14-1999

Хабаровское отделение
Института прикладной математики
Дальневосточного отделения
Российской Академии наук

PREPRINT

В. В. Головчанский, М. Н. Смотров

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА, АВТОМОРФНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ $\Gamma_0(2^S N)$

Khabarovsk

The Institute for Applied Mathematics,
The Far Eastern Branch of
the Russian Academy of Sciences,
Khabarovsk 680 000

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
Far Eastern Branch
Institute for Applied Mathematics
Khabarovsk Division

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Дальневосточное отделение
Институт прикладной математики
Хабаровское отделение

В. В. Головчанский, М. Н. Смотров

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА, АВТОМОРФНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ $\Gamma_0(2^S N)$

Vladimir V. Golovchanskiĭ, Mikhail N. Smotrov

ON THE DISCRET SPECTRUM OF THE AUTOMORPHIC LAPLACIAN FOR THE CASE OF THE CONGRUENCE SUBGROUP $\Gamma_0(2^S N)$

Препринт • Preprint
№ 14

Khabarovsk • Хабаровск
1999

УДК 511.33

Головчанский В. В., Смотров М. Н. *О дискретном спектре лапласиана, автоморфного относительно группы* $\Gamma_0(2^s N)$. Владивосток: Дальнаука, 1999. 11 с. (Препринт / ДВО РАН. Хабаровское отделение Института прикладной математики; № 14).

Доказано совпадение точек дискретного спектра автоморфных лапласианов для двух пар конгруэнц-подгрупп $\{\Gamma_0(8N),\ \Gamma_0(16N)\}$ и $\{\Gamma_0(32N),\ \Gamma_0(64N)\}$, где N-натуральное нечетное. Установлена связь между размерностями подпространств собственных функций дискретного спектра автоморфного лапласиана трех последовательных конгруэнц-подгрупп $\Gamma_0(2^s N)$, $\Gamma_0(2^{s-1} N)$ и $\Gamma_0(2^{s-2} N)$ при $s = 4$ и 6.

Библиог. 7 назв.

Ответственный редактор: профессор Н. В. Кузнецов

UDC 511.33

V. V. Golovchanskiĭ, M. N. Smotrov. *On the discret spectrum of the automorphic Laplacian for the case of the congruence subgroup* $\Gamma_0(2^s N)$. Vladivostok: Dal'nauka, 1999. 11 pp. (Preprint / FEB RAS. Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics; No. 14).

The coincidence of the points of the discrete spectrum for the automorphic Laplacian have been proved for two pairs congruence-subgroups $\{\Gamma_0(8N),\ \Gamma_0(16N)\}$ and $\{\Gamma_0(32N),\ \Gamma_0(64N)\}$ is proved, where N is odd positive integer. The explicit link between the dimensions of the subspases of the automorphic Laplacian for the congruence-subgroups $\Gamma_0(2^s N)$, $\Gamma_0(2^{s-1} N)$ and $\Gamma_0(2^{s-2} N)$ for $s = 4$ and 6 is established.

Bibl. 7.

Managing Editor: professor N. V. Kuznetsov

В.В. Головчанский, М.Н. Смотров.

О дискретном спектре лапласиана, автоморфного относительно группы $\Gamma_0(2^s N)$.

§1. Введение.

Пусть $H = \{z = x + iy, y > 0\}$ - верхняя полуплоскость,

$$\Gamma = \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid\ c \equiv 0 \pmod N \right\}$$

- конгруэнц-подгруппа уровня N, действующая на H обычным образом

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

где $\gamma \in \Gamma_0(N)$. Через $\Gamma\backslash H$ обозначим фундаментальную область группы Γ и пусть $\mathcal{H} = L_2(\Gamma\backslash H)$ обозначает гильбертово пространство Γ-автоморфных форм, которые квадратично интегрируемы на фундаментальной области по инвариантной мере $dxdy/y^2$, то есть $\mathcal{H}$ состоит из функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям:

$$f(\gamma z) = f(z);$$
$$\int_{\Gamma\backslash H} |f(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2} < \infty.$$

