Дальневосточный математический журнал. 2025. Т. 25. № 2. С. 271–277

УДК 517.95
MSC2020 35Q79

© А. Ю. Чеботарев[1]

Релейность управления в задаче оптимизации сложного теплообмена

Рассматривается задача оптимального управления с граничным наблюдением для стационарной модели сложного теплообмена. Доказана разрешимость задачи и получены условия оптимальности, на основе которых обоснован строгий принцип bang-bang — релейность оптимального управления.

Ключевые слова: *сложный теплообмен, диффузионное приближение, оптимальное управление, релейность управления.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202521

Введение

При моделировании процессов сложного теплообмена с учетом внутреннего теплового излучения хорошую эффективность показало использование диффузионного P_1–приближения для уравнения переноса излучения. Особую важность при этом представляют задачи оптимального управления теплообменом. Анализ различных постановок краевых задач и задач управления для диффузионных моделей сложного теплообмена представлен в работах [1–9].

Для задач оптимального управления с ограничениями на управление в виде неравенств часто удается установить аналог принципа bang-bang, т.е. оптимальное управление принимает либо минимальное, либо максимальное значение в точках области определения управления, где так называемая функция переключения не обращается в ноль. Последнее позволяет существенно упростить алгоритмы нахождения оптимального управления для нелинейных систем. Отметим статью [7], в которой предложен алгоритм решения задачи оптимального управления для квазистационарных уравнений сложного теплообмена и представлен обзор работ, использующих bang-bang принцип для оптимального управления.

Для корректного построения алгоритма на основе принципа bang-bang важно знать, что функция переключения не обращается в ноль на множестве ненулевой меры. Обоснование этого приводит к релейности управления (строгий принцип bang-bang). В противном случае нет информации об оптимальном управлении на таком

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: chebotarev.ayu@dvfu.ru

множестве. В качестве примера можно отметить работы [2,4,6], посвященные анализу задач оптимального управления для уравнений сложного теплообмена, где в качестве управления выбиралась чернота границы области и где установлен принцип bang-bang. Однако в указанных работах не доказано, что функция переключения не обращается в ноль на множестве ненулевой меры.

Данная работа посвящена анализу задачи оптимального управления для стационарных уравнений сложного теплообмена с граничным наблюдением и доказательству релейности оптимального управления.

Рассмотрим сложный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, граница Γ которой состоит из двух участков Γ_0, Γ_1, $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Стационарная диффузионная модель (P_1–приближение) имеет вид [1,3]

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = u, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = \mathrm{g}, \tag{1}$$

$$\partial_n\theta\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \partial_n\varphi\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)\,\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma_1} = 0. \tag{2}$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Физический смысл параметров a, b, κ_a, α, β, γ представлен в [3]. Управлением является плотность внутренних источников тепла u. Функция g моделирует плотность источников теплового излучения. Символом ∂_n обозначаем производную по направлению внешней нормали к границе Γ.

Задача оптимального управления состоит в нахождении функций u, θ и φ, удовлетворяющих (1)-(2) при условии минимизации целевого функционала $J(\theta)$,

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_0} (\theta - \theta_d)^2 d\Gamma \to \inf, \quad u \in U_{ad}.$$

Здесь $U_{ad} \subset L^2(\Omega)$ — множество допустимых управлений,

$$U_{ad} = \left\{ v \in L^2(\Omega)\ : \operatorname{supp} v \subset \bar{\Omega}_c,\ 0 \leqslant f_1 \leqslant v|_{\Omega_c} \leqslant f_2 \right\}.$$

Область $\Omega_c \subset \Omega$ локализации управления и функции $f_{1,2} \in L^2(\Omega_c)$ являются заданными.

