М. Н. Смотров

По следам Н. В. Кузнецова

Введение

Николай Васильевич Кузнецов в препринтах [1] и [2] доказал две формулы: одну он назвал "арифметическая форма формулы следа Сельберга,"вторую "расщепленная форма формулы следа". Электронные pdf-копии этих препринтов имеются на сайте ХО ИПМ ДВО РАН (http://www.iam.khv.ru/staff/Smotrov.php). Во введении приводятся минимально-необходимые обозначения, формулы Н. В. Кузнецова (все подробности в [1], [2]), и формулируется основной результат (теорема 3).

λ_j и $u_j(z)$ - собственные значения и собственные функции автоморфного лапласиана,

$$u_j(z) \text{ - четная, если } u_j(-\overline{z}) = u_j(z)$$

и

$$u_j(z) \text{ - нечетная, если } u_j(-\overline{z}) = -u_j(z).$$

В первой формуле следа, у Н. В. Кузнецова (см. [1, с.4]), естественным образом появляются числа

$$B(n) = \frac{\pi^2}{6}\mathrm{Res}_{s=1}L_n^{(+)}(s), \text{ где } n \geq 3,\ L_n^{(+)}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{A_n(c)}{c^s} \tag{1}$$

и $A_n(c)$ - число решений сравнения $x^2 + nx + 1 \equiv 0 \bmod c$.

В расщепленной формуле(см. [2, с.11]), также естественно, появляются числа

$$b(n) = \frac{\pi^2}{6}\mathrm{Res}_{s=1}L_n^{(-)}(s), \text{ где } n \geq 1,\ L_n^{(-)}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{a_n(c)}{c^s} \tag{2}$$

и $a_n(c)$ - число решений сравнения $x^2 + nx - 1 \equiv 0 \bmod c$.

Определения чисел $B(n)$ и $b(n)$ отличаются только знаком в сравнениях:

$$x^2 + nx + 1 \equiv 0 \mod c \text{ и } x^2 + nx - 1 \equiv 0 \mod c.$$

Теперь процитируем препринт (см. [2, с.11-12]).

[1]Хабаровское отделение Институт прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: gsm@iam.khv.ru

Теорема 1. (Н.В. Кузнецов) *Пусть $h(r)$ - четная функция комплексного переменного r, регулярная в полосе $|Imr| \le \Delta$ с $\Delta > \frac{3}{4}$ и при $|r| \to \infty$ в этой полосе $h(r) = O(|r|^{-2-\delta})$ для некоторого фиксированного $\delta > 0$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(\varkappa_j) = \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} r\tanh(\pi r)h(r)dr+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}+ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2ir)\right)h(r)dr+$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\cosh\frac{\pi r}{3}\right)\frac{h(r)}{\cosh(\pi r)}dr + \frac{1}{2}h(0)+$$
$$2\sum_{n=3}^{\infty} B(n)g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right), \quad (3)$$

где $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, *и*

$$g(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-irv}h(r)dr.$$

Теорема 2. (Н.В. Кузнецов) *Пусть $h(r)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j h(\varkappa_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\ln\pi + \frac{\ln}{2} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1+2ir) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-2ir)\right)h(r)dr+$$
$$\frac{1}{2}h(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} b(n)g\left(2\ln\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right), \quad (4)$$

где

$$\varepsilon_j == \begin{cases} +1, & \text{если } u_j(z) \text{ - четная;} \\ -1, & \text{если } u_j(z) \text{ - нечетная.} \end{cases}$$

Основной результат этой работы теорема связывающая числа Кузнецова: $B(n)$ и $b(n)$.

Теорема 3. *Пусть $L = n^2 + 2$, где n - натуральное, тогда*

$$b(n) = \begin{cases} B(L), & \text{если } n \equiv 1 \bmod 2; \\ \frac{2}{3}B(L), & \text{если } n = 2m, (m,2) = 1; \\ \frac{8}{11}B(L), & \text{если } n = 4m, (m,2) = 1; \\ B(L), & \text{если } n = 2^{\gamma}m, (m,2) = 1, \gamma > 3. \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство теоремы 3.

