

УДК 519.17

MSC2020 60-08, 05C40, 05C90

© А. С. Лосев¹

Повышение надежности двухполюсников через доминантные связи

В работе решена задача повышения надежности двухполюсника с низконадежными ребрами. Построена асимптотическая оценка времени жизни двухполюсника и показано, как доминантные ребра влияют на его надежность. Представлены результаты численного эксперимента на примере двухуровневого графа, имеющего приложение в моделировании нейронных сетей.

Ключевые слова: *надежность, время жизни, двухполюсник, доминантная связь.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202518>

Введение

Задача обеспечения надежной работы сложных по структуре и организации технических систем (робототехнических комплексов, гидростанций, атомных и газовых хранилищ и т.д.) не теряет своей актуальности. Работы по теории надежности таких известных авторов, как И. А. Рябинин, Е. Д. Соложенцев, В. А. Дурденко, А. А. Рогожин, содержат аналитические методы, позволяющие проводить точные вычисления надежности различных систем [1–3]. Вычислительная сложность таких методов в некоторых случаях равна $O(2^n)$, n – число вершин (узлов) в системе, что является отдельной проблемой и вынуждает исследователей вводить дополнительные ограничения, тем самым уменьшая время счета и сужая практическую значимость результата. Там, где это возможно, проблема вычислительной сложности частично решается использованием современных информационных технологий, а именно распараллеливанием и применением искусственного интеллекта [4, 5], например, активно используются сети С. Гроссберга, Т. Кохонена, Д. Хопфилда [6, 7]. В противном случае на помощь приходят приближенные методы численного исследования систем [8–10].

Отдельное внимание исследователей занимает вопрос повышения надежности технических систем за счет точечной замены или резервирования их элементов [2, 3].

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: losev@iam.dvo.ru

В такой постановке вопроса возникает проблема выбора, так как замена элементов приводит к высоким экономическим и техническим затратам, а резервирование заведомо слабого элемента системы не всегда гарантирует необходимый результат. Выбор элементов системы (доминантных), резервирование или замена которых позволяет повысить надежность всей системы больше, чем прочих элементов, зависит от многих факторов и является актуальной прикладной задачей.

В работе решена задача увеличения надежности двухполюсника с низконадежными ребрами через влияние на доминантные ребра. Речь идет о подмножестве множества ребер двухполюсника, через которые определяются параметры полученного в работе асимптотического соотношения. Данный результат основан на ранее доказанном коллективом авторов утверждении, на выборе функции распределения времени жизни ребер двухполюсника и множества его доминантных ребер, а также на аддитивной модели изменения параметров асимптотического соотношения. Показано, как в рамках сделанного выбора происходит увеличение надежности двухполюсника. Приводятся результаты вычислительного эксперимента на примере двухуровневого графа, используемого при моделировании нейронных сетей.

1. Основные аналитические результаты

Рассмотрим неориентированный граф $\Gamma(U, W)$ с конечным множеством вершин $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ и множеством ребер $W = \{w_{ij} : i \neq j, u_i, u_j \in U\}$ (без петель и кратных ребер). На множестве вершин U зафиксируем начальную u_1 и конечную u_n вершины, полагая, что Γ — двухполюсник. Обозначим \mathcal{R} множество всех ациклических путей $R_i, 1 \leq i \leq r$, между вершинами u_1 и u_n . В работе [11] получено асимптотическое соотношение, характеризующее P_Γ вероятность связности двухполюсника Γ , состоящего из низконадежных независимых ребер с вероятностью работоспособности $p_w(h)$, $w \in W$ (доказана теорема 1). Здесь и далее будем считать, что двухполюсник связный, если существует хотя бы один ациклический путь между начальной u_1 и конечной u_n вершинами.

Теорема 1. Если $p_w(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то

$$P_\Gamma \sim \sum_{R \in \mathcal{R}} \prod_{w \in R} p_w(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение случайную величину $T(w)$, характеризующую время жизни ребра $w \in W$ в двухполюснике Γ , и $T(\Gamma) = \max_{R \in \mathcal{R}} \min_{w \in R} T(w)$ — время жизни всего двухполюсника. Заменим $h = 1/t$ и положим $p_w(t) = P(T(w) > t)$ (вероятность работоспособности ребра w в течение времени t независимо от других ребер), $P_\Gamma = P(T(\Gamma) > t)$ (вероятность существования хотя бы одного работоспособного пути между вершинами u_1 и u_n , которая в содержательном смысле понимается, как надежность двухполюсника Γ).

