)\, dt$$

$$= g\big(2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})\big). \qquad (4.23)$$

Точно так же,

$$w^{(-)}(x,1) = g\big(2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})\big), \qquad (4.24)$$

что приводит к удвоенной сумме в (4.17).

Теперь осталось вычислить предел при $\alpha \to 1$ выражения

$$\frac{2^{\alpha}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{1-\alpha}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^{\alpha}}\, F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}; 1; -\frac{4}{n^2}\right) \qquad (4.25)$$

Этот предел существует, поскольку существуют пределы всех остальных слагаемых в проинтегрированном тождестве (3.2). Так как для $n \geqslant 3$ и $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}; 1; -\frac{4}{n^2}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (4.26)$$

$$\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{\alpha-1} + O(1), \qquad (4.27)$$

то этот предел равен

$$-A = -\lim_{\alpha\to 1}(\alpha-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^{\alpha}} \qquad (4.28)$$

Из лемм I-5 этого параграфа, с учетом равенства $\varkappa_0 = \frac{i}{2}$, теперь непосредственно следует расщепленная формула следа

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j h(\varkappa_j) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+iz) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right\}h(z)dz +$$
$$+\left(\ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2\right)g(0) + \frac{1}{2}h(0) + (1-A)\,h\left(\frac{i}{2}\right) +$$
$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right), \qquad (4.29)$$

которая отличается от (I.26) наличием дополнительного слагаемого $(1-A)\,h(\frac{i}{2})$ в правой части. Постоянная A, как это видно из ее определения (4.I8), может быть вычислена, если известно среднее значение величин $b(n)$. Это среднее, как доказано в следующем § 5; дается такой же асимптотической формулой, как и среднее величин $B(n)$; именно, имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть для целых $n \geq 1$ величины $b(n)$ определены равенством (I.22). Тогда при $x \to \infty$

$$\sum_{1\leq n\leq x} b(n) = x + O\left(\sqrt{x\ln x}\right) \qquad (4.30)$$

Таким образом, постоянная A в (4.29) равна 1 и поэтому равенства (4.29) и (I.26) совпадают.

§ 5. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫЧЕТОВ РЯДОВ $L_n^{(-)}(s)$ В $s = 1$.

5.I. Оценка остаточного члена.

Пусть в (4.29) функция g задана в виде $g(v) = f(2\,\mathrm{sh}\frac{v}{2})$, где четная функция f такова, что соответствующая h,

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izv} f\left(2\,\mathrm{sh}\frac{v}{2}\right)dv$$
$$= 4\int_0^{\infty}\cos\left(2z\ln\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+4}}{2}\right)f(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+4}}, \qquad (5.I)$$

удовлетворяет условиям теорем 3 и 4.

Тогда (4.29) превращается в формулу суммирования для величин $b(n)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n) f(n) = A\int_0^{\infty} f(\xi)d\xi - \int_0^{\infty}\frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi^2+4}}d\xi - \frac{1}{2}\left(\ln\pi + \frac{\ln 2}{2}\right)f(0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j h(\varkappa_j) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+iz) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2iz) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2iz)\right\}h(z)dz \qquad (5.2)$$

Используя здесь точно такую же полиномиальную аппроксимацию ступенчатой функции, как в разделе 7.2 работы [5], и дословно повторяя рассуждения, проведенные там при оценке среднего значения величин $B(n)$, получаем из (5.2)

$$\sum_{n\leq x} b(n) = Ax + O\left(\sqrt{x\ln x}\right). \qquad (5.3)$$

5.2. Вычисление A.

Идея состоит в рассмотрении ряда

$$\mathcal{L}(\alpha,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} L_n^{(-)}(s), \quad Re\,\alpha,\ Re\,s > 1. \tag{5.4}$$

Простое арифметическое определение коэффициентов ряда Дирихле $L_n^{(-)}(s)$ позволяет выразить $\mathcal{L}(\alpha,s)$ через обобщенную дзета-функцию. После этого продолжение $\mathcal{L}(\alpha,s)$ (при фиксированном s) в полуплоскость $Re\,\alpha < 0$ осуществляется с помощью формулы Гурвица, которая дает выражение для $\mathcal{L}(\alpha,s)$ через сумму сумм Клоостермана. Последняя выражается через коэффициенты Фурье собственных функций оператора Лапласа; в результате получается эквивалентная (5.2) формула с $A = 1$.

Намеченный план реализуется следующей серией лемм.