В определениях (1) и (2) функции $A_n(c)$ и $a_n(c)$ мультипликативные, поэтому

$$L_n^{(+)}(s) = \prod_p v_p(s;n) \text{ и } L_n^{(-)}(s) = \prod_p \overline{v}_p(s;n),$$

где произведение берется по всем простым p,

$$v_p(s;n) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_n(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \text{ и } \overline{v}_p(s;n) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_n(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}.$$

Н. В. Кузнецов доказал (см. [1, с.4, 20-25]), что

$$B(n) = \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\equiv 1 \bmod 2}} \frac{1}{m}\left(\frac{n^2-4}{m}\right) v_2(1;n) \prod_{\substack{p>2 \\ p\,|\,n^2-4}} (1+\frac{1}{p})^{-1} v_p(1;n). \tag{6}$$

Здесь и далее $\left(\frac{*}{*}\right)$ - символ Лежандра, p - простое. Приведем, необходимые для доказательства основного результата, случаи значений $v_p(1;n)$.
Если $n \equiv 1 \bmod 2$, тогда

$$v_2(1;n) = 1. \tag{7}$$

Если $n \equiv 0 \bmod 4$, тогда

$$v_2(1;n) = \frac{3}{2}. \tag{8}$$

Если $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1 = 2^\gamma m$, где $(m;2) = 1$, тогда

$$v_2(1;n) = \begin{cases} 3(1-2^{-\gamma_1}), & \text{если } \gamma = 2\gamma_1 - 1; \\ 3, & \text{если } \gamma = 2\gamma_1, m \equiv 1 \bmod 8; \\ 3 - 2^{-\gamma_1}, & \text{если } \gamma = 2\gamma_1, m \equiv 1 \bmod 8. \end{cases} \tag{9}$$

Если $p > 2$ и $n^2 - 4 = p^{2\gamma} m$, $\gamma \geq 1$ и $(m;p) = 1$, тогда

$$v_p(1;n) = \frac{p^{\gamma+1} + p^\gamma - 1 + \left(\frac{m}{p}\right)}{p^\gamma(p-1)}. \tag{10}$$

Для чисел вида (2) Н. В. Кузнецов не написал формул аналогичных (6)-(10), получить их не сложно следуя указаниям из [1, с.4, 20-25].

$$b(n) = \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\equiv 1 \bmod 2}} \frac{1}{m}\left(\frac{n^2+4}{m}\right) \overline{v}_2(1;n) \prod_{\substack{p>2 \\ p\,|\,n^2+4}} (1+\frac{1}{p})^{-1} \overline{v}_p(1;n) \tag{11}$$

Если $n \equiv 1 \bmod 2$, тогда

$$\overline{v}_2(1;n) = 1. \tag{12}$$

Если $n = 2k,\ (k,2) = 1$, тогда
$$\overline{v}_2(1;n) = \frac{3}{2}. \qquad (13)$$
Если $n = 4k,\ (k,2) = 1$, тогда
$$\overline{v}_2(1;n) = 2. \qquad (14)$$
Если $n = 2^\gamma k,\ (k,2) = 1$ и $\gamma \geq 3$, тогда
$$\overline{v}_2(1;n) = 3. \qquad (15)$$

Доказательство теоремы 3. По условию теоремы $L = n^2 + 2$, следовательно $L^2 - 4 = n^2(n^2+4)$ и
$$B(L) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv 1 \bmod 2}} \frac{1}{m}\left(\frac{n^2(n^2+4)}{m}\right) v_2(1;n^2+2) \prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n^2(n^2+4)}} (1+\frac{1}{p})^{-1} v_p(1;n^2+2) \qquad (16)$$

Рассмотрим ряд Дирихле из (16)

$$\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv 1 \bmod 2}} \frac{1}{m}\left(\frac{n^2(n^2+4)}{m}\right) = \prod_{\substack{p>2\\ p\nmid n}} \left(1 - \left(\frac{n^2+4}{p}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1} =$$
$$\prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{(n^2+4)}{p}\right)\frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n}} \left(1 - \left(\frac{n^2+4}{p}\right)\frac{1}{p}\right)$$

