Дальневосточный математический журнал. 2025. Т. 25. № 2. С. 232–243

УДК 512.643.5, 517, 933
MSC2020 15A18, 34K11

© А. И. Гудименко[1], А. В. Лихошерстов[1,2]

Применение формулы Лагранжа для вычисления собственных чисел гармонической цепочки с диссипацией

Рассматривается задача о собственных значениях для динамической системы, описывающей в координатах Шредингера колебания однородной гармонической цепочки с диссипацией на границах. Комбинаторная формула Лагранжа применяется для получения равномерной аппроксимации собственных значений при достаточно большом числе частиц цепочки.

Ключевые слова: *гармоническая цепочка, координаты Шредингера, формула Лагранжа, собственные значения.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202516

Введение

В работе рассматривается динамическая система, заданная как граничная задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка:

$$\ddot{q}_l = q_{l+1} - 2q_l + q_{l-1}, \quad l = 0, \dots, L-1, \tag{1}$$

$$b\dot{q}_0 + q_0 - q_{-1} = 0, \quad q_L - q_{L-1} - c\dot{q}_{L-1} = 0. \tag{2}$$

Эта система описывает колебания однородной гармонической цепочки с диссипацией на границах. Здесь q_l, $l=0,\dots,L-1$, — эволюционные переменные системы, $b,c<0$ — постоянные, характеризующие диссипацию, L — размерность системы.

Координаты Шредингера определяются выражениями [1, 2]

$$x_{2l} = \dot{q}_l, \quad x_{2l+1} = q_{l+1} - q_l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичёва, 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43.
Электронная почта: `gudimenko@iam.dvo.ru` (А. И. Гудименко), `likhosherstov.02@mail.ru` (А. В. Лихошерстов).

В этих координатах уравнения (1), (2) записываются в виде

$$\begin{gathered}\dot{x}_l = x_{l+1} - x_{l-1}, \quad l = 0, \dots, N-1,\\ x_{-1} + bx_0 = 0, \quad x_N - cx_{N-1} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $N=2L-1$, или в матричной форме — $\dot{x}=Ax$, где $x=(x_0,\dots,x_{N-1})^T$ и

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & c \end{pmatrix}.$$

С граничной задачей (3) ассоциирована задача о собственных значениях

$$\begin{gathered}\lambda y_l = y_{l+1} - y_{l-1}, \quad l = 0, \dots, N-1,\\ y_{-1} + by_0 = 0, \quad y_N - cy_{N-1} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Введём последовательность многочленов $P_l(\lambda)$, $l=-2,-1,\dots$, как решение рекуррентного соотношения

$$\lambda y_l = y_{l+1} - y_{l-1}, \quad l = -1, 0, \dots, \tag{5}$$

с начальными условиями $y_{-2}=1$, $y_{-1}=0$. Нетрудно проверить [3], что в терминах этих многочленов решение задачи (4) представляется в виде

$$y_l = P_l(\lambda) - bP_{l-1}(\lambda), \quad l = 0, \dots, N,$$

где λ — корень характеристического уравнения

$$P_N(\lambda) - (b+c)P_{N-1}(\lambda) + bcP_{N-2}(\lambda) = 0. \tag{6}$$

Введём спектральную переменную z, полагая $\lambda=z-1/z$. Тогда решение начальной задачи для (5) выписывается явно

$$P_l(\lambda) = \frac{z^{l+1} - (-z)^{-l-1}}{z + z^{-1}}, \quad l = -2, -1, \dots, \tag{7}$$