ЛЕММА I. Пусть для целых $c \geq 1$ и d, взаимно простых с c, a обозначает решение сравнения $ad \equiv 1 \pmod c$ с условием $1 \leq a-d \leq c$. Тогда для $Re\,\alpha,\ Re\,s > 1$

$$\mathcal{L}(\alpha,s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{\alpha+s}} \sum_{\substack{(d,c)=1 \\ 1 \leq d < c}} \zeta\left(\alpha, \frac{a-d}{c}\right), \tag{5.5}$$

где $\zeta(\alpha,v)$ – обобщенная дзета-функция,

$$\zeta(\alpha,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+v)^{\alpha}}, \quad Re\,\alpha > 1, \quad v > 0. \tag{5.6}$$

В самом деле, в силу абсолютной сходимости при $Re\,\alpha,\ Re\,s > 1$

$$\mathcal{L}(\alpha,s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(c)}{n^{\alpha}}. \tag{5.7}$$

Здесь

$$a_n(c) = \sum_{\substack{d, \\ 1 \leq d < c,\ d^2+nd-1 \equiv 0 \pmod c}} 1 \tag{5.8}$$

Изменяя теперь порядок суммирования по d и n, учтем, что всякое решение сравнения $d^2+nd-1 \equiv 0 \pmod c$ необходимо является взаимно простым с c. Поэтому это сравнение эквивалентно сравнению $d+n-a \equiv 0 \pmod c$, где $ad \equiv 1 \pmod c$. Следовательно,

$$\mathcal{L}(\alpha,s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{s}} \sum_{\substack{(d,c)=1 \\ 1 \leq d < c}} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a-d \pmod c}} \frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{5.9}$$

что совпадает с (5.5).

ЛЕММА 2. Пусть для $x \geq 0$ функция $f(x)$ является бесконечно гладкой и убывает быстрее любой фиксированной степени x при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Тогда для $Re\,s > 3/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) L_n^{(-)}(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \int_0^{\infty} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} S(n,-n;c)\, \varphi_f\left(\frac{4\pi n}{c}\right), \tag{5.10}$$

где

$$\varphi_f(x) = \frac{2}{i\,\pi^{s+1/2}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{\alpha+s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \hat{f}(\alpha)\,d\alpha \tag{5.11}$$

(с обозначением $\hat{f}(\alpha)$ для преобразования Меллина функции f,

$$\hat{f}(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\, x^{\alpha-1}\, dx). \qquad (5.12)$$

Левая часть (5.10) равна интегралу

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mathcal{L}(\alpha, s)\, \hat{f}(\alpha)\, d\alpha. \qquad (5.13)$$

Перенесем путь интегрирования на прямую $Re\,\alpha = -\varepsilon$ с малым положительным ε. Если вещественная часть s достаточно велика (например, для $Re\,s \geqslant 4$), то в полосе $-\varepsilon \leqslant Re\,\alpha \leqslant 2$ функция $\mathcal{L}(\alpha, s)$ имеет единственный полюс в $\alpha = 1$. Так как вычет $\zeta(\alpha, v)$ в $\alpha = 1$ равен 1, при любом $v > 0$, этот полюс дает вклад

$$\hat{f}(1) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{1+s}} \sum_{\substack{(d,c)=1\\ 1 \leqslant d < c}} 1 = \hat{f}(1) \cdot \frac{\zeta(s)}{\zeta(1+s)}. \qquad (5.14)$$

На прямой $Re\,\alpha = -\varepsilon$ по формуле Гурвица ([9], с.41)

$$\zeta(\alpha, v) = 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi n v + \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{n^{1-\alpha}}. \qquad (5.15)$$

Так как суммы Клостермана $S(n, -n; c)$ вещественны, это дает

$$\sum_{\substack{(d,c)=1\\ 1 \leqslant d < c}} \zeta\left(\alpha, \frac{a-d}{c}\right) = 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n,-n;c)}{n^{1-\alpha}}. \qquad (5.16)$$

Все ряды сходятся абсолютно при $Re\,s > \frac{3}{2}$, $Re\,\alpha < 0$, а интегрирование по α можно выполнить почленно, так как $\hat{f}(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ убывает быстрее любой фиксированной степени $|\alpha|$. Теперь (5.10) получается из формулы

