

Собственные значения автоморфного лапласиана. Конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(8)$ и $\Gamma_0(16)$.

Здесь приводятся формулы следа и вычисленные собственные значения автоморфного лапласиана для групп $\Gamma_0(8)$ и $\Gamma_0(16)$. Все обозначения смотрите в начале [11]. В [7] и [8] доказано совпадение точек дискретных спектров автоморфного лапласиана для этих групп и установлена связь между размерностями подпространств собственных функций дискретных спектров соответствующих $\Gamma_0(4)$, $\Gamma_0(8)$ и $\Gamma_0(16)$. Из того, что расщепленная формула следа для $\Gamma_0(2^s)$ ($s > 3$) совпадает с расщепленной формулой следа для $\Gamma_0(8)$, следует, что новые собственные функции, в каждом подпространстве, появляются парами: четная и нечетная.

Теорема 1. Для $\alpha > 0$ и любого вещественного x

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (k_{8,j}^{Even} + k_{8,j}^{Odd}) h(\alpha, x, \kappa_{8,j}) &= \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r) h(\alpha, x, r) dr - \\ &- \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2ri) h(\alpha, x, r) dr - 2e^{-\alpha(x^2-1/4)} \cos(\alpha x) + \frac{(4 \ln \pi - 6 \ln 2)}{\sqrt{\alpha\pi}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}} \sum_q \ln q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(q, 8)}{q^m} e^{-\frac{\ln^2(q^m)}{\alpha}} \cos(x \ln(q^{2m})) + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}} \sum_{L=3}^{\infty} B(L, 8) e^{-\frac{\ln^2 \frac{L+\sqrt{L^2-4}}{2}}{\alpha}} \cos\left(2x \ln \frac{L+\sqrt{L^2-4}}{2}\right), \quad (1) \end{aligned}$$

где

$$\omega(q, 8) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 2; \\ 4, & \text{если } q \neq 2. \end{cases} \quad (2)$$

¹Хабаровское отделение Институт прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: gsm@iam.khv.ru

Теорема 2. Для $\alpha > 0$ и любого вещественного x

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (k_{16,j}^{Even} + k_{16,j}^{Odd}) h(\alpha, x, \varkappa_{16,j}) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r) h(\alpha, x, r) dr - \\ &- \frac{6}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2ri) h(\alpha, x, r) dr - 2e^{-\alpha(x^2-1/4)} \cos(\alpha x) + \frac{(6 \ln \pi - 14 \ln 2)}{\sqrt{\alpha \pi}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\alpha \pi}} \sum_q \ln q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(q, 16)}{q^m} e^{-\frac{\ln^2(q^m)}{\alpha}} \cos(x \ln(q^{2m})) + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\alpha \pi}} \sum_{L=3}^{\infty} B(L, 16) e^{-\frac{\ln^2 \frac{L+\sqrt{L^2-4}}{2}}{\alpha}} \cos\left(2x \ln \frac{L + \sqrt{L^2-4}}{2}\right), \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\omega(q, 16) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 2; \\ 6, & \text{если } q \neq 2. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 3. Пусть $N = 2^s$ ($s \geq 3$) - уровень конгруэнц-подгруппы, тогда для $\alpha > 0$ и любого вещественного x



$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (k_{N,j}^{Even} - k_{N,j}^{Odd}) h(\alpha, x, \varkappa_{N,j}) &= \\ &- \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(ir) h(\alpha, x, r) dr - 2e^{-\alpha(x^2-1/4)} \cos(\alpha x) + \frac{(4 \ln \pi - 4 \ln 2)}{\sqrt{\alpha \pi}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\alpha \pi}} \sum_q \ln q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(q, 8)}{q^m} e^{-\frac{\ln^2(q^m)}{\alpha}} \cos(x \ln(q^{2m})) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} b(n, 8) \cos\left(2x \ln \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right), \quad (5) \end{aligned}$$