1. Формализация задачи оптимального управления

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial\Omega$. Через L^q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, обозначаем пространства Лебега, через H^m — пространства Соболева W_2^m. Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, $Y = V \times V$, V' — пространство, сопряженное с пространством V. Пространство H отождествляем с пространством H', так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через (h, z) значение функционала $h \in V'$ на функции $z \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $h, z \in H$, $\|z\|^2 = (z, z)$.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(c_1) $a, b, \kappa_a, \alpha, \beta = \mathrm{const} > 0$, $\mathrm{g} \in H, \mathrm{g} \geqslant 0$, $\theta_d \in L^2(\Gamma_0)$;

(c_2) $\beta, \gamma, \theta_b \in L^\infty(\Gamma_1)$, $\beta \geqslant \beta_0 > 0$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, $\theta_b \geqslant \mu > 0$, $\beta_0, \gamma_0, \mu = \mathrm{const}$.

Определим операторы $A_1, A_2\colon V \to V'$ и функционалы $f_b, \mathrm{g}_b \in V'$, используя равенства, справедливые для всех $v \in V$

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int\limits_{\Gamma_1} \beta\theta v\, d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\varphi v\, d\Gamma,$$

$$(f_b, v) = \int\limits_{\Gamma_1} \beta\theta_b v\, d\Gamma, \quad (\mathrm{g}, v) = \int\limits_{\Gamma_1} \gamma\theta_b^4 v\, d\Gamma.$$

Будем использовать следующее обозначение $[s]^m := |s|^m \operatorname{sign} s$, $m > 0$, $s \in \mathbb{R}$ для монотонной степенной функции.

Пара $y = \{\theta, \varphi\} \in Y$ называется слабым решением задачи (1)-(2), если

$$A_1\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = f_b + u, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = \mathrm{g}_b + \mathrm{g}. \tag{3}$$

Задача (C). Найти функции $\widehat{y} = \{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}\} \in Y$, $\widehat{u} \in U_{ad}$ такие, что $F(\widehat{y}, \widehat{u}) = 0$,

$$J(\widehat{\theta}) = \inf\Big\{J(\theta):\ F(y, u) = 0,\ y = \{\theta, \varphi\} \in Y,\ u \in U_{ad}\Big\}. \tag{4}$$

Здесь $F\colon Y \times H \to Y'$ — оператор ограничений,

$$F(y, u) = \Big\{A_1\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - f_b - u,\ A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - \mathrm{g}_b - \mathrm{g}\Big\}.$$

2. Разрешимость задачи оптимального управления

Для доказательства разрешимости задачи (4) будем использовать свойства решения краевой задачи (1)–(2).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* $(c_1), (c_2)$, $u \in U_{ad}$. *Тогда существует единственное слабое решение* $y = \{\theta, \varphi\} \in Y$ *задачи* (1)–(2) *такое, что* $\theta \geqslant \mu$,

$$\|\theta\|_V^2 \leqslant K_1\left(\|u\|^2 + \|\mathrm{g}\|^{5/4} + \|\theta_b\|^5_{L^\infty(\Gamma_1)}\right), \tag{5}$$

$$\|\varphi\|_V^2 \leqslant K_2\left(\|\theta\|^8 + \|\mathrm{g}\|^2 + \|\theta_b\|^8_{L^\infty(\Gamma_1)}\right). \tag{6}$$

Здесь положительные постоянные $K_{1,2}$ *зависят только от* a, b, α, κ_a, β, β_0, γ_0, $\|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma_1)}$ *и* Ω.

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (1)–(2) и оценки (5), (6) следуют из результатов [8]. Получим оценку положительности θ. Определим неубывающую функцию $\mu_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < \mu$, которая является аппроксимацией функции $\min\{t - \mu, 0\}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu_\varepsilon(t) = \begin{cases} t + 2\varepsilon - \mu, & \text{если } t < -\varepsilon; \\ \varepsilon - \mu, & \text{если } |t| \leqslant \varepsilon; \\ t - \mu, & \text{если } t \in (\varepsilon, \mu); \\ 0, & \text{если } t \geqslant \mu. \end{cases}$$

