© М. Н. Смотров[1]

Собственные значения автоморфного лапласиана. Конгруэнц-подгруппа $\Gamma_0(4)$.

Здесь приводятся формулы следа и вычисленные собственные значения автоморфного лапласиана для группы $\Gamma_0(4)$. Все обозначения смотрите в начале [9].

Теорема 1. *Для $\alpha > 0$ и любого вещественного x*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{k}_{4,j}^{Even} + \boldsymbol{k}_{4,j}^{Odd})h(\alpha, x, \varkappa_{4,j}) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r\tanh{(\pi r)}h(\alpha, x, r)dr -$$

$$- \frac{3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2ri)h(\alpha, x, r)dr - 2e^{-\alpha(x^2-1/4)}\cos(\alpha x) + \frac{(3\ln\pi - 2\ln 2)}{\sqrt{\alpha\pi}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}}\sum_{q}\ln q\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega(q,4)}{q^m}e^{-\dfrac{\ln^2(q^m)}{\alpha}}\cos(x\ln(q^{2m})) +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}}\sum_{L=3}^{\infty}B(L,4)e^{-\dfrac{\ln^2\frac{L+\sqrt{L^2-4}}{2}}{\alpha}}\cos\left(2x\ln\frac{L+\sqrt{L^2-4}}{2}\right), \quad (1)$$

где

$$\omega(q,4) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 2; \\ 3, & \text{если } q \neq 2. \end{cases} \quad (2)$$

[1]Хабаровское отделение Институт прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: gsm@iam.khv.ru

Теорема 2. *Для $\alpha > 0$ и любого вещественного x*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{k}_{4,j}^{Even} - \boldsymbol{k}_{4,j}^{Odd})h(\alpha, x, \varkappa_{4,j}) =$$

$$-\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(ir)h(\alpha,x,r)dr - 2e^{-\alpha(x^2-1/4)}\cos(\alpha x) + \frac{(3\ln\pi - 2\ln 2)}{\sqrt{\alpha\pi}} +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}}\sum_q \ln q \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega(q,4)}{q^m}e^{-\dfrac{\ln^2(q^m)}{\alpha}}\cos(x\ln(q^{2m}))+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty} b(n,4)\cos\left(2x\ln\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right), \quad (3)$$