И, наконец, пусть $L = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ – оператор Лапласа в метрике Пуанкаре. Лапласиан L самосопряжен в $\mathcal{H}$. Теорема о спектральном разложении для оператора L утверждает, что $\mathcal{H}$ разлагается на сумму двух инвариантных ортогональных подпространств $\mathcal{H} = \mathcal{H}^c \oplus \mathcal{H}^d$. Здесь $\mathcal{H}^c$ – подпространство непрерывного спектра оператора L, образованное рядами Эйзенштейна, аналитически продолженными па половинную прямую $s = 1/2 + it$, $\mathcal{H}^d$ – подпространство дискретного спектра $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$. Дискретный спектр конечной кратности не имеет точек сгущения кроме бесконечности. Хорошо известно [1], что для конгруэнц-подгрупп функция распределения дискретного спектра имеет вейлевский тип:

$$\sum_{\lambda_j \le T} 1 \sim \frac{Vol(\Gamma\backslash H)}{4\pi} T. \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 99-01-00768)

Для модулярной группы в работе [2] получена асимптотика с тремя выделенными членами и остатком $O(T^{1/2}/\log T)$.

G.*Steil* [3] провел обширные вычисления дискретного спектра модулярной группы, и все вычисленные собственные значения оказались однократными. Однако, теоретических результатов о кратности дискретного спектра, насколько нам известно, до сих пор не получено. В данной работе найдены две серии конгруэнц-подгрупп, у которых точки спектра и их кратности однозначно определяются точками спектра с их кратностями конгруэнц-подгрупп более низкого уровня.

Теорема. *Пусть N - любое нечетное натуральное, тогда дискретные спектры (без учета кратности) автоморфных лапласианов следующих пар конгруэнц-подгрупп совпадают:*

$$\Gamma_0(2^3N) \text{ и } \Gamma_0(2^4N),$$

$$\Gamma_0(2^5N) \text{ и } \Gamma_0(2^6N).$$

Более того, пусть $k_{2^sN}(\lambda)$ - кратность точки дискретного спектра λ автоморфного лапласиана конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(2^sN)$, тогда

$$k_{2^sN}(\lambda) = 3k_{2^{s-1}N}(\lambda) - 2k_{2^{s-2}N}(\lambda), \text{ при } s = 4, 6.$$

Естественно возникает вопрос: почему именно для этих конгруэнц-подгрупп Γ_0 дискретные спектры совпадают? Следующие неформальные соображения, на наш взгляд, объясняют это совпадение.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} \rho(n) f_n(\lambda, z)$$

есть разложение в ряд Фурье собственной функции автоморфного лапласиана группы $\Gamma_0(N)$. Г.Шимура ([4], предложение 3.54) построил, в частности, новые формы для групп $\Gamma_0(p^2N), p \neq 2$ и $\Gamma_0(2^4N), \Gamma_0(2^6N)$. Тогда следующие 6 функций являются собственными функциями автоморфного лапласиана группы $\Gamma_0(2^4N)$:

$$f(z), f(2z), f(4z), f(8z), f(16z), u(z) = f_{\chi_4}(z),$$

где

$$u(z) = f_{\chi_4}(z) = \sum_{n\neq 0} \chi_4(n)\rho(n) f_n(\lambda, z).$$

При этом три первые функции из этого списка являются собственными функциями автоморфного лапласиана группы $\Gamma_0(2^2N)$ и четыре первые являются собственными функциями автоморфного лапласиана группы $\Gamma_0(2^3N)$. Возможны два варианта: либо $f_{\chi_4}(z) \neq f(z)$ либо $f_{\chi_4}(z) = f(z)$. Первый вариант удовлетворяет теореме:

$$6 = 3 * 4 - 2 * 3.$$

Второй вариант видимо не встречается, но доказать это мы не можем.