где

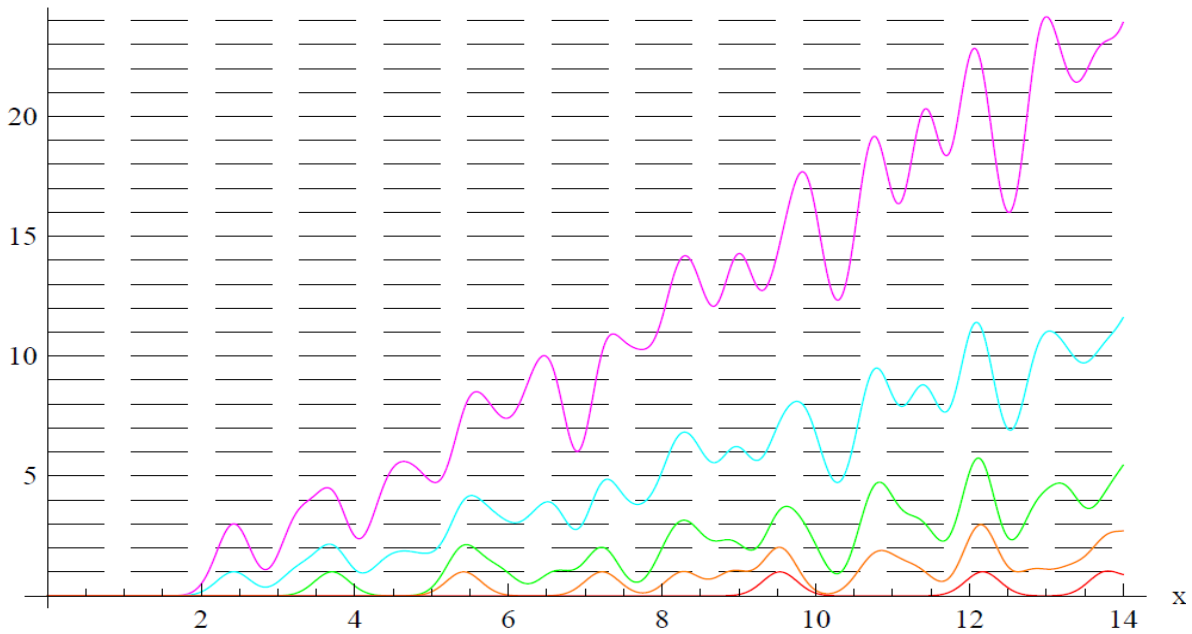
$$\omega(q, 8) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 2; \\ 4, & \text{если } q \neq 2. \end{cases} \quad (6)$$

Положим

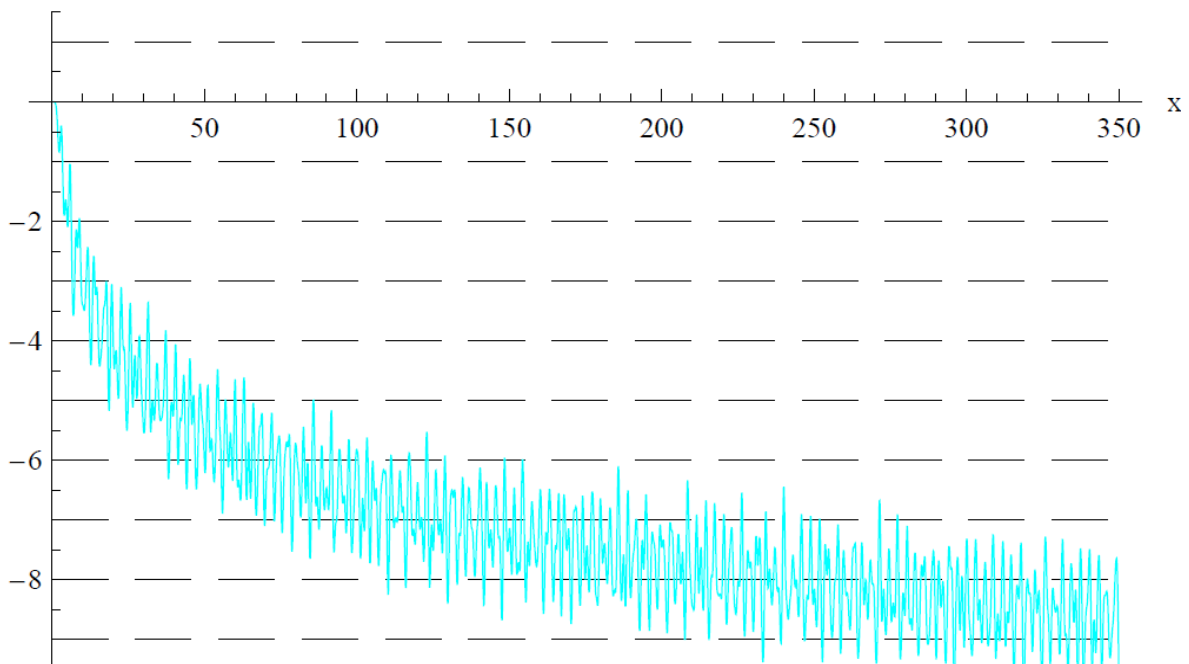
$$H(\alpha, x, N) = \sum_{j=1}^{\infty} (k_{N,j}^{\text{Even}} + k_{N,j}^{\text{Odd}}) h(\alpha, x, \varkappa_{N,j}) \text{ и } H_{\varepsilon}(\alpha, x, N) = \sum_{j=1}^{\infty} (k_{N,j}^{\text{Even}} - k_{N,j}^{\text{Odd}}) h(\alpha, x, \varkappa_{N,j}).$$