Умножим скалярно первое уравнение в (3) на $\mu_\varepsilon(\theta) \in V$, второе — на $b\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}) \in V$ и сложим полученные равенства. Тогда

$$a(\nabla\theta, \nabla\mu_\varepsilon(\theta)) + \int\limits_{\Gamma_1} \beta(\theta - \theta_b)\mu_\varepsilon(\theta)\, d\Gamma + \alpha b(\nabla\varphi, \nabla\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}))+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_1} \gamma(\varphi - \theta_b^4)\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4})\, d\Gamma + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi), \mu_\varepsilon(\theta) - \mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4})) =$$
$$= (f, \mu_\varepsilon(\theta)) + (\mathrm{g}, \mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4})) \leqslant 0. \quad (7)$$

В силу монотонности функции μ_ε справедливы неравенства

$$(\theta - \theta_b)\mu_\varepsilon(\theta) \geqslant (\theta - \mu)\mu_\varepsilon(\theta) \geqslant 0, \quad \nabla\varphi \cdot \nabla\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}) \geqslant 0,$$
$$(\varphi - \theta_b^4)\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}) \geqslant 0, \quad ([\theta]^4 - \varphi)(\mu_\varepsilon(\theta) - \mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}) \geqslant 0.$$

Поэтому, отбросив в (7) неотрицательные в силу указанных неравенств слагаемые, получим

$$a(\nabla\theta, \nabla\mu_\varepsilon(\theta)) + \int\limits_{\Gamma_1} \beta(\theta - \mu)\mu_\varepsilon(\theta) d\Gamma \leqslant 0. \quad (8)$$

Переходя в (8) к пределу при $\varepsilon \to +0$, заключаем

$$a(\nabla\psi, \nabla\psi) + \int\limits_{\Gamma_1} \beta\psi^2 d\Gamma \leqslant 0, \quad \text{где } \psi = \min\{\theta - \mu, 0\}.$$

Следовательно, $\psi = 0$, что означает справедливость почти всюду в Ω неравенства $\theta \geqslant \mu$. □

Теорема 1. *Пусть выполняются условия $(c_1), (c_2)$. Тогда существует решение задачи (C).*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{y_j, u_j\} \in Y \times U_{ad}$,

$$J(\theta_j) \to \widehat{J} = \inf \Big\{ J(\theta) :\ u \in U_{ad},\ F(y, u) = 0 \Big\},$$

где $y_j = \{\theta_j, \varphi_j\}$ и при этом

$$A_1\theta_j + b\kappa_a([\theta_j]^4 - \varphi_j) = f_b + u_j, \quad A_2\varphi_j + \kappa_a(\varphi_j - [\theta_j]^4) = \mathrm{g}_b + \mathrm{g}. \quad (9)$$

Последовательность $\{u_j\}$ ограничена в H, и поэтому в силу оценок (5), (6) заключаем, что последовательность $\{y_j\}$ ограничена в Y. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, получаем сходимости

$$u_j \to \widehat{u} \text{ слабо в } H; \quad \theta_j \to \widehat{\theta},\ \varphi_j \to \widehat{\varphi} \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } L^3(\Omega). \quad (10)$$

Результатов сходимости (10) достаточно для предельного перехода в (9), причем переход в нелинейных членах гарантируется оценкой

$$|([\theta_j]^4 - [\widehat{\theta}]^4, v)| \leqslant 2 \left(\|\theta_j\|^3_{L^6(\Omega)} + \|\widehat{\theta}\|^3_{L^6(\Omega)} \right) \|v\|_{L^6(\Omega)} \|\theta_j - \widehat{\theta}\|_{L^3(\Omega)} \ \ \forall v \in L^6(\Omega).$$

Следовательно, $A_1\widehat{\theta}+b\kappa_a([\widehat{\theta}]^4-\widehat{\varphi})=f_b+\widehat{u}$, $A_2\widehat{\varphi}+\kappa_a(\widehat{\varphi}-[\widehat{\theta}]^4)=\mathrm{g}_b+\mathrm{g}$, т.е. $F(\widehat{y},\widehat{u})=0$, $\widehat{y}=\{\widehat{\theta},\widehat{\varphi}\}$. Кроме того, $\widehat{u}\in U_{ad}$ и

$$\widehat{J}\leqslant J(\widehat{\theta})\leqslant \underline{\lim}\, J(\theta_j)=\widehat{J}.$$