Далее список можно продолжить до группы $\Gamma_0(2^6 N)$, то есть добавить еще 6 функций:

$$f(32z), f(64z), u(2z), u(4z), f_{\chi_8}(z), f_{\chi_{-8}}(z).$$

Здесь в случае $f_{\chi_8}(z) \neq f_{\chi_{-8}}(z) \neq f(z)$ согласно теореме имеем

$$12 = 3 * 8 - 2 * 6.$$

Остальные варианты видимо не встречаются.

Для новых собственных функций, которые появляются в дискретном спектре конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(2^s N)$ $(1 \leq s < 4)$, ситуация аналогична.

Для некоторых новых собственных функций, которые появляются в дискретном спектре конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(2^5 N)$, имеет место

$$f_{\chi_8}(z) = f(z).$$

Можно предположить, что конгруэнц-подгруппы указанные в теореме уникальны, так как для других групп $\Gamma_0(p^s N)$ с увеличением s на единицу из (1.1) следует, что собственных функций "становится в p раз больше", а построить мы можем из данной функции не более двух.

§2. Предварительные сведения.

Доказательство теоремы основано па формуле следа Сельберга и мультипликативных свойствах чисел $B(L, N)$, получающихся в результате суммирования по классам гиперболических элементов в формуле следа. Формула следа взята из работы M.Huxly [5] и приведена ниже в удобной для нас форме.

Теорема 1. *Пусть N-целое положительное большее единицы, $\lambda_{j,N} = \varkappa_{j,N}^2 + \frac{1}{4}$ - собственные значения автоморфного лапласиана конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$, $h(r)$ - четная, регулярная в полосе $|\mathrm{Im}(r)| \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и при $|r| \to \infty$ в этой полосе $h(r) = O(r^{-2-\delta})$ с $\delta > 0$ и $g(x)$ - преобразование Фурье функции $h(r)$:*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-irx} h(r) dr.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(\varkappa_{j,N}) = \frac{\mu(N)}{6}\int_0^{\infty} t\tanh(\pi t)h(t)dt-$$
$$\nu_{\infty}(N)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}(\log\Gamma(1+it)+\log\Gamma(1/2+it))h(t)dt+\log\frac{2}{\pi}g(0)-\frac{1}{4}h(0)\right)+$$
$$\nu_2(N)\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{h(t)}{\cosh\pi t}dt+\nu_3(N)\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\infty}\frac{\cosh\frac{\pi t}{3}}{\cosh\pi t}h(t)dt-$$
$$h(\frac{i}{2})+\frac{1}{4}K_0(N)h(0)-\nu_{\infty}(N)\log(N)g(0)-\log(A(N))g(0)+$$
$$2\sum_q\log q\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega(q^m,N)}{q^m}g(\log q^{2m})+$$
$$\sum_{\{\gamma\}}\frac{\log \mathrm{N}\gamma_0}{(\mathrm{N}\gamma)^{1/2}-(\mathrm{N}\gamma)^{-1/2}}g(\log\mathrm{N}\gamma)$$

Арифметические функции $\mu,\nu_{\infty},\nu_2,\nu_3,K_0,A,\omega$ *мультипликативны по* N. *Далее всюду* p *и* q *обозначают простые числа.*

$(\pi/3)\mu(N)$ - *объем фундаментальной области группы* $\Gamma_0(N)$:

$$\mu(p^s)=p^{s-1}(p+1). \tag{2.1}$$

$\nu_{\infty}(N)$ - *число* $\Gamma_0(N)$ - *неэквивалентных параболических вершин:*

$$\nu_{\infty}(p^s)=\begin{cases} 2p^{[s/2]} & ,\ \textit{если}\ s\equiv 1\pmod 2;\\ p^{s/2}+p^{s/2-1} & ,\ \textit{если}\ s\equiv 0\pmod 2).\end{cases} \tag{2.2}$$

[*] - целая часть числа.