Ниже уровню $N = 1$ соответствует цвет  ; $N = 2$ - цвет  ; $N = 4$ -  ; $N = 8$ -  ; $N = 16$ - .

$H(10, x, N)$



$H_{\varepsilon}(2, x, 8)$



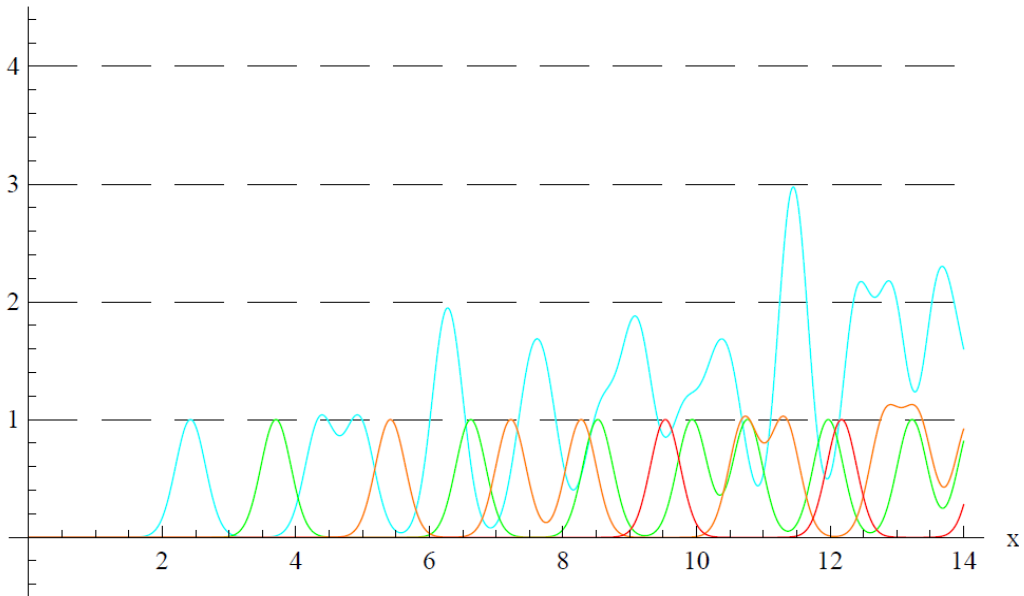
Интересно рассматривать линейные комбинации $H(\alpha, x, N)$ и $H_\varepsilon(\alpha, x, N)$. Например

$$\tilde{H}_{Odd}(\alpha, x, 8) = \frac{H(\alpha, x, 8) - 2H(\alpha, x, 4) + H(\alpha, x, 2) - (H_\varepsilon(\alpha, x, 8) - 2H_\varepsilon(\alpha, x, 4) + H_\varepsilon(\alpha, x, 2))}{2}. \quad (7)$$