Поэтому $\{\widehat{y},\widehat{u}\}$ — решение задачи (C). □

3. Необходимые условия оптимальности

Для получения системы оптимальности будем использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [10, гл. 2, теорема 1.5]. Установим невырожденность условий оптимальности, что следует из того, что образ производной оператора ограничений совпадает с пространством Y'.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия $(c_1),(c_2)$, $u\in U_{ad}$. Для $y\in Y$ производная $F'_y:Y\to Y'$ является эпиморфизмом,* $\operatorname{Im}F'_y=Y'$.

Доказательство. Уравнение $F'_yq=z=\{z_1,z_2\}\in Y'$ равносильно краевой задаче

$$A_1q_1+b\kappa_a(4|\theta|^3q_1-q_2)=z_1,\quad A_2q_2+\kappa_a(q_2-4|\theta|^3q_1)=z_2,\quad q=\{q_1,q_2\}\in Y. \tag{11}$$

Как показано в [6], однородная задача (11) имеет только нулевое решение. Следовательно, фредгольмовская задача (11) разрешима для всех $z\in Y'$. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия $(c_1),(c_2)$. Пусть $\widehat{y}=\{\widehat{\theta},\widehat{\varphi}\}\in Y$, $\widehat{u}\in U_{ad}$ — решение задачи (C). Тогда существует единственное сопряженное состояние $p=\{p_1,p_2\}\in Y$ такое, что тройка $(\widehat{y},\widehat{u},p)$ удовлетворяет условиям*

$$A_1p_1+4|\widehat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1-p_2)=B(\theta_d-\widehat{\theta}),\quad A_2p_2+\kappa_a(p_2-bp_1)=0, \tag{12}$$
$$(p_1,v-\widehat{u})\leqslant 0,\quad \forall v\in U_{ad}. \tag{13}$$

Здесь $B:L^2(\Gamma_0)\to V'$, $(Bw,z)=\int_{\Gamma_0} wz\,d\Gamma$.

Доказательство. В силу леммы 2 функция Лагранжа задачи (C) определяется равенством

$$L(y,u,p)=J(\theta)+\big(A_1\theta+b\kappa_a([\theta]^4-\varphi)-f_b-u,p_1\big)+\big(A_2\varphi+\kappa_a(\varphi-[\theta]^4)-\mathrm{g}_b-\mathrm{g},p_2\big),$$

где $y=\{\theta,\varphi\}\in Y$, $u\in U_{ad}$, $p=\{p_1,p_2\}\in Y$. В соответствии с принципом Лагранжа равенства $L'_\theta(\widehat{y},\widehat{u},p)=0$, $L'_\varphi(\widehat{y},\widehat{u},p)=0$ дают сопряженную систему (12), а вариационное неравенство $(L'_u(\widehat{y},\widehat{u},p),u-\widehat{u})\geqslant 0\ \ \forall u\in U_{ad}$ приводит к условию (13). □

4. Релейность оптимального управления

Условия оптимальности (12)–(13) позволяют обосновать релейность оптимального управления (строгий принцип bang-bang), используя следующий результат.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* $(c_1), (c_2)$, *тройка* $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}, \widehat{u}\}$ — *решение задачи (C),* $\{p_1, p_2\}$ — *сопряженное состояние. Тогда либо* $p_1(x) \neq 0$ *почти всюду в* Ω, *либо* $p_1 = p_2 = 0$ *в* Ω.