и подстановка (7) в (6) приводит при $z \neq \pm i$ к эквивалентному (6) уравнению $p_N(z)=0$, где

$$p_N(z) = z^{2N}(z-b)(z-c) - (1+bz)(1+cz). \tag{8}$$

Настоящая работа является продолжением работы [3], посвящённой изучению структуры и расположения на комплексной плоскости корней многочлена (8). Новый результат состоит в представлении логарифмов этих корней (кроме не более двух пар так называемых исключительных корней) степенным рядом по параметру $1/N$, основываясь на одной из форм формулы обращения Лагранжа [4, p. 150] (см. также [5, p. 106] и [6, p. 133]). При этом мы ограничиваемся случаем $b, c < 0$ и нечётного N. Сравнение аппроксимаций корней на основе полученного ряда и численных алгоритмов приложения MAPLE показывает хорошую согласованность этих аппроксимаций как по их степеням, так и по числу $N\to\infty$, причём совокупно по всем корням. Это позволяет предположить, что найденный ряд по отношению к корням является равномерно сходящимся и одновременно равномерным асимптотическим разложением своей суммы. В настоящей статье предпринята попытка аналитического обоснования этих утверждений.

Интерес к изучению корней многочлена (8) обусловлен следующими причинами.

1. Матрица A относится к специальному, но широкому классу тридиагональных матриц, впервые рассмотренному Losonczi [7] и активно изучаемому в последние десятилетия (см. обзорную статью [8]). Собственные числа этих матриц аналитически вычислены только в отдельных случаях. Для матрицы A — это случаи $b=c=0$ и $b=-c=\pm1$.

2. В частном случае $b=c=\pm1$ факторизация многочлена (8) приводит к характеристическому многочлену последовательности обобщённых чисел Пелля. Различного вида обобщения этих чисел также являются в последнее время предметом активного исследования (см. статью [9] и ссылки в ней).

3. Многочлен (8) относится к классу возвратных многочленов. Он удовлетворяет условию, что если z — корень многочлена, то $-1/z$ тоже корень. Такие корни мы называем дуальными. Проблема, связанная с возвратными многочленами, — нахождение условий, определяющих их локацию (см., например, [10]). В нашем случае неисключительные корни многочлена (8) лежат на единичной окружности при $b=-c$ и $b=-1/c$. При $b,c<0$ и $N\to\infty$ неисключительные корни стремятся к этой окружности слева.

4. Добавление в граничные условия (2) функций, представляющих гауссов дельта-коррелированный случайный процесс, приводит к уравнениям ланжевеновской гармонической цепочки — классической модели для изучения одномерного теплового потока. Хотя в пределе $t\to\infty$ этот поток давно вычислен [11, 12], сохраняется интерес, например, к переходным тепловым процессам, где может возникнуть необходимость в явном выражении собственных частот цепочки. В работе [13] предложены асимптотические формулы для собственных частот ланжевеновской цепочки. Наши формулы являются более общими и точными.

5. Предложенный метод нахождения корней многочлена (8) может быть обобщён на многочлены более общего вида. Представляет интерес, например, вычисление корней дистантных многочленов $p(z)z^N+q(z)=0$, когда p и q — многочлены одинаковой степени, значительно меньшей $N\in\mathbb{N}$.

Отметим, что по тематике статьи есть несколько работ в Дальневосточном математическом журнале (см., например, работу [14] и ссылки в ней).

Помимо Введения статья включает два раздела. В первом мы формулируем и доказываем теорему о представлении корней характеристического многочлена с помощью ряда Лагранжа, о равномерной сходимости этого ряда и о представлении суммы ряда равномерным асимптотическим разложением. Во втором мы сравниваем результаты вычисления корней, полученные на основе частичных сумм ряда Лагранжа, со значениями корней, полученными численно в программе MAPLE.

1. Основное утверждение

Численный анализ показывает, что при фиксированных b, c и $N \to \infty$ все корни многочлена $p_N(z)$, за исключением не более двух пар дуальных корней, стремятся расположиться на единичной окружности $|z|=1$ комплексной плоскости. Визуально это расположение выглядит как на рис. 1.

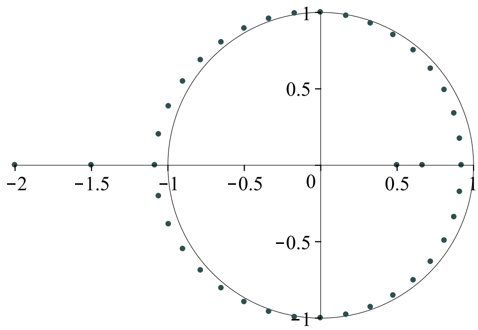

Рис. 1. Корни многочлена $p_N(z)$ на комплексной плоскости при $b=-1.5$, $c=-2$ и $N=19$.