удвоения и функционального уравнения для гамма-функции, так как

$$\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \qquad (5.17)$$

ЛЕММА 3. Пусть четная функция $h(z)$ комплексного переменного z регулярна в полосе $|Im\,z| \leqslant \Delta$ с $\Delta > \frac{1}{2}$ и при $|z| \to \infty$ в этой полосе $|h(z)| = O(|z|^{-2-\varepsilon})$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Тогда для целых $n, m \geqslant 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(n)\rho_j(m)}{ch(\pi\varkappa_j)}\, h(\varkappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (nm)^{-iz}\sigma_{2iz}(n)\sigma_{2iz}(m)\,\frac{h(z)}{|\zeta(1+2iz)|^2}\,dz =$$

$$= \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} S(n,-m;c)\,\varphi_h\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right), \qquad (5.18)$$

где для $x > 0$

$$\varphi_h(x) = \frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} z\, sh(\pi z)\, K_{2iz}(x)\, h(z)\, dz. \qquad (5.19)$$

Тождество (5.18), которое является переформулировкой соответствующей формулы суммирования для сумм Клоостермана (3 ,§ 4) для случая заданной h, вытекает из (3.11) и интегрального равенства (4.1) следующим образом.

Положим в (3.11) $\alpha = 1$. Обе части полученного равенства умножим на $\Phi(t)$, определенную равенством (4.3), и проинтегрируем по t от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль вещественной оси. Слева в результате интегрирования получается левая часть (5.18), а в правой части возникают интегралы (с $x = \frac{4\pi\sqrt{nm}}{a}$)

$$x\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)K_{2it}(x)\,dt = \frac{ix}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\{K_{2it-1}(x) - K_{2it+1}(x)\}\,sh(\pi t)\,h(t)\,dt, \quad (5.20)$$

которые приводятся к форме (5.I9) с помощью рекуррентного соотношения ([I3] ,с.9I)

$$K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}K_\nu(x). \qquad (5.2I)$$

ЛЕММА 4. П у с т ь $f(x)$ у д о в л е т в о р я е т у с л о в и я м л е м м ы 2. Т о г д а д л я л ю б о г о s с у с л о в и е м $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)L_n^{(-)}(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(1+s)}\int_0^{\infty} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_j R_j(s)}{ch(\pi \varkappa_j)}h_f(\varkappa_j, s) +$$

$$+ \frac{\zeta^2(s)}{\pi\zeta(2s)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2}h_f(r,s)\,dr \qquad (5.22)$$

где

$$h_f(r,s) = \frac{2\,ch(\pi r)}{(2\pi)^s}\Gamma\left(\frac{s}{2}+ir\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-ir\right)\int_0^{\infty}F\left(\frac{s}{2}+ir, \frac{s}{2}-ir; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right)f(x)\,dx \quad (5.23)$$

(F - гипергеометрическая функция Гаусса).

Заметим, что обращением (5.I9) является интегральное преобразование

$$h(r) = 2\,ch(\pi r)\int_0^{\infty}\varphi_h(x)K_{2ir}(x)\,\frac{dx}{x}. \qquad (5.24)$$

Это равенство следует из формул для преобразования Конторовича-Лебедева и может быть непосредственно проверено с помощью интегрального тождества ([I3] ,с.66)

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}K_{2ir}(x)K_{2ir}(y)\,ch(2\pi r - 2\psi r)\,dr = K_0\left(\sqrt{x^2 - 2xy\cos\psi + y^2}\right), \quad (5.25)$$

$$x, y > 0, \quad 0 < \psi < \pi.$$

В частности, если φ определена интегралом (5.II), то, в силу известных формул для преобразования Меллина модифицированной функции Бесселя, имеем

$$h = \frac{2\,ch(\pi r)}{i\,\pi^{s+1/2}}\int_{-i\infty}^{i\infty}2^{-\alpha-s}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+s-1}{2}+ir\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+s-1}{2}-ir\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\hat{f}(\alpha)\,d\alpha \quad (5.26)$$

С помощью равенства Парсеваля для преобразования Меллина и интегрального представления Бернса для гипергеометрической функции это равенство преобразуется к форме (5.23). Из предположенных свойств гладкости и убывания f легко следует, что определенная интегралом (5.23) функция $h_f(r,s)$ для любого фиксированного s с условием $\mathrm{Re}\, s > 1$ удовлетворяет условиям леммы 3. Теперь (5.22) следует из (5.I0), (5.I8) и тождества Рамануджана

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}. \quad (5.27)$$

ЛЕММА 5. В т о ж д е с т в е (5.2) $A = 1$.

