Дальневосточный математический журнал. 2025. Т. 25. № 2. С. 244–250

УДК 531.9
MSC2020 74A05

© К. Н. Пестов[1]

Тензор Риччи изотропной неоднородной температурной деформации

В работе получено точное нелинейное выражение для компонент тензора Риччи и скалярной кривизны для изотропной неоднородной температурной деформации. Приведены условия на поле изменения температуры, при выполнении которых возможна линеаризация компонент тензора Риччи. Получено условие евклидовости деформированного состояния.

Ключевые слова: *Тензор Риччи, скалярная кривизна, температурные деформации.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202517

Введение

Развитие аддитивных технологий в авиа- и судостроительной отрасли сталкивается с барьером из ряда нерешенных проблем механики материалов, которая должна обеспечивать механические свойства и ресурсные характеристики этих материалов. Особенную актуальность приобретает решение задач о влиянии технологических параметров на структуру материалов, которое невозможно представить без моделей термомеханики. Теоретическое описание процессов необратимых изменений внутренней структуры материалов при температурных воздействиях привело к развитию отдельных направлений в механике сплошных сред, среди которых можно выделить неевклидовы модели сплошной среды [1–4]. Необходимость анализа геометрических параметров, определяемых гипотезами при моделировании сплошной среды, установлена в работе [5]. Вариантов неевклидовых моделей сплошной среды пока немного, систематически и последовательно выполняются исследования для описания дефектных структур при моделировании зональной дезинтеграции пород вокруг тоннелей и образцов горных пород и упругопластического состояния материалов. В направлении развития неевклидовых модельных представлений в данной работе анализируется вид тензора Риччи для температурной деформации.

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60. Электронная почта: `kopestov@yandex.ru`

Как известно, одной из гипотез построения классической механики сплошных сред является гипотеза евклидова пространства. В настоящей работе рассматривается в некотором смысле минимальное расширение этой гипотезы с евклидова до риманова пространства.

Основным объектом в геометрии, характеризующим отклонение некоторого многообразия от евклидова, является тензор кривизны Римана–Кристоффеля R^i_{jkl}. В трехмерном случае он полностью определяется тензором Риччи R_{jk} [6] с компонентами

$$R_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{ji} - \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{jk},$$

где Γ^i_{ji} — компоненты симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ij}. Метрика многообразия деформированной сплошной среды $\tilde{\mathrm{g}}_{ij}$ связана с исходной метрикой g_{ij} тензором деформаций ε_{ij}

$$\tilde{\mathrm{g}}_{ij} = \mathrm{g}_{ij} + 2\varepsilon_{ij}.$$

Для произвольного тензора деформаций тензор Риччи является довольно сложным нелинейным выражением, лишь в линейном приближении (малых деформациях) можно получить формулу [7]

$$R_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij} + \nabla_i\nabla_j\varepsilon^k_k - \nabla_i\nabla^k\varepsilon_{kj} - \nabla_j\nabla^k\varepsilon_{ki}, \tag{1}$$

где ∇_i — ковариантная производная по i-ой координате, $\Delta = \mathrm{g}^{ij}\nabla_i\nabla_j$ — оператор Лапласа.

Изменение температуры сплошной среды на $\Delta T = \tilde{T} - T_0$, где $\tilde{T}$ — текущая температура, T_0 — начальная температура, вызывает изменение линейных размеров (деформацию)

$$e_{dl} = \frac{\tilde{dl} - dl}{dl} = \int\limits_{T_0}^{T} \alpha(T)dT, \tag{2}$$

где dl — начальная длина некоторого элемента, $\tilde{dl}$ – длина после деформации этого элемента, $\alpha(T)$ — истинный коэффициент линейного расширения, который в общем анизотропном случае является тензором второго ранга. В данной работе рассматривается случай, когда $\alpha(T)$ не зависит от направления, тогда деформация также не зависит от направления и является изотропной.

Тензор деформации в этом случае в декартовой системе координат, соответствующей начальной евклидовой конфигурации, будет диагональным, а в произвольной криволинейной системе координат пропорциональным метрическому тензору

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[(e+1)^2 - 1\right]\mathrm{g}_{ij},$$

где e определена изменением температуры по (2). Обозначим

$$w = \frac{1}{2}\left[(e+1)^2 - 1\right],$$

тогда

$$\varepsilon_{ij} = w\mathrm{g}_{ij}. \tag{3}$$

В линейном случае w совпадает с деформаций e, вызываемой температурой, и обычно называется температурной деформацией.

Подстановка (3) в (1) дает выражение для линейной части тензора Риччи в случае температурной деформации

$$R_{ij} = \mathrm{g}_{ij}\Delta w + \nabla_i \nabla_j w. \tag{4}$$

Однако в случае температурной деформации можно получить точные нелинейные выражения для компонент тензора Риччи и скалярной кривизны, что и является целью настоящей работы.