Так как при $p \mid n$ символ Якоби $\left(\frac{n^2+4}{p}\right) = 1$, получаем связь рядов Дирихле из формул (11) и (16)
$$\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv 1 \bmod 2}} \frac{1}{m}\left(\frac{n^2(n^2+4)}{m}\right) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\equiv 1 \bmod 2}} \frac{1}{m}\left(\frac{n^2+4}{m}\right) \cdot \prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \qquad (17)$$

Далее, последнее произведение в (16) разобьем на два, это возможно, так как простое $p > 2$ не может быть делителем n^2 и n^2+4 одновременно.

$$\prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n(n^2+4)}} (1+\frac{1}{p})^{-1} v_p(1;n^2+2) =$$
$$\prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n}} (1+\frac{1}{p})^{-1} v_p(1;n^2+2) \prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n^2+4}} (1+\frac{1}{p})^{-1} v_p(1;n^2+2). \qquad (18)$$

Вычислим $v_p(1;n^2+2)$ при $p \mid n$ с помощью формулы (10).
$$(n^2+2)^2 - 4 = n^2(n^2+4) = p^{2\gamma} m^2(n^2+4), \gamma \geq 1, (m(n^2+4), p) = 1$$

$$v_p(1;n^2+2) = \frac{p^{\gamma+1}+p^{\gamma}-1+\left(\frac{m^2(n^2+4)}{p}\right)}{p^{\gamma}(p-1)} = \frac{p+1}{p-1}. \tag{19}$$

Получаем

$$\prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n}}(1+\frac{1}{p})^{-1}v_p(1;n^2+2) = \prod_{\substack{p>2\\ p\,|\,n}}(1-\frac{1}{p})^{-1} \tag{20}$$

При условии $p \mid n^2+4$, следует,

$$v_p(1;n^2+2) = \overline{v}_p(1;n) \tag{21}$$

Действительно число решений сравнения

$$x^2+(n^2+2)x+1 \equiv 0 \mod p^{\alpha}$$

равно числу решений сравнения

$$x^2 \equiv n^2(n^2+4) \mod p^{\alpha}. \tag{22}$$

Число решений сравнения

$$x^2+nx-1 \equiv 0 \mod p^{\alpha}$$

равно числу решений сравнения

$$x^2 \equiv n^2+4 \mod p^{\alpha}. \tag{23}$$

При условии $p \mid n^2+4$, следует, равенство числа решений сравнений (22) и (23), что и доказывает (21).

И последнее, применяя формулы (11), (16), (17), (18),(20), (21) получаем

$$\frac{b(n)}{B(n^2+2)} = \frac{\overline{v}_2(1;n)}{v_2(1;n^2+2)}. \tag{24}$$

Используя формулы (7), (8), (9), (12),(13), (14), (15) в (24), получаем доказательство теоремы.

Приложение

В статьях [3] и [4] приведены формулы по которым можно вычислить $B(L)$ для любой конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$. По теореме 3 получить численные значения $b(n)$. Возьмем функцию

$$h(\alpha,x,r) = e^{-\alpha(x-r)^2}+e^{-\alpha(x+r)^2}. \tag{25}$$

Для любых вещественных x и $\alpha \geq 1$ эта функция по переменной r удовлетворяет условиям теоремы 1.

Положим

$$H(\alpha, x) = \sum_{j=1}^{\infty} h(\alpha, x, \varkappa_j) \text{ и } H_\varepsilon(\alpha, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j h(\alpha, x, \varkappa_j), \tag{26}$$

где ε_j определено в теореме 2. Графики этих функций дают визуальную интерпретацию следа автоморфного лапласиана (см. рис. 1 и рис. 2 на следующей странице).