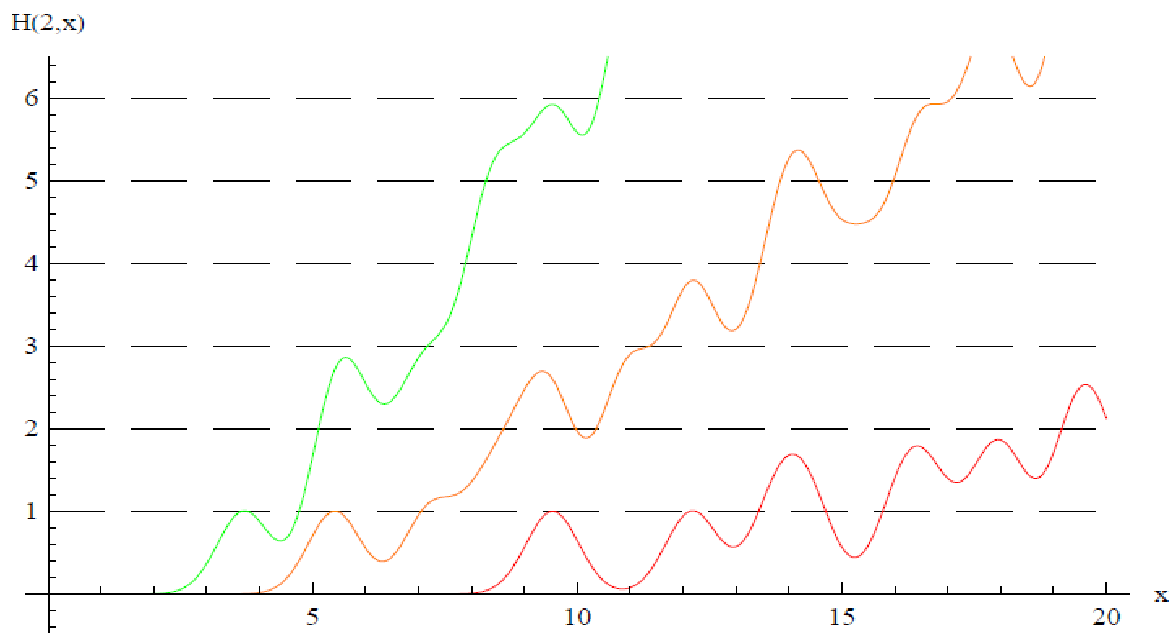
где

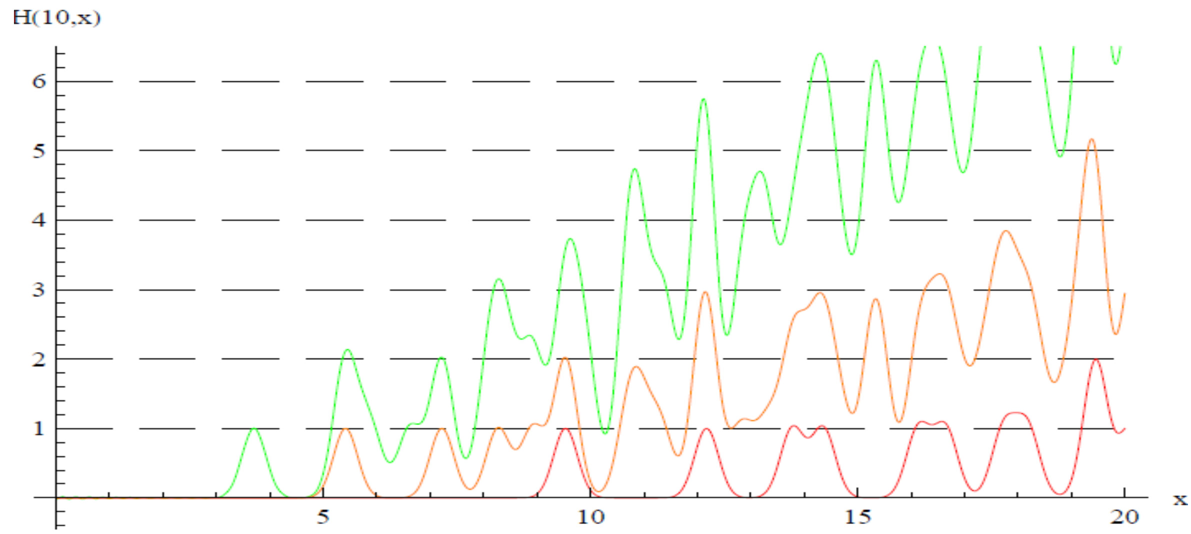
$$\omega(q,4) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 2; \\ 3, & \text{если } q \neq 2. \end{cases} \quad (4)$$