Утверждение 1. Пусть $p_w(t) = \exp(-\beta_w t^{\alpha_w})$ при $t \rightarrow \infty$, $\beta_w > 0$, $\alpha_w > 0$, $w \in W$, тогда

$$\ln P(T(\Gamma) > t) = \ln P_\Gamma(t) \sim -\beta t^\alpha, \quad t \rightarrow \infty,$$

где

$$\beta = \min_{R \in \mathcal{R}: \alpha = \alpha_R} \beta_R, \quad \beta_R = \sum_{w \in R: \alpha_w = \alpha_R} \beta_w, \quad \alpha = \min_{R \in \mathcal{R}} \alpha_R, \quad \alpha_R = \max_{w \in R} \alpha_w.$$

Доказательство. В силу действия теоремы 1 получим

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t) &\sim \sum_{i=1}^r \prod_{w \in R_i} p_w(t) = \sum_{R \in \mathcal{R}} \exp \left(- \sum_{w \in R} \beta_w t^{\alpha_w} \right) = \\ &= \sum_{R \in \mathcal{R}: \alpha = \alpha_R} \exp \left(- \sum_{w \in R} \beta_w t^{\alpha_w} \right) + \sum_{R' \in \mathcal{R}: \alpha \neq \alpha_R} \exp \left(- \sum_{w \in R'} \beta_w t^{\alpha_w} \right) \sim \\ &\sim \sum_{R \in \mathcal{R}: \alpha = \alpha_R} \exp \left(- \sum_{w \in R} \beta_w t^{\alpha_w} \right), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Обозначим $\alpha'_R = \max_{w \in R \setminus \{w: \alpha_w = \alpha_R\}} \alpha_w$, тогда

$$\begin{aligned} P_\Gamma(t) &\sim \sum_{R \in \mathcal{R}: \alpha = \alpha_R} \exp \left(- \sum_{w \in R: \alpha_w = \alpha_R} \beta_w t^{\alpha_w} - \sum_{w \in R: \alpha_w \neq \alpha_R} \beta_w t^{\alpha_w} \right) = \\ &= \sum_{R \in \mathcal{R}: \alpha = \alpha_R} \exp \left(- \sum_{w \in R: \alpha_w = \alpha_R} \beta_w t^{\alpha_w} - \sum_{w \in R: \alpha_w = \alpha'_R} \beta_w t^{\alpha_w} (1 + o(1)) \right) \sim \\ &\sim \exp(-\beta t^\alpha) \sum_{R \in \mathcal{R}: \alpha = \alpha_R, \beta = \beta_R} \exp \left(- \sum_{w \in R: \alpha_w = \alpha'_R} \beta_w t^{\alpha_w} (1 + o(1)) \right) \sim \\ &\sim \exp(-\beta t^\alpha - \beta' t^{\alpha'} (1 + o(1))), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha' = \min_{R \in \mathcal{R}: \beta = \beta_R, \alpha = \alpha_R} \alpha'_R$, а β' для α' понимается в том же смысле, что β для α .

Следовательно,

$$\ln P_\Gamma(t) \sim -\beta t^\alpha - \beta' t^{\alpha'} (1 + o(1)) \sim -\beta t^\alpha, \quad t \rightarrow \infty.$$

□

Следствие 1. Если $\alpha_{w_1} = \alpha_{w_2}$ для любой пары ребер $w_1, w_2 \in R_i$, $1 \leq i \leq r$, то из утверждения 1 следует, что

$$P_\Gamma(t) \sim \exp(-\beta t^\alpha), \quad t \rightarrow \infty.$$

Распределение времени жизни ребер двухполосника в утверждении 1 известно как распределение Вейбулла, оно широко применяется в задачах теории надежности для оценки времени жизни различных технических систем [12, 13].

Выделим подмножество $\mathcal{S} \subseteq W$ доминантных ребер

$$\mathcal{S} = \bigcup_{R \in \mathcal{R}: \alpha_R = \alpha} \{w \in R : \alpha_w = \alpha\}.$$

Докажем, что изменение параметров β_w или α_w , $w \in \mathcal{S}$, повышает надежность всего графа больше, чем прочих ребер.