В работе [3] мы показали аналитически, что исключительные корни, то есть те, что при $N \to \infty$ не стремятся к единичной окружности, описываются следующим образом.

(i) Если $b < -1$ и $c < -1$, то имеется четыре исключительных корня. Эти корни различные и вещественные; один стремится к b, другой к c, третий и четвертый — к дуальным значениям.

(ii) Если $b < -1$ и $-1 \leqslant c < 0$, то имеется два исключительных корня. Оба корня вещественные, один стремится к b, другой — к дуальному значению. То же верно при замене $b \rightleftarrows c$.

(iii) Если $-1 \leqslant b < 0$ и $-1 \leqslant c < 0$, то таких корней нет.

Случай (i) — это случай надкритической граничной диссипации, случай (iii) — предкритической, случай (ii) — промежуточный.

Кроме того, мы установили, что стремление неисключительных корней к единичной окружности равномерное относительно корней в том смысле, что для любого достаточно узкого кольца

$$K(\delta) = \{z \in \mathbb{C}\colon 1-\delta < |z| < 1+\delta\}, \quad \delta > 0,$$

и любого достаточно большого N все неисключительные корни $p_N(z)$ лежат в этом кольце. Также мы установили, что для таких N эти корни различны.

В текущем разделе мы вычисляем неисключительные корни явно, аппроксимируя их логарифмы степенными рядами по $\epsilon = 1/N$ при $\epsilon \to 0$. Логарифм комплекснозначного выражения w обозначается $\ln w$. Его главная ветвь специфицируется выражением

$$\operatorname{Ln} w = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w, \quad -\pi < \operatorname{Arg} w \leqslant \pi, \tag{9}$$

где $\operatorname{Arg} w$ — главное значение аргумента. Кольцо $K(\delta)$ называется достаточно узким, если при $b, c \neq -1$ его замыкание не содержит b, c и дуальных к ним точек. Наше основное утверждение о корнях следующее.

Теорема 1. *Для фиксированных b, $c < 0$ и любого достаточно малого ϵ неисключительные корни многочлена $p_N(z)$ представляются в виде*

$$z = e^{\psi}, \tag{10}$$

$$\psi(\epsilon, \phi) = \sum_{n \geqslant 0} \epsilon^n \psi_n(\epsilon, \phi), \tag{11}$$

где

$$\psi_0 = i\phi, \quad -\pi < \phi \leqslant \pi, \tag{12}$$

$$\psi_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} F^n(e^{\psi}, e^{2\psi_0/\epsilon})}{d\psi^{n-1}} \Big|_{\psi = \psi_0}, \quad n \geqslant 1, \tag{13}$$

$$F(z, a) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{(1 + bz)(1 + cz)}{a(z - b)(z - c)}. \tag{14}$$

Если $b, c \neq -1$, то ряд (11) сходится равномерно по ϕ для всех достаточно малых ϵ и является равномерным асимптотическим разложением своей суммы при $\epsilon \to 0$.

При $b, c \neq -1$ неисключительные корни генерируются значениями

$$\phi_k = \begin{cases} \dfrac{\pi k}{N - 1} & \text{в случае (i);} \\ \dfrac{\pi k}{N} - \dfrac{\pi}{2N} & \text{в случае (ii);} \\ \dfrac{\pi k}{N + 1} & \text{в случае (iii),} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Доказательство. 1. Мы разбиваем доказательство на четыре части. В первой, текущей, мы показываем, что уравнение

$$\psi - \psi_0 = \epsilon F(e^{\psi}, e^{2\psi_0/\epsilon}), \tag{16}$$

полученное из характеристического уравнения

$$p_N(z) = 0 \tag{17}$$

преобразованием к переменной ψ, имеет ряд (11) в качестве формального решения.