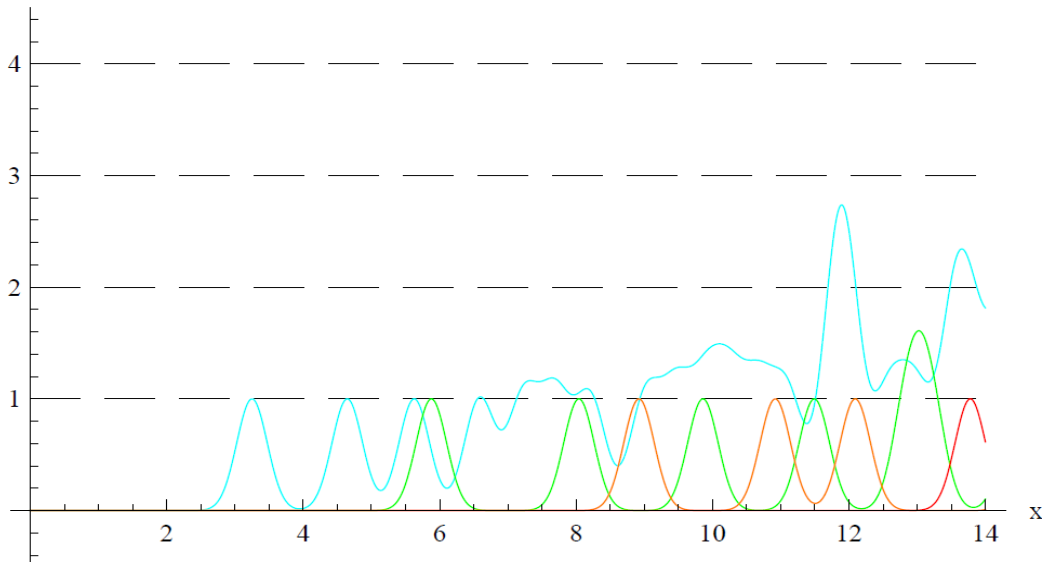
$$\tilde{H}_{Odd}(\alpha, x, 8) = \sum_{j=1}^{\infty} h(\alpha, x, \varkappa'_{8,j}),$$

здесь суммирование идет только по тем точкам дискретного спектра собственные функции которых нечетные и только новые.

$H_{Odd}(10, x, N)$



$H_{Even}(10, x, N)$



В таблице приведены вычисленные по формулам (1), (3) и (5) собственные значения для группы $\Gamma_0(16)$. В столбце "группа" указана конгруэнц-подгруппа, для которой это собственное значение появляется впервые, в следующем столбце кратность собственного значения для группы $\Gamma_0(16)$.