Утверждение 2. При $\alpha_w > 0$, $\beta_w > 0$ и $0 < \varepsilon < \min_{w \in W: \alpha \neq \alpha_w} |\alpha - \alpha_w|$ для

$$p_w(t) = \begin{cases} \exp(-\beta_w t^{\alpha_w}) & , w \in W \setminus \mathcal{S} \\ \exp(-\beta_w t^{\alpha_w - \varepsilon}) & , w \in \mathcal{S} \end{cases} \quad t \rightarrow \infty$$

верно асимптотическое соотношение $\ln P_\Gamma(t) \sim -\beta t^{\alpha - \varepsilon}$, $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Все рассуждения повторяют доказательство утверждения 1 с заменой α_w , $w \in \mathcal{S}$ на $\alpha_w - \varepsilon$. \square

Следствие 2. Утверждение остается верным при замене \mathcal{S} на \mathcal{S}' :

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{R \in \mathcal{R}: \alpha_R = \alpha, \sum_{w \in R: \alpha_w = \alpha_R} \beta_w = \beta} \{w \in R: \alpha_w = \alpha\}.$$

Утверждение 3. Если в условиях утверждения 1 для любого одного $w' \in \mathcal{S}'$ заменить $\beta_{w'}$ на $\beta_{w'} - \varepsilon$, то

$$\ln P_\Gamma(t) \sim -(\beta - \varepsilon)t^\alpha, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $0 < \varepsilon < \min_{w \in W: \beta \neq \beta_w} |\beta - \beta_w|$.

Доказательство. Достаточно повторить рассуждения утверждения 1 с заменой $\beta_{w'}$, $w' \in \mathcal{S}'$ на $\beta_{w'} - \varepsilon$. \square

2. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим двухуровневый неориентированный граф $\Gamma(U, W)$ (см. рис. 1), полученный склеиванием графов-колес $\Gamma^1(U_1, W_1)$, $\Gamma^2(U_2, W_2)$ центральными вершинами с вершинами цикла графа-колеса $\Gamma^0(U_0, W_0)$, где $U = U_0 \cup U_1 \cup U_2$, $W = W_0 \cup W_1 \cup W_2$. Выбор графа для проведения вычислительного эксперимента обоснован применением подобных структур в исследованиях нейронных сетей.

Положим $\alpha_{i,j}, (u_i, u_j) \in W$ так, что

$$\begin{aligned} \alpha_{1,i} &= 0.88, \quad i = 2, \dots, 7; & \alpha_{2,7} &= \alpha_{j,j+1} = 0.88, \quad j = 2, \dots, 6, \\ \alpha_{4,i} &= 0.82, \quad i = 8, \dots, 10; & \alpha_{8,10} &= \alpha_{8,9} = \alpha_{9,10} = 0.815, \\ \alpha_{6,j} &= 0.87, \quad j = 11, \dots, 15; & \alpha_{11,15} &= \alpha_{i,i+1} = 0.865, \quad i = 11, \dots, 14; \end{aligned}$$

и $\beta_{i,j}, (u_i, u_j) \in W$ так, что

$$\begin{aligned} \beta_{1,i} &= 0.62, \quad i = 2, \dots, 7; & \beta_{2,7} &= \beta_{j,j+1} = 0.61, \quad j = 2, \dots, 6; \\ \beta_{8,10} &= \beta_{8,9} = \beta_{9,10} = 0.57; & \beta_{4,i} &= 0.56, \quad i = 8, \dots, 10; \\ \beta_{11,15} &= \beta_{i,i+1} = 0.47, \quad i = 11, \dots, 14; & \beta_{6,j} &= 0.46, \quad j = 11, \dots, 15. \end{aligned}$$

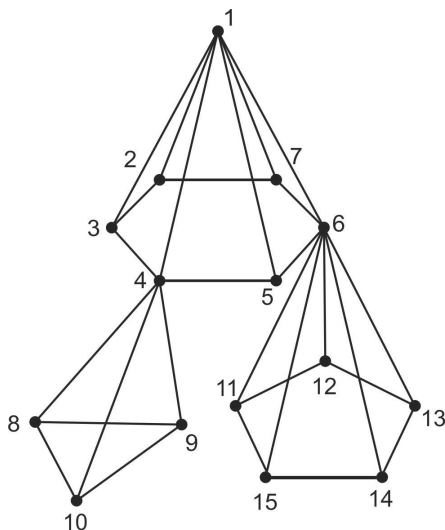


Рис. 1. Пример двухуровневого графа.