Заметим, что уравнения (16) и (17) не эквивалентны. Из определения главной ветви логарифма Ln следует, что (16) влечёт за собой (17), и эквивалентно уравнению (17) только при

$$-\epsilon\pi < 2\Im(\psi - \psi_0) \leqslant \epsilon\pi. \tag{18}$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{gathered}N(\psi-\psi_0)=F(e^{\psi},e^{2N\psi_0}) \implies e^{2N(\psi-\psi_0)}=\frac{(1+bz)(1+cz)}{e^{2N\psi_0}(z-b)(z-c)}\\ \iff z^{2N}=\frac{(1+bz)(1+cz)}{(z-b)(z-c)} \implies e^{2N(\psi-\psi_0)}=\frac{(1+bz)(1+cz)}{e^{2N\psi_0}(z-b)(z-c)}\\ \implies \operatorname{Ln} e^{2N(\psi-\psi_0)}=2F(e^{\psi},e^{2N\psi_0})\\ \implies N\Re(\psi-\psi_0)+i\operatorname{Arg} e^{2N\Im(\psi-\psi_0)}=F(e^{\psi},e^{2N\psi_0}) \implies N(\psi-\psi_0)=F(e^{\psi},e^{2N\psi_0}),\end{gathered}$$

где последняя импликация справедлива в силу (18).

Чтобы показать, что ряд (11) является решением уравнения (16), мы трактуем переменную $e^{2\psi_0/\epsilon}$ как константу. Тогда (16) принимает вид

$$\psi-\psi_0=\epsilon F(e^{\psi},a),\quad |a|=1, \tag{19}$$

и по форме совпадает с уравнением, рассматриваемым в комбинаторной теореме Лагранжа [4, p. 150]. Согласно этой теореме решение уравнения (19) представляется формальным степенным рядом по ϵ

$$\psi=\psi_0+\sum_{n\geqslant 1}\frac{\epsilon^n}{n!}\frac{d^{n-1}F^n(e^{\psi_0},a)}{d\psi^{n-1}}. \tag{20}$$

В частности, при $a=e^{2\psi_0/\epsilon}$ этот ряд — решение уравнения (16).

2. Здесь мы устанавливаем равномерную сходимость ряда (20) относительно ϕ и a. Для оценки членов ряда на единичной окружности мы хотим использовать интегральную формулу Коши [15]. Однако прямое применение этой формулы невозможно из-за неаналитичности функции $F(z,a)$ в любом кольце $K=K(\delta)$. Мы преодолеваем эту трудность следующим образом.

Мы берём кольцо K достаточно узким и для произвольного $z_0=e^{\psi_0}$ рассматриваем $F(z,a)$ на диске

$$D_{z_0}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z-z_0|<\delta\}.$$

Так как b, c и дуальные к ним точки не принадлежат K, то функция $F(z,a)$ голоморфна на D_{z_0} за исключением кривых разрыва функции (см. рис. 2), которые согласно (9) задаются уравнением $\operatorname{Arg} f(z,a)=\pi$, где

$$f(z,a)=\frac{(1+bz)(1+cz)}{a(z-b)(z-c)}.$$

Это уравнение, в свою очередь, эквивалентно условию

$$\Im f(z,a)=0,\quad \Re f(z,a)\leqslant 0,$$

из которого следует, что кривые разрывы суть алгебраические кривые, степень которых не превышает четыре.

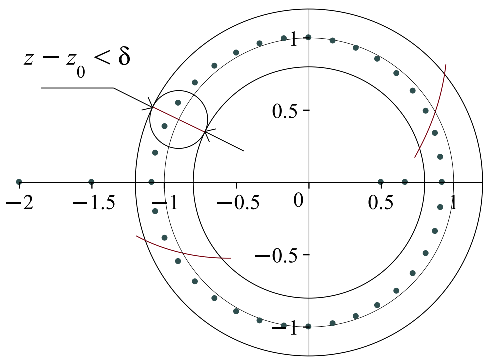

Рис. 2. Корни многочлена $p_N(z)$, кольцо K, диск D_{z_0} и кривые разрыва функции $F(z, z_0^{2N})$ при $b=-1.5$, $c=-2$, $N=19$ и $z_0=e^{2.69i}$.