1. Тензор аффинной деформации

Пусть сплошная среда в недеформированном состоянии описывается в некоторой криволинейной системе координат (x^1,x^2,x^3) евклидова пространства компонентами метрического тензора g_{ij} и символами Кристоффеля Γ^i_{kl}, связанными с метрикой

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathrm{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathrm{g}_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{5}$$

Компоненты тензора Риччи R_{jk} в данном случае равны нулю.

Рассмотрим случай неоднородной температурной деформации, когда

$$\varepsilon_{ij} = w(x)\mathrm{g}_{ij}.$$

Тогда компоненты метрики $\tilde{\mathrm{g}}_{ij}$ деформированного состояния будут связаны с исходной метрикой g_{ij} недеформированного состояния следующим образом:

$$\tilde{\mathrm{g}}_{ij} = \mathrm{g}_{ij}(1+2w), \tag{6}$$

а компоненты обратных метрик $\tilde{\mathrm{g}}^{ij}$ и $\tilde{\mathrm{g}}^{ij}$ —

$$\tilde{\mathrm{g}}^{ij} = \mathrm{g}^{ij}(1+2w)^{-1}. \tag{7}$$

Компоненты связности Леви – Чивита в деформированном состоянии определяются аналогичным (5) выражением

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{g}}^{im}\left(\frac{\partial \tilde{\mathrm{g}}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \tilde{\mathrm{g}}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\mathrm{g}}_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{8}$$

Подстановка (6) и (7) в (8) дает связь компонент связности Леви – Чивита в недеформированном и деформированном состояниях

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + \frac{1}{1+2w}\left(\mathrm{g}^i_k \nabla_l w + \mathrm{g}^i_l \nabla_k w - \mathrm{g}_{kl}\nabla^i w\right). \tag{9}$$

Введем тензор аффинной деформации [8] с компонентами:

$$E^i_{kl} = \tilde{\Gamma}^i_{kl} - \Gamma^i_{kl} = \frac{1}{1+2w}\left(\mathrm{g}^i_k \nabla_l w + \mathrm{g}^i_l \nabla_k w - \mathrm{g}_{kl}\nabla^i w\right). \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что тензор аффинной деформации, определенный по (10), симметричен по нижним индексам.

Теперь (9) можно записать в виде

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + E^i_{kl}. \tag{11}$$

2. Тензор Риччи и скалярная кривизна

В деформированном состоянии компоненты тензора Риччи

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}^i_{km}\tilde{\Gamma}^m_{ji} - \tilde{\Gamma}^i_{im}\tilde{\Gamma}^m_{jk}. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12) и учитывая $R_{jk}=0$, получаем

$$\tilde{R}_{jk} = \nabla_k E^i_{ji} - \nabla_i E^i_{jk} + E^i_{km}E^m_{ji} - E^m_{jk}E^i_{im}. \tag{13}$$

Используя выражение для тензора аффинной деформации через температурную деформацию (10), вычислим отдельно каждое слагаемое в (13):

$$\nabla_k E^i_{ji} = \nabla_k \left[\frac{\mathrm{g}^i_i \nabla_j w + \mathrm{g}^i_j \nabla_i w - \mathrm{g}_{ij}\nabla^i w}{1+2w}\right] = -\frac{2\nabla_k w}{(1+2w)^2}\left(\mathrm{g}^i_i \nabla_j w + \mathrm{g}^i_j \nabla_i w - \mathrm{g}_{ij}\nabla^i w\right) +$$

$$+\frac{1}{1+2w}\left(\mathrm{g}^i_i \nabla_k\nabla_j w + \mathrm{g}^i_j \nabla_k\nabla_i w - \mathrm{g}_{ij}\nabla_k\nabla^i w\right) = \frac{3\nabla_k\nabla_j w}{1+2w} - \frac{6\nabla_j w\nabla_k w}{(1+2w)^2},$$

$$\nabla_i E^i_{jk} = \nabla_i \left[\frac{\mathrm{g}^i_k \nabla_j w + \mathrm{g}^i_j \nabla_k w - \mathrm{g}_{kj}\nabla^i w}{1+2w}\right] = -\frac{2\nabla_i w}{(1+2w)^2}\left(\mathrm{g}^i_k \nabla_j w + \mathrm{g}^i_j \nabla_k w - \mathrm{g}_{kj}\nabla^i w\right) +$$