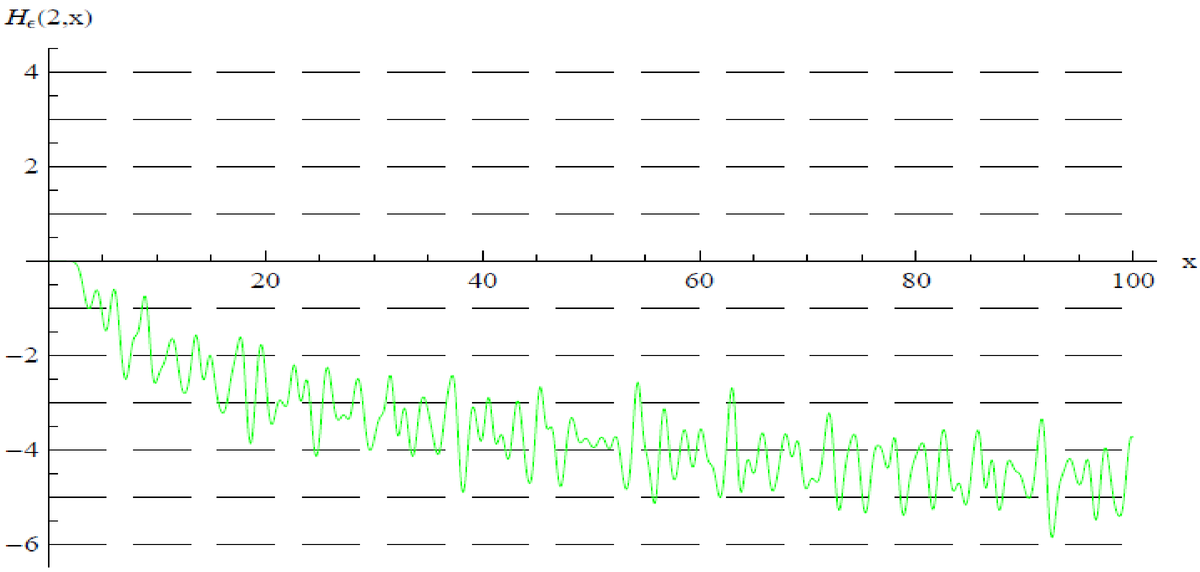
Ниже приведены графики функций следа для уровней 1, 2, 4 при различных значений α, а также таблица вычисленных собственных значений. Красный график соответствует модулярной группе $\Gamma_0(1)$, оранжевый - группе $\Gamma_0(2)$, зеленый - группе $\Gamma_0(4)$. Как и в [9]

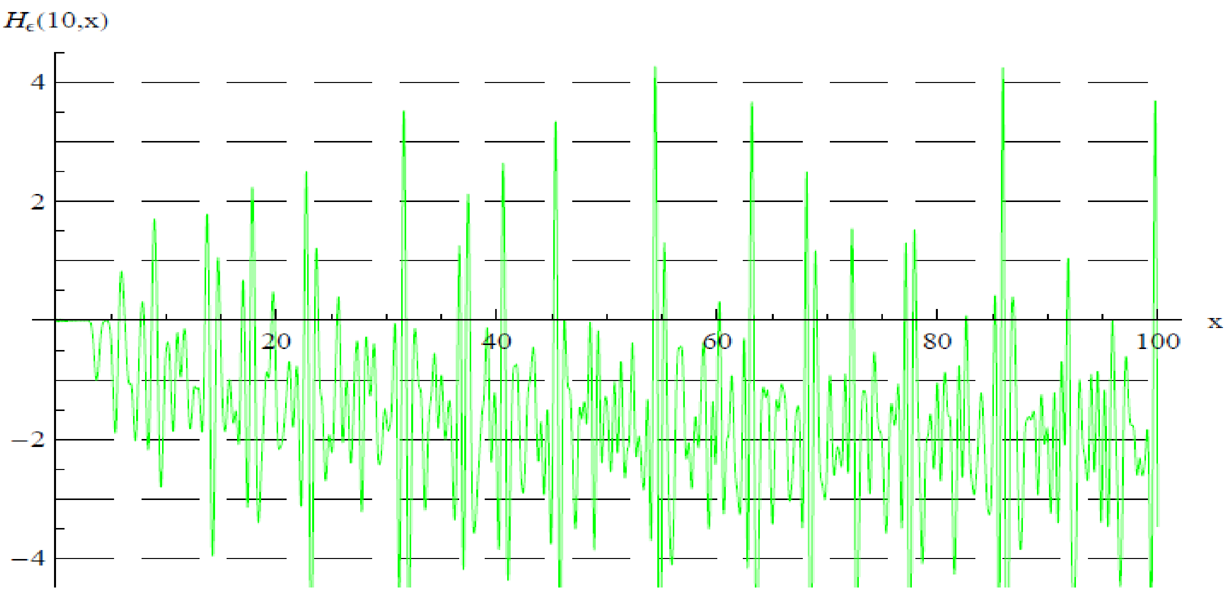
$$H(\alpha,x) = \sum_{j=1}^{\infty}(\mathtt{k}_{4,j}^{\mathrm{Even}} + \mathtt{k}_{4,j}^{\mathrm{Odd}})h(\alpha,x,\varkappa_{4,j}) \text{ и } H_\varepsilon(\alpha,x) = \sum_{j=1}^{\infty}(\mathtt{k}_{4,j}^{\mathrm{Even}} - \mathtt{k}_{4,j}^{\mathrm{Odd}})h(\alpha,x,\varkappa_{4,j}). \quad (5)$$