$\nu_2(N),\nu_3(N)$ - *числа* $\Gamma_0(N)$ - *неэквивалентных эллиптических точек порядка 2 и 3 соответственно:*

$$\nu_2(p^s)=\begin{cases} 0 & ,\ \textit{если}\ 4\mid p^s;\\ 1+\left(\frac{-1}{p}\right) & ,\ \textit{в противном случае};\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\nu_3(p^s)=\begin{cases} 0 & ,\ \textit{если}\ 9\mid p^s;\\ 1+\left(\frac{-3}{p}\right) & ,\ \textit{в противном случае}.\end{cases} \tag{2.4}$$

$\left(\frac{*}{p}\right)$ - *символ Лежандра в расширенном смысле, т.е.* $\left(\frac{-1}{2}\right)=0$ *и* $\left(\frac{-3}{2}\right)=0$.

$$K_0(p^s)=2s,\ \textit{если}\ p\neq 2.$$

$$K_0(2^s)=\begin{cases} s+1 & ,\ \textit{если}\ s=1,2,3;\\ 2s-2 & ,\ \textit{если}\ s=4,5;\\ 4s-12 & ,\ \textit{если}\ s\geq 6.\end{cases} \tag{2.5}$$

$$A(p^s)=p^{a(p^s)},$$

где

$$a(p^s)=\begin{cases} -2\dfrac{p^{(s-1)/2}-1}{p-1} & ,\ \textit{если}\ s\equiv 1 \pmod 2;\\ -2\dfrac{p^{(s-2)/2}-1}{p-1}-p^{(s-2)/2} & ,\ \textit{если}\ s\equiv 0 \pmod 2.\end{cases} \tag{2.6}$$

$$\omega(q^m,p^s)=\begin{cases} \nu_\infty(p^s) & ,\ \textit{если}\ l\geq \left[\dfrac{s}{2}\right];\\ 2p^l & ,\ \textit{если}\ l<\left[\dfrac{s}{2}\right]\ \textit{и}\ q\neq p;\\ 1 & ,\ \textit{если}\ q=p;\end{cases} \tag{2.7}$$

где l - наибольшее целое такое, что

$$q^{2m}\equiv 1 \pmod{p^l}.$$

В последней сумме формулы следа суммирование ведется по всем классам сопряженных гиперболических элементов группы $\bar\Gamma_0(N)=\Gamma_0(N)/\pm I$.

$\mathbf{N}\gamma$ *- норма гиперболического преобразования γ и*

$$\mathbf{N}\gamma=((L+\sqrt{L^2-4})/2)^2 \tag{2.8}$$

при некотором целом $L\geq 3$, равном следу соответствующего элемента из $\Gamma_0(N)$ (так как $-I\in\Gamma_0(N)$, то это всегда возможно). И, наконец, γ_0 - примитивный гиперболический элемент в $\bar\Gamma_0(N)$, соответствующий элементу γ.

Преобразуем последнюю сумму в формуле следа к удобному для нас виду. Обозначим через $\nu_h(L,N)$ (соответственно $\nu(L,N)$) число классов сопряженных гиперболических преобразований (соответственно примитивных гиперболических преобразований) с данной нормой, определенной в (2.8). В работе [6] показано, что

$$\nu_h(L,N)=\sum_{k|m}\nu(T_k,N), \tag{2.9}$$

где натуральное m определяется из равенства

$$\left(\frac{T_1+U_1\sqrt{D}}{2}\right)^m=\frac{L-Q\sqrt{D}}{2}.$$

и $L^2 - 4 = Q^2 D$ (D - фундаментальный дискриминант), T_1, U_1 - фундаментальное решение уравнения Пелля

$$t^2 - Du^2 = 4$$

и

$$\frac{T_k + U_k\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T_1 + U_1\sqrt{D}}{2}\right)^k.$$