Сравним вычеты в $s = 1$ в обеих частях равенства (5.22). Вычет левой части равен

$$\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,b(n). \qquad (5.28)$$

В правой части, как при вычислении вычета (3.I3) и аналогичного вычета в § 6 работы [5] получаем лорановское разложение

$$\frac{1}{(s-1)^2}\cdot\frac{1}{\pi\zeta(2)}\int_{-\infty}^{\infty}h_f(r,1)\,dr + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{\zeta(2)}\int_0^{\infty}f(x)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{\zeta(2)}\left\{2\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j h(\varkappa_j;1) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\gamma - 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ir) + \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2ir)\right]h(r,1)\,dr + \right. \quad (5.29)$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial h(r,s)}{\partial s}\Big|_{s=1}dr - \frac{1}{2}h(0,1)\right\} + O(1), \quad s \to 1.$$

Здесь

$$h(r,1) = \int_0^{\infty} \cos\left(2r \operatorname{arsh} \frac{x}{2}\right) f(x) \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}$$

$$= \int_0^{\infty} \cos(r\xi)\, f\left(2\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}\right) d\xi \qquad (5.30)$$

так как ([9], с.II0)

$$F\left(\tfrac{1}{2}+ir, \tfrac{1}{2}-ir; \cancel{\tfrac{1}{2}}, -x\right) = \frac{\cos\left(2r \operatorname{arsh}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}}. \qquad (5.31)$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(r,1)\, dr = 2\pi f(0) \qquad (5.32)$$

Так как, по предположению леммы 4, $f(0) = 0$, слагаемое с $(s-1)^{-2}$ в (5.29) исчезает. Остальные слагаемые нет нужды вычислять, так как в (5.29) имеется только один член, содержащий интеграл $\int_0^{\infty} f(x)dx$.

Вычет этого слагаемого в $s=1$ равен $\frac{1}{\zeta(2)}\int_0^{\infty} f(x)dx$.

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, b(n) = \int_0^{\infty} f(x)dx - \int_0^{\infty} f(x) \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} + S_d + S_c, \qquad (5.33)$$

где S_d и S_c обозначает сумму по дискретному и интеграл по непрерывному спектру соответственно. Следовательно, в (5.2) $A = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Фаддеев Л.Д., Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского, Труды Московского математического общества, т.I7, (I967), с.323–350.

2. Kubota T., Elementary theory of Eisenstein's series, Kodansha, Tokyo, (1974).

3. Кузнецов Н.В., Гипотеза Петерсона для форм веса нуль и гипотеза Линника, препринт ХабКНИИ ДВНЦ, Хабаровск (I977)

4. Cartier P., Some numerical computations relating to automorphic functions, Computers in numbers theory, Academic press, London and New York, (1971), p. 37-48.

5. Кузнецов Н.В., Арифметическая форма формулы следа Сельберга и распределение норм примитивных гиперболических классов модулярной группы, препринт ХабКНИИ ДВНЦ, Хабаровск (I978).

6. Кузнецов Н.В., Федосов Б.В., Асимптотическая формула для собственных значений круглой мембраны, Дифференциальные уравнения, том I, № I2 (I965).

7. Кузнецов Н.В., Канд.диссертация МИАН им.В.А.Стеклова, (I965).

8. Кузнецов Н.В., Асимптотическое распределение собственных частот плоской мембраны в случае разделяющихся переменных, Дифференциальные уравнения, т.I0, № 2 (I966).

9. Бейтмен Г. и Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, том I, "Наука", Москва (I965.

10. Венков А.Б., Об асимптотической формуле, связанной с числом собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами на фундаментальной области модулярной группы $PSL(2,\mathbb{Z})$, отвечающих нечетным собственным функциям, ДАН СССР, (1977), т.233, № 6, с.1021-1023.

11. Гайдуков Е.В., Кузнецов Н.В., Формула Куранта для собственных значений оператора Лапласа на плоскости Лобачевского, препринт ХабКНИИ ДВНЦ, Хабаровск (1978).

12. Selberg A., On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, Proc. of Symposia in Pure Math., vol. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, (1965), p. 1-15.

13. Бейтмен Г. и Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, том 2, "Наука", Москва (1966).

1978 г.

Дальневосточный научный центр АН СССР.
Хабаровский комплексный научно-исследовательский институт.
Хабаровск, ул. Ким-Ю-Чена, 65.

Подписано к печати 30/I-1978 г. ВЛ 05210

ХабИИЖТ. Р-т. зак.152. Тир.150 экз. Цена 10 коп.
Хабаровск, ул.Серышева,47.