Доказательство. Отметим сразу, и это важно для дальнейшего, что $\widehat{\theta} \geqslant \mu > 0$ в Ω в силу леммы 1. Из уравнений (12) следует, что почти всюду в Ω справедливы равенства

$$-a\Delta p_1 + 4|\widehat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = 0, \quad -\alpha\Delta p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0. \tag{14}$$

Поэтому $\Delta p_{1,2} \in L^2(\Omega)$ и, как следует из (14),

$$-\alpha\Delta^2 p_2 + \kappa_a(\Delta p_2 - b\Delta p_1) = 0, \quad \Delta p_1 = -\frac{4\alpha\widehat{\theta}^3}{a}\Delta p_2.$$

Таким образом, функция $\xi = \Delta p_2$ удовлетворяет в Ω уравнению

$$-\alpha\Delta\xi + \kappa_a(1 + 4\alpha b\widehat{\theta}^3/a)\xi = 0.$$

Если на некоторой подобласти $D \subset \Omega$ положительной меры $p_1 = 0$, то $\Delta p_1\big|_D = 0$. Тогда из первого уравнения (14) в силу положительности $\widehat{\theta}$ следует, что $p_2\big|_D = 0$, $\xi\big|_D = \Delta p_2\big|_D = 0$. Из (14), используя свойство единственности продолжения для эллиптических уравнений [11], заключаем, что $\xi = \Delta p_2 = 0$ в Ω. Следовательно, $p_2 - bp_1 = 0$ и $A_2 p_2 = 0$. Поэтому $p_2 = 0$, а значит, и $p_1 = 0$. $\square$

Заметим, что если $p_1 = 0$, то $p_2 = 0$ и можно найти такое управление $\widehat{u}$, что $\widehat{\theta} - \theta_d = 0$ на участке границы Γ_0.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $(c_1), (c_2)$. *Если точная нижняя грань целевого функционала в задаче (C) положительна, то* $p_1 \neq 0$ *почти всюду в* Ω *и оптимальное управление является релейным, то есть почти всюду в* Ω_c

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } p_1(x) < 0; \\ f_2(x), & \text{если } p_1(x) > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Если $p_1 = p_2 = 0$ в Ω, то, как следует из первого уравнения (12), справедливо равенство $\widehat{\theta} = \theta_d$ на участке наблюдения Γ_0, которое противоречит положительности минимального значения целевого функционала. Следовательно, в силу леммы 3, $p_1 \neq 0$ почти всюду в Ω. Из вариационного неравенства (13) вытекает, что

$$p_1(x)(s - \widehat{u}(x)) \leqslant 0 \ \ \forall s \in [f_1(x), f_2(x)] \ \text{ для почти всех } x \in \Omega_c.$$

Из полученного неравенства следует равенство (15). $\square$

Список литературы

[1] Pinnau R., "Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system", *Commun. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.

[2] Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H., "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer", *J. of Math. Analysis and Applications*, **412**, (2014), 520–528.

[3] Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **20**:3, (2015), 776–784.

[4] Grenkin G. V., Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., "Boundary optimal control problem of complex heat transfer model", *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2, (2016), 1243–1260.

[5] Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H., "Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects", *J. Math. Anal. Appl.*, **439**:2, (2016), 678–689.

[6] Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Grenkin G. V., Botkin N. D., "Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model", *Appl. Math. Comput.*, **289**, (2016), 371–380.

[7] Гренкин Г. В., "Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена", *Дальневосточный математический журнал*, **16**:1, (2016), 24–38.

[8] Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., "Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer", *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **51**, (2017), 2511–2519.

[9] Чеботарев А. Ю., "Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **62**:3, (2022), 381–390.

[10] Фурсиков А. В., *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[11] Wolff T. H., "A property of measure in R^n and an application to unique continuation", *Geometric and Functional Analysis*, **2**, (1992), 225–284.

Поступила в редакцию
30 мая 2025 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 27.02.2025).

Chebotarev A. Yu.[1] Relay control in the problem of optimization of complex heat transfer. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2025. V. 25. No 2. P. 271–277.

[1] Far Eastern Federal University, Russia

ABSTRACT

The problem of optimal control with boundary observation for a stationary model of complex heat transfer is considered. The solvability of the problem is proved and optimality conditions are obtained, on the basis of which the strict principle of bang-bang is substantiated — the relay nature of optimal control.

Key words: *complex heat transfer, diffusion approximation, optimal control, relay control.*