| j | Нечетные | Группа | $k_{16,j}^{Неч}$ | Четные | Группа | $k_{16,j}^{Чет}$ |
|----|------------|----------------|------------------|------------|----------------|------------------|
| 1 | 2.42505683 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 2.42505683 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 2 | 3.24997696 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 3.24997696 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 3 | 3.7033078 | $\Gamma_0(4)$ | 3 | 3.7033078 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 4 | 4.36801954 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 4.36801954 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 5 | 4.64659164 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 4.64659164 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 6 | 4.94783168 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 4.94783168 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 7 | 5.41733481 | $\Gamma_0(2)$ | 4 | 5.41733481 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 8 | 5.62812093 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 5.62812093 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 9 | 5.87935416 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 5.87935416 | $\Gamma_0(2)$ | 3 |
| 10 | 6.22318083 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 6.22318083 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 11 | 6.32531406 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 6.32531406 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 12 | 6.58769285 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 6.58769285 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 13 | 6.62042287 | $\Gamma_0(4)$ | 3 | 6.62042287 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 14 | 7.22087198 | $\Gamma_0(2)$ | 4 | 7.22087198 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 15 | 7.22656907 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 7.22656907 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 16 | 7.48301812 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 7.48301812 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 17 | 7.69684781 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 7.69684781 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 18 | 7.74444774 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 7.74444774 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 19 | 8.04247759 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 8.04247759 | $\Gamma_0(2)$ | 3 |
| 20 | 8.21171118 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 8.21171118 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 21 | 8.27366589 | $\Gamma_0(2)$ | 4 | 8.27366589 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 22 | 8.52250302 | $\Gamma_0(4)$ | 3 | 8.52250302 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 23 | 8.55288033 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 8.55288033 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 24 | 8.92287649 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 8.92287649 | $\Gamma_0(2)$ | 4 |
| 25 | 9.00120581 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 9.00120581 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 26 | 9.01322849 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 9.01322849 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 27 | 9.19652685 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 9.19652685 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 28 | 9.47008313 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 9.47008313 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 29 | 9.53369526 | $\Gamma_0(1)$ | 5 | 9.53369526 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 30 | 9.81001812 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 9.81001812 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 31 | 9.85989616 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 9.85989616 | $\Gamma_0(2)$ | 3 |
| 32 | 9.9039777 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 9.9039777 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 33 | 9.93491996 | $\Gamma_0(4)$ | 3 | 9.93491996 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 34 | 10.2618143 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 10.2618143 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 35 | 10.2659151 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 10.2659151 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 36 | 10.538808 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 10.538808 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 37 | 10.6817988 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 10.6817988 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 38 | 10.7127069 | $\Gamma_0(2)$ | 4 | 10.7127069 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 39 | 10.7647107 | $\Gamma_0(4)$ | 3 | 10.7647107 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 40 | 10.920392 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 10.920392 | $\Gamma_0(2)$ | 4 |
| 41 | 11.1062704 | $\Gamma_0(16)$ | 1 | 11.1062704 | $\Gamma_0(8)$ | 2 |
| 42 | 11.3176797 | $\Gamma_0(2)$ | 4 | 11.3176797 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 43 | 11.411087 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 11.411087 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 44 | 11.4534299 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 11.4534299 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |
| 45 | 11.4816146 | $\Gamma_0(8)$ | 2 | 11.4816146 | $\Gamma_0(16)$ | 1 |

Список литературы

- [1] Н. В. Кузнецов, “Арифметическая форма формулы следа Сельберга и распределение норм примитивных гиперболических классов модулярной группы”, *препринт, Хабаровск*, 1978, 44.
- [2] Н. В. Кузнецов, “Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы”, *препринт, Хабаровск*, 1978, 43.
- [3] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Явная формула числа классов примитивных гиперболических элементов группы $\Gamma_0(N)$ ”, *препринт, Хабаровск*, 1994, 36.
- [4] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Явная формула числа классов примитивных гиперболических элементов группы $\Gamma_0(N)$ ”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 63–84; *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1009–1031.
- [5] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Точная оценка сверху отношения числа классов группы $\Gamma_0(N)$ к числу классов модулярной группы”, *препринт, Хабаровск*, 1994, 36.
- [6] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Мультипликативные свойства функции числа классов примитивных гиперболических элементов конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$ по уровню N ”, *Дальневост. матем. журн.*, **9**:1-2 (2009), 48–73.
- [7] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “О дискретном спектре лапласиана, автоморфного относительно группы $\Gamma_0(2^s N)$ ”, *препринт, Хабаровск*, 1994, 36.
- [8] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “О спектре оператора Лапласа–Бельтрами для некоторых конгруэнц-подгрупп модулярной группы”, *Алгебра и анализ*, **23**:4 (2011), 31–39; *St. Petersburg Math. J.*, **23**:4 (2012), 659–664.
- [9] М. Н. Смотров, “По следам Н. В. Кузнецова”, <http://www.iam.khv.ru/staff/Smotrov.php>, 2014.
- [10] M. N. Huxley, “Scattering matrices for congruence subgroups”, in *Modular forms (Durham, 1983)*, New York, 1984, 141–156.
- [11] М. Н. Смотров, “Собственные значения автоморфного лапласиана. Конгруэнц-подгруппа $\Gamma_0(2)$ ”, <http://www.iam.khv.ru/staff/Smotrov.php>, 2014.
- [12] М. Н. Смотров, “Собственные значения автоморфного лапласиана. Конгруэнц-подгруппа $\Gamma_0(4)$ ”, <http://www.iam.khv.ru/staff/Smotrov.php>, 2014.

Дата опубликования 18 ноября 2014 г.