$$+\frac{\mathrm{g}^i_k \nabla_i\nabla_j w + \mathrm{g}^i_j \nabla_i\nabla_k w - \mathrm{g}_{kj}\nabla_i\nabla^i w}{1+2w} = \frac{2\nabla_j\nabla_k w - \mathrm{g}_{kj}\Delta w}{1+2w} - 2\frac{2\nabla_j w\nabla_k w - \mathrm{g}_{kj}\nabla^i w\nabla_i w}{(1+2w)^2},$$

$$E^i_{km}E^m_{ji} = \frac{1}{(1+2w)^2}\left(5\nabla_k w\nabla_j w - 2\mathrm{g}_{kj}\nabla^i w\nabla_i w\right),$$

$$E^m_{jk}E^i_{im} = \frac{1}{(1+2w)^2}\left(5\nabla_k w\nabla_j w - 3\mathrm{g}_{kj}\nabla^i w\nabla_i w\right).$$

Теперь, подставляя все в (13), получаем

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\nabla_j\nabla_k w + \mathrm{g}_{jk}\Delta w}{1+2w} - \frac{3\nabla_j w\nabla_k w + \mathrm{g}_{jk}\nabla_i w\nabla^i w}{(1+2w)^2}. \tag{14}$$

Сворачивая тензор Риччи с $\tilde{\mathrm{g}}^{ij}$ в виде (7), получаем скалярную кривизну

$$\tilde{R} = \tilde{R}_{jk}\tilde{\mathrm{g}}^{jk} = \frac{4\Delta w}{(1+2w)^2} - \frac{6|\nabla w|^2}{(1+2w)^3}.$$

Формула (14) в линейном порядке по w должна давать (4). Действительно, первое слагаемое в линейном порядке дает (4), второе же слагаемое, очевидно, не имеет первого порядка по w. В инвариантной бескоординатной форме формулу (14) можно записать следующим образом:

$$\hat{\hat{R}} = \frac{\nabla\nabla w + \hat{\mathrm{g}}\Delta w}{1+2w} - \frac{3\nabla w \otimes \nabla w + \hat{\mathrm{g}}|\nabla w|^2}{(1+2w)^2}. \tag{15}$$

3. Условия применимости линейного приближения

Для многих материалов при определенных условиях температурная деформация пропорциональна только изменению температуры

$$w = \alpha T(x),$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения, $T(x)$ — изменение температуры. Тогда тензор Риччи и скалярная кривизна примут вид

$$\begin{gathered}\hat{R} = \alpha\left[\frac{\nabla\nabla T(x) + \hat{\mathrm{g}}\Delta T(x)}{1+2\alpha T(x)} - \alpha\frac{3\nabla T(x)\otimes\nabla T(x) + \hat{\mathrm{g}}|\nabla T(x)|^2}{(1+2\alpha T(x))^2}\right],\\ R = \alpha\left[\frac{4\Delta T(x)}{(1+2\alpha T(x))^2} - \alpha\frac{6|\nabla T(x)|^2}{(1+2\alpha T(x))^3}\right].\end{gathered} \tag{16}$$

Для практических расчетов возникает вопрос о границах применимости линейного приближения. Для определения этих границ разложим компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну (16) до второго порядка по α включительно, считая α малым:

$$\begin{gathered}R_{ij} = \alpha\left[\nabla_i\nabla_j T(x) + \mathrm{g}_{ij}\Delta T(x)\right]\\ -\alpha^2\left[3\nabla_i T(x)\nabla_j T(x) + 2T(x)\nabla_i\nabla_j T(x) + \mathrm{g}_{ij}|\nabla T(x)|^2 + 2\mathrm{g}_{ij}T(x)\Delta T(x)\right] + o(\alpha^2),\\ R = 4\alpha\Delta T(x) - \alpha^2\left[16T(x)\Delta T(x) + 6|\nabla T(x)|^2\right] + o(\alpha^2).\end{gathered}$$

Условием применимости линейного приближения для скалярной кривизны является неравенство

$$4\alpha T(x) + \alpha\frac{3|\nabla T(x)|^2}{2\Delta T(x)} \ll 1.$$

Первое слагаемое для случая малых деформаций этому условию удовлетворяет. Таким образом, должно выполняться неравенство

$$\alpha\frac{|\nabla T(x)|^2}{\Delta T(x)} \ll 1. \tag{17}$$

Условием применимости линейного приближения для компонент тензора Риччи является неравенство

$$2\alpha T(x) + \alpha\frac{3\nabla_i T(x)\nabla_j T(x) + \mathrm{g}_{ij}|\nabla T(x)|^2}{\nabla_i\nabla_j T(x) + \mathrm{g}_{ij}\Delta T(x)} \ll 1. \tag{18}$$

Для диагональных компонент тензора Риччи условие (18) выполняется при выполнении условия (17). Для недиагональных компонент в ортогональной системе координат условие (18) упростится:

$$\alpha \frac{\nabla_i T(x) \nabla_j T(x)}{\nabla_i \nabla_j T(x)} \ll 1. \tag{19}$$

Нетрудно заметить, что если выполняется (19) для любых пар индексов, то условия (18) и (17) также выполняются. Таким образом, условие (19) является достаточным для того, чтобы можно было пользоваться линейным приближением (4).