Если функция $F(z,a)$ разрывна на D_{z_0}, мы заменяем её на ветвь $\tilde{F}(z,a)$ многозначной аналитической функции $\frac{1}{2}\ln f(z,a)$ такую, что $\tilde{F}(z_0,a)=F(z_0,a)$. В противном случае мы полагаем $\tilde{F}(z,a)=F(z,a)$. Кривые разрыва разбивают D_{z_0} на связные компоненты, и $\tilde{F}(z,a)$ является аналитическим продолжением $F(z,a)$ из связной компоненты, содержащей z_0, на весь диск. Поэтому если z_0 — внутренняя точка этой компоненты, то функции $\tilde{F}(z,a)$ и $F(z,a)$ вместе с их производными по z любого порядка совпадают в этой точке. Если же z_0 — граничная точка (то есть точка разрыва), то совпадают соответствующие предельные значения этих функций и их производных при $z\to z_0$ на этой компоненте.

Перейдём теперь к оценке членов ряда (20). Так как функция $\tilde{F}(z,a)$ голоморфна на диске D_{z_0}, то функция $\tilde{F}(e^{\psi},a)$ голоморфна на открытом множестве

$$U_{\psi_0} = \{\psi \in \mathbb{C}\colon \psi = \mathrm{L}(z),\ z \in D_{z_0}\},$$

где $\mathrm{L}(z)$ есть ветвь логарифма $\ln z$ на D_{z_0} такая, что $\mathrm{L}(z_0)=\psi_0$. На границе ∂U_{ψ_0} множества U_{ψ_0} выполняются оценки

$$|\tilde{F}(z,a)| < \frac{m}{2} < \infty, \quad |\psi-\psi_0| > \frac{\delta}{2}, \quad \delta \to 0. \tag{21}$$

Первая следует из неравенства

$$|\tilde{F}(z,a)| \leqslant \sup_{z\in K} |\tilde{F}(z,a)| = \frac{1}{2}\sup_{z\in K}\big(|\ln|f(z,a)|| + |\arg f(z,a)|\big) < \infty,$$

справедливого в силу ограниченности $|f(z,a)|$ на K при $b,c\neq -1$. Для обоснования второй зададим границу диска D_{z_0} уравнением $z=z_0+\delta e^{i\theta}$ и представим ∂U_{ψ_0} в виде

$$\begin{aligned}\psi-\psi_0 = \mathrm{L}(z)-\mathrm{L}(z_0) = \ln\left|\frac{z}{z_0}\right| + i(\arg z - \arg z_0) = \ln\left|\frac{z}{z_0}\right| + i\,\mathrm{Arg}\,\frac{z}{z_0} = \\ = \mathrm{Ln}\,\frac{z}{z_0} = \mathrm{Ln}\big[1+\delta e^{i(\theta-\phi)}\big],\end{aligned} \tag{22}$$

где единственное нетривиальное равенство

$$\arg z - \arg z_0 = \operatorname{Arg} \frac{z}{z_0}$$

верно в силу малости δ, так как тогда $\arg(z/z_0)$ также мал и не выходит за пределы интервала $(-\pi,\pi]$. Тогда рассматриваемая оценка следует из (22) и оценки

$$|\operatorname{Ln}[1+\delta e^{i(\theta-\phi)}]| > \frac{\delta}{2}.$$

С учётом (21) из интегральной формулы Коши находим

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}F^n(e^{\psi},a)}{d\psi^{n-1}}\Big|_{\psi=\psi_0}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\partial U_{\psi_0}}\left[\frac{F(e^{\psi},a)}{\psi-\psi_0}\right]^n d\psi\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\partial U_{\psi_0}}\left|\frac{F(e^{\psi},a)}{\psi-\psi_0}\right|^n |d\psi| &< \frac{1}{2\pi n}\frac{m^n}{\delta^n}2\pi < \left[\frac{m}{\delta}\right]^n, \end{aligned} \tag{23}$$

то есть для достаточно малых ϵ ряд (20) мажорируется сходящимся геометрическим рядом, что влечёт за собой равномерную сходимость ряда (20).