Зафиксируем норму с некоторым $L \geq 3$. Применяя (2.9), получаем:

$$\sum_{\substack{\{\gamma\} \\ \mathrm{N}\gamma = N_L}} \log \mathrm{N}\gamma_0 = \sum_{k|m} \nu(T_k, N) \log\left((T_k + U_k\sqrt{D})/2\right)^2 =$$

$$2\log\left((L + \sqrt{L^2-4})/2\right) \sum_{k|m} \frac{k}{m} \nu(T_k, N).$$

Тогда имеем

$$\sum_{\{\gamma\}} \frac{\log \mathrm{N}\gamma_0}{(\mathrm{N}\gamma)^{1/2} - (\mathrm{N}\gamma)^{-1/2}} g(\log \mathrm{N}\gamma) = 2\sum_{L=3}^{\infty} B(L,N) g\left(2\log\frac{L+\sqrt{L^2-4}}{2}\right),$$

где

$$B(L,N) = \frac{\log(L+\sqrt{L^2-4})/2}{(L+\sqrt{L^2-4})/2 - 2/(L+\sqrt{L^2-4})} \sum_{k|m} \frac{k}{m} \nu(T_k, N).$$

Нам понадобится формула, связывающая $B(L, p^s N)$ с $B(L, N)$ $(N, p) = 1$, полученная в [7]. Для удобства читателей мы приводим ее ниже.

Теорема 2. *Пусть $N > 1$, $L \geq 3$ и $L^2 - 4 = Q^2 D$ (D - фундаментальный дискриминант),*

s – кратность с которой p входит в разложение N,

α – кратность с которой p входит в разложение Q,

$$N_1 = N/p^s.$$

Тогда

$$B(L,N) = \delta(p,s,\alpha) B(L, N_1), \tag{2.10}$$

где

$$\delta(p,s,\alpha) = \begin{cases} \delta_1(p,s,\alpha), & \text{если } \left(\frac{D}{p}\right) = 1 \text{ при } p \neq 2 \text{ и } D \equiv 1 \pmod 8 \text{ при } p = 2; \\ \delta_2(p,s,\alpha), & \text{если } \left(\frac{D}{p}\right) = -1 \text{ при } p \neq 2 \text{ и } D \equiv 5 \pmod 8 \text{ при } p = 2; \\ \delta_3(p,s,\alpha), & \text{если } p \mid D. \end{cases}$$

и

$$\delta_1(p,s,\alpha)=\begin{cases}2p^{\alpha}, & \text{если}\quad 2\alpha<s;\\ p^{[s/2]}+p^{[(s-1)/2]}, & \text{если}\quad 2\alpha\ge s;\end{cases}$$

$$\delta_2(p,s,\alpha)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 2\alpha<s;\\ (p^{[s/2]}+p^{[(s-1)/2]})\dfrac{p^{\alpha+1}+p^{\alpha}-(p^{[(s+1)/2]}+p^{[s/2]})}{p^{\alpha+1}+p^{\alpha}-2}, & \text{если}\quad 2\alpha\ge s;\end{cases}$$

$$\delta_3(p,s,\alpha)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 2\alpha<s-1;\\ (p^{[s/2]}+p^{[(s-1)/2]})\dfrac{p^{\alpha+1}-(p^{[(s+1)/2]}+p^{[s/2]})/2}{p^{\alpha+1}-1}, & \text{если}\quad 2\alpha\ge s-1.\end{cases}$$

§3. Доказательство теоремы.

Возьмем для групп $\Gamma_0(2^sN)$, $\Gamma_0(2^{s-1}N)$ и $\Gamma_0(2^{s-2}N)$ формулы следа, приведенные в теореме 1 и составим их линейную комбинацию:

$$3\sum_{j=1}^{\infty}h(\varkappa_{j,2^{s-1}N})-2\sum_{j=1}^{\infty}h(\varkappa_{j,2^{s-2}N})-\sum_{j=1}^{\infty}h(\varkappa_{j,2^{s}N})=R(h,N,s). \tag{3.1}$$

Покажем, что правая часть $R(h,N,s)$ тождественно равна нулю при $s=4,6$, откуда, в силу произвольности функции h, немедленно следуют утверждения теоремы.

Лемма. *Пусть $L\ge 3$ и $s=4,6$, тогда*

$$3B(L,2^{s-1}N)-2B(L,2^{s-2}N)-B(L,2^sN)=0. \tag{3.2}$$

Доказательство.