4. Условие евклидовости деформированного состояния

Естественным образом возникает вопрос, при каких температурных полях тензор Риччи останется нулевым, а пространство материального континуума евклидовым. Очевидно, что если тензор Риччи равен нулю, то и скалярная кривизна тоже равна нулю:

$$\hat{R} = \frac{4\Delta w}{(1+2w)^2} - \frac{6|\nabla w|^2}{(1+2w)^3} = 0,$$

откуда

$$\Delta w = \frac{3|\nabla w|^2}{2(1+2w)}. \tag{20}$$

Далее, подставляя (20) в (14) и упрощая, получаем

$$R_{jk} = \frac{\nabla_j \nabla_k w}{1+2w} - \frac{3\nabla_j w \nabla_k w}{(1+2w)^2} + \frac{\mathrm{g}_{jk}|\nabla w|^2}{2(1+2w)^2} = 0. \tag{21}$$

Одно решение очевидно — это $\nabla w = 0$. Предположим, что есть другие решения, и разделим на ∇w уравнение (21), тогда получим

$$\mathrm{g}_{jk} = 6\frac{\nabla_j w \nabla_k w}{|\nabla w|^2} - 2(1+2w)\frac{\nabla_j \nabla_k w}{|\nabla w|^2},$$

то есть получилась параметризация невырожденного метрического тензора g_{jk} одной скалярной функцией w, что невозможно. Таким образом, только постоянное изменение температуры по всему объему оставляют тензор Риччи тривиальным.

Однако в линейном случае, как известно [9], для евклидовости деформированного состояния достаточно, чтобы

$$\nabla_j \nabla_k w = 0,$$

откуда $\nabla w = \vec{C}$, где $\vec{C}$ — некоторый постоянный вектор, который можно представить в виде $\vec{C} = C\vec{c}$, где $|\vec{c}| = 1$. Нетрудно посчитать тензор Риччи в этом случае по (15):

$$R_{jk} = -\frac{3C_j C_k + \mathrm{g}_{jk}|\vec{C}|^2}{(1+2w)^2} = -C^2\frac{3c_j c_k + \mathrm{g}_{jk}}{(1+2w)^2}. \tag{22}$$

При этом очевидно $C^2 \sim \alpha^2$, то есть (22) является поправкой второго порядка по α.

Список литературы

[1] Гузев М. А., Мясников В. П., "Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды", *Дальневост. матем. журн.*, **2**:2, (2001), 29–44.

[2] Мясников В. П., Гузев М. А., "Геометрическая модель дефектной структуры упругопластической сплошной среды", *Прикл. мех. техн. физ.*, **40**:2, (1999), 163–173.

[3] Bilby B. A., Bullough R., Smith E., "Continuos distributions of dislocations: a new application of the methods of non - Reimannian geometry", *Proc. Roy. Soc. A.*, **231**, (1955), 263–273.

[4] Kondo K., "On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding", *Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech. Tokyo*, **231**, (1953), 41–47.

[5] Годунов С. К., *Элементы механики сплошной среды*, Наука, М., 1978, 304 с.

[6] Дубровин Б. А, Новиков С. П, Фоменко А. Т, *Современная геометрия: Методы и приложения*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1986.

[7] Гузев М. А., Любимова О. Н., Пестов К. Н., "Уравнения Бельтрами – Митчелла в неевклидовой модели сплошной среды", *Дальневост. матем. журн.*, **24**:2, (2024), 178–186 Mi `http://mi.mathnet.ru/dvmg542`, doi `https://doi.org/10.47910/FEMJ202416`.

[8] Норден А. П, *Пространства аффинной связности*, Наука, М., 1976.

[9] Боли Б., Уэйнер Дж., *Теория температурных напряжений*, Мир, М., 1964.

Поступила в редакцию
1 июня 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

Pestov K. N.[1] Ricci tensor of isotropic inhomogeneous temperature deformation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2025. V. 25. No 2. P. 244–250.

[1] Khabarovsk Division of the Institute of Applied Mathematics Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk

ABSTRACT

An exact nonlinear expression is obtained for the components of the Ricci tensor and scalar curvature for isotropic inhomogeneous temperature deformation. The conditions in the field of temperature variation are given, under which linearization of the components of the Ricci tensor is possible. The condition for the Euclidean nature of the deformed state is obtained.

Key words: *Ricci tensor, scalar curvature, temperature deformations.*