3. Оценка ряда (11) геометрическим рядом означает также, что этот ряд является равномерным относительно ϕ асимптотическим разложением при $\epsilon \to 0$ своей суммы. Это следует из (23) и оценок

$$\begin{gathered} \frac{1}{\epsilon^k}\left|\psi - \sum_{n=0}^{k-1}\epsilon^n\psi_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n\psi_{n+k}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n|\psi_{n+k}| = \left[\frac{m}{\delta}\right]^k\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n\left[\frac{m}{\delta}\right]^n < \\ < M < \infty, \quad \epsilon\to 0. \end{gathered}$$

4. В последней части доказательства мы показываем, что для достаточно малых ϵ корни уравнения (16), определённые рядом (11) и начальными аппроксимациями (15), различны, то есть совпадают по числу с этими аппроксимациями. В силу импликации (16) $\Rightarrow$ (17) это означает, что уравнения (10)–(15) определяют все неисключительные корни уравнения (17).

Мы исходим из наблюдения, что для достаточно малых ϵ корни, определённые рядом (11), суть значения функции $\psi(\epsilon,\phi)$ на интервалах ϕ между соседними точками разрыва этой функции. Тогда, чтобы показать, что при начальных аппроксимациях (15) эти корни различны, мы должны установить, что разные значения (15) попадают в разные интервалы непрерывности, или, другими словами, что между соседними точками (15) лежит по крайней мере одна точка разрыва. Полагаясь на равномерную асимптотическую сходимость ряда, мы ограничиваемся в этом исследовании первым приближением функции $\psi(\epsilon,\phi)$ (см. рис. 3).

Начнём с характеризации точек разрыва функции ψ_1. В соответствии с определением Ln это точки, в которых $\operatorname{Arg} f(e^{i\phi},e^{2i\phi/\epsilon})=\pi$. Мы ассоциируем их с точками

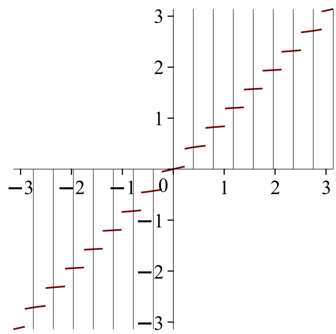

Рис. 3. График функции $\mathrm{Arg}[\psi_0(\phi)+\epsilon\psi_1(\epsilon,\phi)]$ при $b=-1.5$, $c=-2$ и $N=9$. Вертикальные линии представляют начальные аппроксимации.

нулевого аргумента ψ_1, в которых $\mathrm{Arg}\, f(e^{i\phi},e^{2i\phi/\epsilon})=0$. В совокупности те и другие суть в точности решения уравнения

$$\Im f(e^{i\phi}, e^{2i\phi/\epsilon}) = 0 \tag{24}$$

и различаются только знаком в них функции $\Re f(e^{i\phi},e^{2i\phi/\epsilon})$. Для первых он отрицательный, для вторых — положительный. В тригонометрической форме (24) эквивалентно уравнению

$$\omega_N(\phi) \equiv \sin 2\phi(N+1) - A\sin 2\phi N + B\sin 2\phi(N-1) = 0, \tag{25}$$
$$A = b^2 + c^2, \quad B = b^2c^2,$$

а знак функции $\Re f(e^{i\phi},e^{2i\phi/\epsilon})$ совпадает со знаком выражения

$$\cos 2\phi(N+1) - A\cos 2\phi N + B\cos 2\phi(N-1).$$

Заметим, что из этих формул следует, что $\phi=0,\pi/2$ суть точки нулевого аргумента для всех $b,c<0$, исключая случай (ii), в котором $\phi=0$ является точкой разрыва.