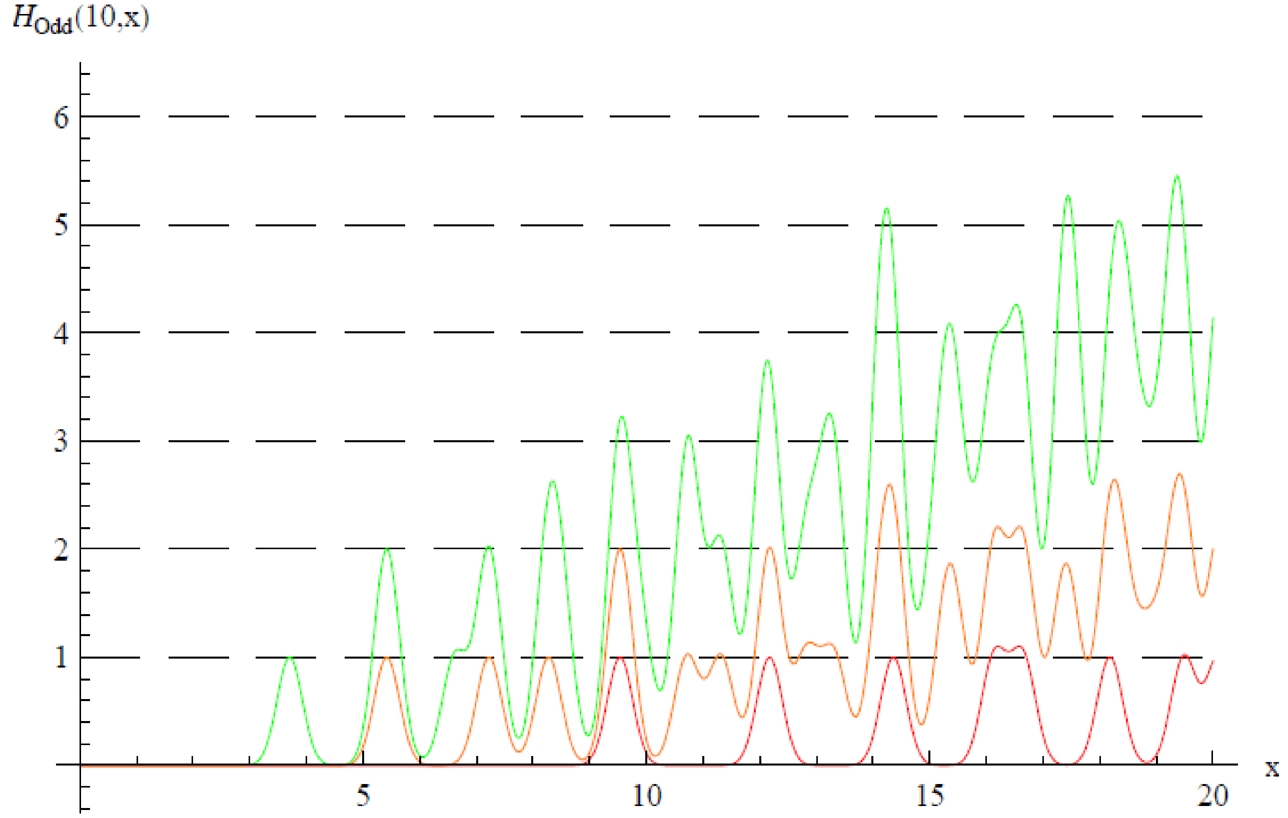
.