Вычислим $\ln P_{\Gamma_{ij}^k}(t)$ для всевозможных пар $u_i, u_j \in U_k$, $i \neq j$, графа Γ^k , $k=0,1,2$, с помощью асимптотической формулы (1) и точно по формуле полной вероятности [13], обозначив через $\ln P_{\Gamma_{ij}^k}^*(t)$. Тогда надежность соединения всевозможных пар $u_i, u_j \in U$, $i \neq j$, графа Γ определяется следующим образом:

$$\ln P_{\Gamma_{ij}}(t) = \begin{cases} \ln P_{\Gamma_{ij}^k}(t), & u_i, u_j \in U_k, k = 0, 1, 2, \\ \ln \left(P_{\Gamma_{iz}^0}(t) P_{\Gamma_{zj}^k}(t) \right), & u_i \in U_0, u_j \in U_k, u_z = U_0 \cap U_k, k = 1, 2 \\ \ln \left(P_{\Gamma_{iz}^1}(t) P_{\Gamma_{zl}^0}(t) P_{\Gamma_{lj}^2}(t) \right), & u_i \in U_1, u_j \in U_2, u_z = U_0 \cap U_1, u_l = U_0 \cap U_2. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$\Delta_{ij}(t) = \left| 1 - \frac{\ln P_{\Gamma_{ij}}(t)}{\ln P_{\Gamma_{ij}}^*(t)} \right|.$$

Установлено, что использование асимптотического соотношения значительно сокращает время вычисления по сравнению с прямым методом, который требует нахождения многочлена 28-й степени по каждой паре вершин графа Γ . Численно подтверждено, что относительная погрешность вычисления $\Delta_{ij}(t)$ уменьшается при $t \rightarrow \infty$ (см. рисунок 2).

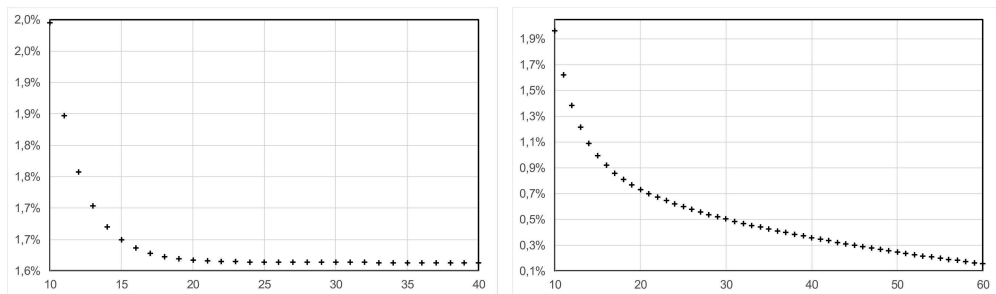


Рис. 2. График относительной погрешности $\Delta_{8,12}(t)$ (слева) и $\Delta_{2,13}(t)$ (справа).

Относительная погрешность вычисления $\Delta_{ij}(t)$ уже при $t = 50$ не превышает 2.7% (см. таблицу 1).

Таблица 1. Матрица $\|\Delta_{ij} \cdot 10^2\|_{i,j=1}^{15}$ при $t = 50$.