В полусумме этих функций будут только собственные значения собственные функции которых четные, в полуразности этих функций будут только собственные значения собственные функции которых нечетные (см. рис. 3 и рис. 4 на следующей странице).

$$H_{even}(\alpha, x) = \frac{1}{2}\left(H(\alpha, x) + H_\varepsilon(\alpha, x)\right) \text{ и } H_{odd}(\alpha, x) = \frac{1}{2}\left(H(\alpha, x) - H_\varepsilon(\alpha, x)\right) \tag{27}$$

Список литературы

[1] Н. В. Кузнецов, "Арифметическая форма формулы следа Сельберга и рапределение норм примитивных гиперболических клаасов модулярной группы", *препринт*, 1978, 44.

[2] Н. В. Кузнецов, "Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы", *препринт*, 1978, 43.

[3] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, "Мультипликативные свойства функции числа классов примитивных гиперболических элементов конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$ по уровню N", *Дальневост. матем. журн.*, **9**:1-2 (2009), 48–73.

[4] В. В. Головчанский, М. Н. Смотров, "Явная формула числа классов примитивных гиперболических элементов группы $\Gamma_0(N)$", *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 63–84; *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1009–1031.

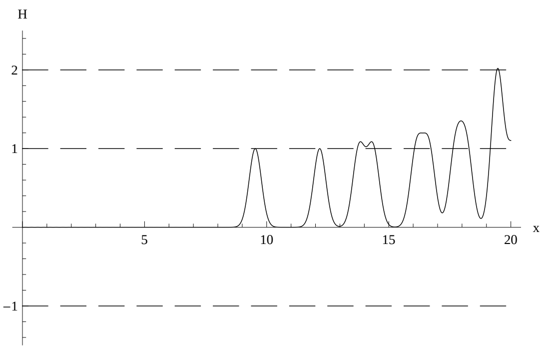

Рис. 1. $\Gamma_0(1)$, $H(8,x)$

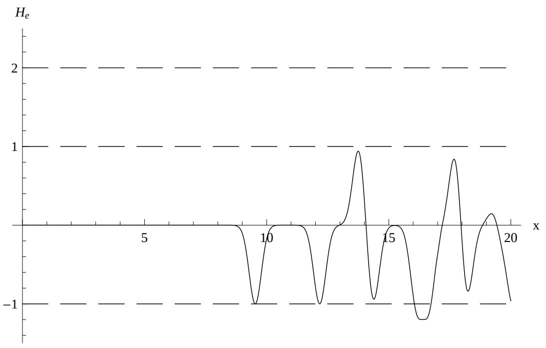

Рис. 2. $\Gamma_0(1)$, $H_\varepsilon(8,x)$

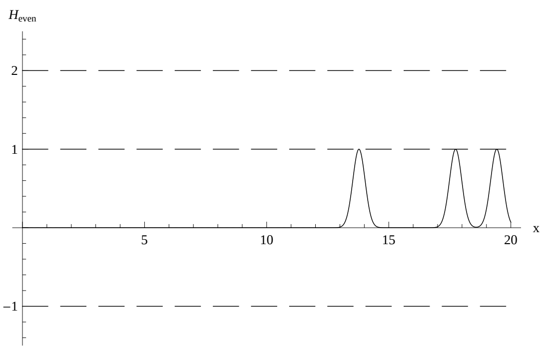

Рис. 3. $\Gamma_0(1)$, $H_{Even}(8,x)$, $\varkappa_1 \approx 13.779751352$

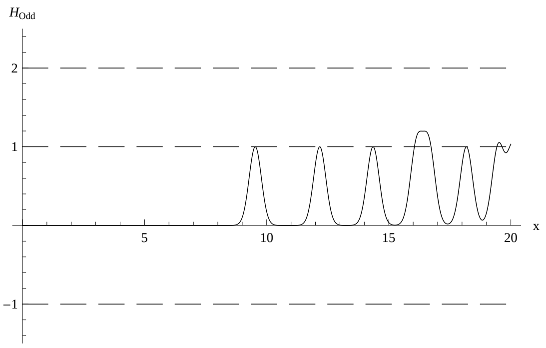

Рис. 4. $\Gamma_0(1)$, $H_{Odd}(8,x)$,$\varkappa_1 \approx 9.533695261$