Применяя (2.10), выразим $B(L,2^kN)$ через $B(L,N)$:

$$\begin{aligned}&3B(L,2^{s-1}N)-2B(L,2^{s-2}N)-B(L,2^sN)=\\&(3\delta(2,s-1,\alpha)-2\delta(2,s-2,\alpha)-\delta(2,s,\alpha))B(L,N)\equiv\Delta(s,\alpha)B(L,N)\end{aligned}$$

Покажем, что $\Delta(s,\alpha)=0$, при $s=4,6$. Для этого необходимо рассмотреть три случая:

1) $D\equiv 1 \pmod 8$.

В этом случае не существует $L\ge 3$ таких, что $\alpha<3$ и $D\equiv 1 \pmod 8$. Это легко следует из рассмотрения классов вычетов по модулю 8. Поэтому $\alpha \geq 3$ и значит $2\alpha > s$. Применяя теорему 2, получаем:

$$\Delta(s,\alpha) = 3\delta_1(2,s-1,\alpha) - 2\delta_1(2,s-2,\alpha) - \delta_1(2,s,\alpha) =$$
$$3(2^{[(s-1)/2]} + 2^{[(s-2)/2]}) - 2(2^{[(s-2)/2]} + 2^{[(s-3)/2]}) - (2^{[s/2]} + 2^{[(s-1)/2]}) =$$
$$\begin{cases} 3(2+2) - 2(2+1) - (2^2+2) = 0, & \text{если } s = 4; \\ 3(2^2+2^2) - 2(2^2+1) - (2^3+2^2) = 0, & \text{если } s = 6. \end{cases}$$

2) $D \equiv 5 \pmod 8$.
В этом случае не существует $L \geq 3$ таких, что $\alpha = 1, 2$ и $D \equiv 5 \pmod 8$.

Действительно, если L - нечетное, то $L^2 - 4$ также нечетно, и значит $\alpha = 0$.

Пусть $L = 4k$, тогда

$$L^2 - 4 = 4(4k^2 - 1).$$

Поскольку $4k^2 - 1 \equiv 3 \pmod 4$, то $4 \mid D$ и значит $\alpha = 0$.

Пусть $L = 4k + 2$, тогда

$$L^2 - 4 = 16k(k+1).$$

Так как $k(k+1)$ -четно то $2^5 \mid (L^2 - 4)$. Отсюда следует, что $D \equiv 5 \pmod 8$ только при $\alpha \geq 3$.

Если $\alpha = 0$, то все 3 слагаемые нулевые, а при $2\alpha \geq s$, имеем:

$$\Delta(s,\alpha) = 3\delta_2(2,s-1,\alpha) - 2\delta_2(2,s-2,\alpha) - \delta_2(2,s,\alpha) = 0.$$

Это проверяется непосредственной подстановкой $s = 4, 6$ аналогично пункту 1).
3) $2 \mid D$.
В этом случае при $\alpha < (s-2)/2$ все 3 слагаемые равны 0.

Для $\alpha = (s-2)/2$ имеем

$$\Delta(s,\alpha) = 3\delta_3(2,s-1,(s-2)/2) - 2\delta_3(2,s-2,(s-2)/2) = 0,$$

что легко проверяется подстановкой $s = 4, 6$.

Для $\alpha > (s-2)/2$ имеем

$$\Delta(s,\alpha) = 3\delta_3(2,s-1,\alpha) - 2\delta_3(2,s-2,\alpha) - \delta_3(2,s,\alpha) = 0,$$

что также легко проверяется непосредственными вычислениями. ∎

Правую часть $R(h,N,s)$ тождества (3.1) запишем в виде:

$$\begin{gathered} R(h,N,s) = \Delta(\mu(2^sN))C_1 + \Delta(\nu_\infty(2^sN))C_2 + \Delta(\nu_2(2^sN))C_3 + \\ \Delta(\nu_3(2^sN))C_4 + \Delta(1)C_5 + \Delta(K_0(2^sN))C_6 + \Delta(\nu_\infty(2^sN)\log(2^sN))C_7 + \\ \Delta(\log(A(2^sN))C_8 + \sum_q \sum_{m=1}^{\infty} \Delta(\omega(q^m, 2^sN))C_{mq} + \sum_{L=3}^{\infty} \Delta(B(L,2^sN))C'_L, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$\Delta(f(2^s N)) = 3f(2^{s-1}N) - 2f(2^{s-2}N) - f(2^s N)$$

и C_k, C_{mq}, C'_L- величины, не зависящие от N и s.