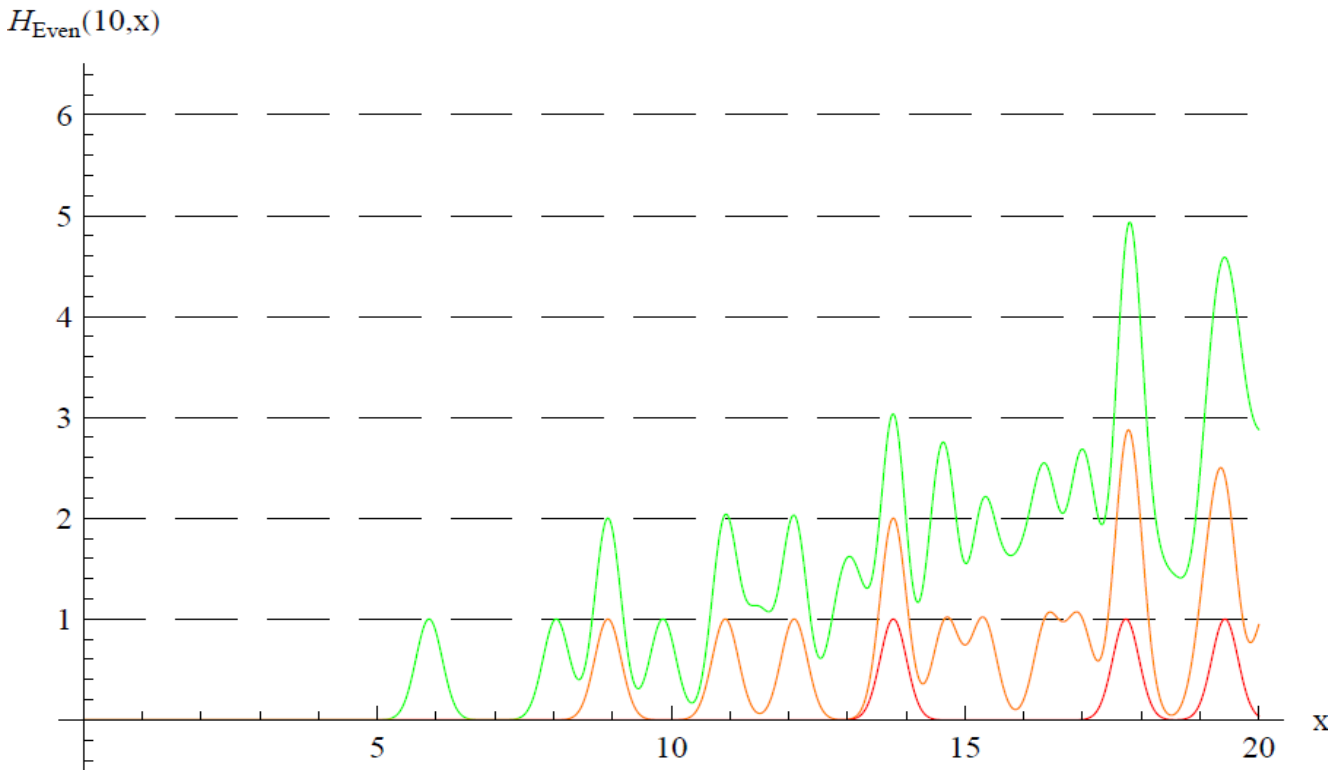



H(10,x)
6
5
4
3
2
1
5
10
15
20
x


$H_\epsilon(2,x)$
4
2
20
40
60
80
100
x
−2
−4
−6


$H_\epsilon(10,x)$
4
2
20
40
60
80
100
x
−2
−4


$H_{Odd}(10,x)$
6
5
4
3
2
1
5
10
15
20
x


$H_{Even}(10,x)$
6
5
4
3
2
1
5
10
15
20
x

j	Нечетные	группа	$k_{4,j}^{Odd}$	Четные	группа	$k_{4,j}^{Even}$
1	3.70330780	$\Gamma_0(4)$	1			
2	5.41733481	$\Gamma_0(2)$	2			
3				5.87935416	$\Gamma_0(4)$	1
4	6.62042287	$\Gamma_0(4)$	1			
5	7.22087198	$\Gamma_0(2)$	2			
6				8.04247759	$\Gamma_0(4)$	1
7	8.27366589	$\Gamma_0(2)$	2			
8	8.52250302	$\Gamma_0(4)$	1			
9				8.92287649	$\Gamma_0(2)$	2
10	9.53369526	$\Gamma_0(1)$	3			
11				9.85989616	$\Gamma_0(4)$	1
12	9.93491996	$\Gamma_0(4)$	1			
13	10.71270690	$\Gamma_0(2)$	2			
14	10.76471068	$\Gamma_0(4)$	1			
15				10.92039200	$\Gamma_0(2)$	2
16	11.31767970	$\Gamma_0(2)$	2			
17				11.49300441	$\Gamma_0(4)$	1
18	11.97277669	$\Gamma_0(4)$	1			
19				12.09299488	$\Gamma_0(2)$	2
20	12.17300832	$\Gamma_0(1)$	3			
21	12.82198816	$\Gamma_0(2)$	2			
22				12.87761656	$\Gamma_0(4)$	1
23				13.17207497	$\Gamma_0(4)$	1
24	13.22882871	$\Gamma_0(4)$	1			
25	13.31016428	$\Gamma_0(2)$	2			
26				13.77975135	$\Gamma_0(1)$	3
27	14.09720373	$\Gamma_0(2)$	2			
28	14.14388507	$\Gamma_0(4)$	1			
29	14.35850952	$\Gamma_0(1)$	3			
30				14.477802732	$\Gamma_0(4)$	1
31	14.97031307	$\Gamma_0(4)$	1			
32				14.68501595	$\Gamma_0(2)$	2
33	15.27402248	$\Gamma_0(2)$	2			
34				15.31419658	$\Gamma_0(2)$	2
35	15.44287774	$\Gamma_0(2)$	2			
36				15.74344565	$\Gamma_0(4)$	1
37	15.80932062	$\Gamma_0(4)$	1			
38				16.09359238	$\Gamma_0(4)$	1
39	16.13807317	$\Gamma_0(1)$	3			
40				16.40410878	$\Gamma_0(2)$	2
41	16.47825898	$\Gamma_0(4)$	1			