0.00	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.02	1.02	1.02	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86
1.63	0.00	1.61	0.81	1.63	0.81	1.61	0.54	0.54	0.54	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64
1.63	1.61	0.00	1.61	0.81	1.63	0.81	0.86	0.86	0.86	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15
1.63	0.81	1.61	0.00	1.61	0.81	1.63	0.18	0.18	0.18	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64
1.63	1.63	0.81	1.61	0.00	1.61	0.81	0.86	0.86	0.86	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
1.63	0.81	1.63	0.81	1.61	0.00	1.61	0.54	0.54	0.54	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19
1.63	1.61	0.81	1.63	0.81	1.61	0.00	1.25	1.25	1.25	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
1.02	0.54	0.86	0.18	0.86	0.54	1.25	0.00	0.00	0.00	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47
1.02	0.54	0.86	0.18	0.86	0.54	1.25	0.00	0.00	0.00	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47
1.02	0.54	0.86	0.18	0.86	0.54	1.25	0.00	0.00	0.00	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47
0.86	0.64	1.15	0.64	1.02	0.19	1.02	0.47	0.47	0.47	0.00	0.19	2.69	2.69	0.19
0.86	0.64	1.15	0.64	1.02	0.19	1.02	0.47	0.47	0.47	0.19	0.00	0.19	2.69	2.69
0.86	0.64	1.15	0.64	1.02	0.19	1.02	0.47	0.47	0.47	2.69	0.19	0.00	0.19	2.69
0.86	0.64	1.15	0.64	1.02	0.19	1.02	0.47	0.47	0.47	2.69	2.69	0.19	0.00	0.19
0.86	0.64	1.15	0.64	1.02	0.19	1.02	0.47	0.47	0.47	0.19	2.69	2.69	0.19	0.00

В каждом из рассмотренных случаев для вычисления $\ln P_{\Gamma_{ij}}(t)$, $u_i, u_j \in U$, выделено множество доминантных связей \mathcal{S} , которое (см. утверждение 2) позволяет значительно влиять на надежность всего соединения. Например, для пары u_{11}, u_{12} множество $\mathcal{S} = \{(u_{11}, u_{12})\}$, для пары u_8, u_{12} множество $\mathcal{S} = \{(u_4, u_8), (u_4, u_9), (u_4, u_{10}), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_6, u_{11}), (u_6, u_{12}), (u_6, u_{13}), (u_6, u_{14}), (u_6, u_{15})\}$.

Список литературы

- [1] Можаяев А. С., *Общий логико-вероятностный метод анализа надежности сложных систем*, ВМА, Л., 1988.
- [2] Райншке К., Ушаков И. А., *Оценка надежности систем с использованием графов*, Радио и связь, М., 1988.

- [3] Рябинин И. А., *Надежность и безопасность структурно-сложных систем*, Изд-во С.-Петерб. ун-та, СПб., 2007.
- [4] Аксенов С. В., *Организация и использование нейронных сетей (методы и технологии)*, Изд-во НТЛ, Томск, 2006.
- [5] Богачев К. Ю., *Основы параллельного программирования*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2003.
- [6] J Hopfield J., “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities”, *Proceedings of National Academy of Sciences*, **79**, (1982), 2554–2558.
- [7] J Hopfield J., Tand D., “Neural computation of decision in optimization problems”, *Biol. Cybernet.*, **52**, (1985), 141–152.
- [8] Ильев В. П., Агеев А. А., Кононов А. В., Талевнин А. С., “Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов”, *Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1.*, **13(1)**, (2006), 3–11.
- [9] Ломоносов М. В., Полесский В. П., “Нижняя оценка надежности сетей”, *Проблемы передачи информации*, **8(2)**, (1972), 47–53.
- [10] Фридман Г. Ш., “Одна задача аппроксимации графов”, *Управляемые системы*, **8**, (1971), 73–75.
- [11] Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С., “Асимптотические формулы для вероятностей связности случайных графов”, *Автоматика и вычислительная техника*, **2**, (2013), 22–28.
- [12] Боровиков С. М., Шнейдеров Е. Н., “Использование распределения Вейбулла для прогнозирования параметрической надежности изделий электронной техники”, *Доклады БГУИР*, **7(61)**, (2011), 31–37.
- [13] Рябинин И. А., *Логико-вероятностные методы исследования надёжности структурно-сложных систем*, Радио и связь, М., 1981.

Поступила в редакцию
30 июля 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного
задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

*Losev A. S.*¹ Increasing the reliability of bipolar networks through dominant connections. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2025. V. 25. No 2. P. 251–257.

¹Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

This paper addresses the problem of increasing the reliability of a two-terminal network with low-reliability edges. An asymptotic estimate of the two-terminal network's lifetime is constructed, and the influence of dominant edges on its reliability is demonstrated. The results of a numerical experiment are presented using a two-level graph as an example, which has applications in neural network modeling.

Key words: *reliability, lifetime, two-terminal network, dominant connection.*