Из (3.2) немедленно следует, что $\sum_{L=3}^{\infty} \Delta(B(L,2^s N))C'_L, = 0$. Покажем, что $\Delta(\omega(q^m, 2^s N)) = 0$. Прежде всего, имеем: $\omega(q^m, 2^s N) = \omega(q^m, 2^s)\omega(q^m, N)$. Далее, согласно (2.7) $\omega(2^m, 2^s) = 1$ при $q = 2$ и, следовательно $\Delta(\omega(2^m, 2^s)) = 0$. При $q \neq 2$ (q - простое) $q^2 \equiv 1 \pmod 8$ и значит в (2.7) $l \geq 3 \geq [s/2]$ $(s = 4, 6)$. Тогда согласно (2.7) имеем $\omega(q^m, 2^s) = \nu_\infty(2^s)$. Прямая проверка с помощью (2.2) дает: $\Delta(\nu_\infty(2^s)) = 0$ при $s = 4, 6$.

Для проверки равенства нулю остальных слагаемых в (3.3), следует воспользоваться формулами (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6). Эта проверка не представляет труда и мы ее опускаем.

Замечание: для доказательства теоремы достаточно было показать, что комбинация рядов по классам гиперболических элементов тождественно равна нулю, поскольку из этого с необходимостью следует, что правая часть (3.1) обращается в нуль. Прямая проверка этого, проведенная в доказательстве служит дополнительным подтверждением справедливости теорем 1,2.

Список литературы

[1] *Венков А.Б.* Спектральная теория автоморфных функций // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова Т.153, 1981.

[2] *Кузнецов Н.В.* Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы // Препринт. Хабаровск. 1978.

[3] *Steil G.* Eigenvalues of the Laplacian and of the Hecke operators for $PSL_2(Z)$ // DESY report 94-028, Hamburg, 1994.

[4] *Шимура Г.* Введение в арифметическую теорию автоморфных функций // Мир, М., 1973.

[5] *Huxley M.N.* Scattering matrices for congruence subgroups // In: Modular forms ed.by R.A.Rankin, p. 141-156, New York- Chichester-Brisbane-Toronto: Halsted Press, 1984.

[6] *Головчанский В.В., Смотров М.Н.* Явная формула для числа классов примитивных сопряженных гиперболических элементов группы $\Gamma_0(N)$ // Препринт. Хабаровск. 1994.

[7] *Головчанский В.В., Смотров М.Н.* Точная оценка сверху отношения числа классов группы $\Gamma_0(N)$ к числу классов модулярной группы // Препринт. Хабаровск. 1994.

Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения РАН,
Хабаровск

Владимир Васильевич Головчанский
Михаил Николаевич Смотров

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА, АВТОМОРФНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ $\Gamma_0(2^S N)$

Препринт № 14

Утверждено к печати ученым советом
Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН

**Издание осуществлено с оригинала-макета,
подготовленного автором с помощью системы $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX
(the American Mathematical Society's TEX macro system)
и выведенного через принтер LaserJet**

Лицензия ЛР № 040118 от 15.10.96 г. **Подписано к печати 15.10.99 г.**
Формат $60 \times 84/16$. Усл.п.л. 0,75. Уч.-изд.л. 0,49.
Тираж 100 экз. Заказ 157

Издательство «Дальнаука » ДВО РАН
690041, г. Владивосток, Радио, 7

Отпечатано в Хабаровском отделении **ИПМ ДВО РАН**
680000, г. Хабаровск, **Шевченко, 9**