42	16.64425920	$\Gamma_0(1)$	3			
43				16.94026095	$\Gamma_0(2)$	2
44				17.19512721	$\Gamma_0(4)$	1
45	17.31933340	$\Gamma_0(2)$	2			

Список литературы

[1] Н. В. Кузнецов, “Арифметическая форма формулы следа Сельберга и рапределение норм примитивных гиперболических классов модулярной группы”, *препринт, Хабаровск*, 1978, 44.

[2] Н. В. Кузнецов, “Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы”, *препринт, Хабаровск*, 1978, 43.

[3] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Явная формула числа классов примитивных гиперболических элементов группы $\Gamma_0(N)$”, *препринт, Хабаровск*, 1994, 36.

[4] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Явная формула числа классов примитивных гиперболических элементов группы $\Gamma_0(N)$”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 63–84; *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1009–1031.

[5] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Точная оценка сверху отношения числа классов группы $\Gamma_0(N)$ к числу классов модулярной группы”, *препринт, Хабаровск*, 1994, 36.

[6] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, “Мультипликативные свойства функции числа классов примитивных гиперболических элементов конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$ по уровню N”, *Дальневост. матем. журн.*, **9**:1-2 (2009), 48–73.

[7] М. Н. Смотров, “По следам Н.В. Кузнецова”, *http://www.iam.khv.ru/staff/Smotrov.php*, 2014.

[8] M. N. Huxley, “Scattering matrieces for congruence subgroups”, *in Modula forms (Durham, 1983), New York*, 1984, 141-156.

[9] М. Н. Смотров, “Собственные значения автоморфного лапласиана. Конгруэнц-подгруппа $\Gamma_0(2)$”, *http://www.iam.khv.ru/staff/Smotrov.php*, 2014.