Точки разрыва и точки нулевого аргумента перемежаются. Это следует из тождества

$$\frac{d}{d\phi}\arg f = -\frac{2}{\epsilon} + \frac{2(b^2c^2-1)[b^2c^2-(b^2+c^2)\cos 2\phi+1]}{(b^4-2b^2\cos 2\phi+1)(c^4-2c^2\cos 2\phi+1)},$$

которое показывает, что для достаточно малых ϵ функция $\arg f$ монотонна и, следовательно, значения 0 и π функции $\mathrm{Arg}\, f$ чередуются с ростом ϕ.

Теперь мы готовы показать, что между ближайшими начальными аппроксимациями (15) лежит по крайней мере одна точка разрыва. Для этого мы уплотним сетку значений (15), рассматривая вместо неё последовательность $\phi_{k/2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Простые вычисления показывают, что

$$\omega_N(\phi_{k/2}) = \begin{cases} (-1)^k \sin\phi_k(2\cos\phi_k - A) & \text{в случае (i);} \\ (-1)^k (B-1)\sin\left(\phi_k - \dfrac{\pi}{2N}\right) & \text{в случае (ii);} \\ (-1)^k \sin\phi_k(A - 2B\cos\phi_k) & \text{в случае (iii).} \end{cases} \tag{26}$$

Рассмотрим случай (i). Учитывая симметрию задачи, ограничимся рассмотрением отрезка $\phi \in [0,\pi/2]$. На интервале $(0,\pi/2)$ выражение (26) не обращается в нуль, а его знак определяется только коэффициентом $(-1)^k$ и, следовательно, меняется на противоположный при переходе $k \to k+1$. Это означает, что на этом интервале между соседними точками последовательности $\phi_{k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$, обязательно лежит хотя бы один корень уравнения (25) и, в силу перемежаемости точек разрыва и точек нулевого аргумента, между соседними точками (15) лежит хотя бы одна точка разрыва. В граничных интервалах $[\phi_0,\phi_1)$ и $(\phi_{N-2},\phi_{N-1}]$ также лежат точки разрыва. Это следует из того, что внутри каждого из этих интервалов лежит корень уравнения (25) и ϕ_0 и ϕ_{N-1} — точки нулевого аргумента. Если этот корень является точкой нулевого аргумента, то в силу перемежаемости между ним и граничной точкой обязательно есть точка разрыва. В противном случае сам этот корень является точкой разрыва.

Анализ случая (iii) полностью аналогичен анализу случая (i). Случай (ii) при $bc \neq 1$ рассматривается также аналогично с той поправкой, что диапазон изменения ϕ ограничивается отрезком $[\pi/2, \pi/2 + \pi/2N]$ и $\phi = 0$ является точкой разрыва. При $bc = 1$ последовательность $\phi_{k/2}$ является решением уравнения (25), и, следовательно, между ближайшими точками (15) обязательно лежит точка разрыва. □

2. Численный анализ

Сравним результаты вычисления корней многочлена $p_N(z)$, полученные с помощью формул (10)–(15) и полученные на основе численных алгоритмов приложения MAPLE. Для примера исследуем случай (iii) при $b,c \in (-1,0)$. На рис. 4 для выбранных корней многочлена $p_N(z)$ и разных значений параметров N, b и c показаны графики порядка точности аппроксимации этих корней формулами (10)–(15) в зависимости от порядка аппроксимации.

Порядок аппроксимации — это порядок n частичной суммы ряда (11), взятой для аппроксимации. Порядок точности аппроксимации — это величина

$$n_\epsilon = \frac{\ln|z - z_\epsilon|}{\ln\epsilon}, \quad \epsilon = 1/N,$$

где z — точные координаты корня многочлена $p_N(z)$, $z_\epsilon = z_\epsilon(n)$ — его приближённое значение, соответствующее порядку аппроксимации n. Выбор корней указан в описании рисунка. Это корни с наихудшей $\phi = \phi_0$, наилучшей $\phi = \phi_{(N-1)/2}$ и промежуточной $\phi = \phi_{(N+1)/4}$ точностью аппроксимации. Значения этих корней были получены программой MAPLE с точностью до 10^{-40}.

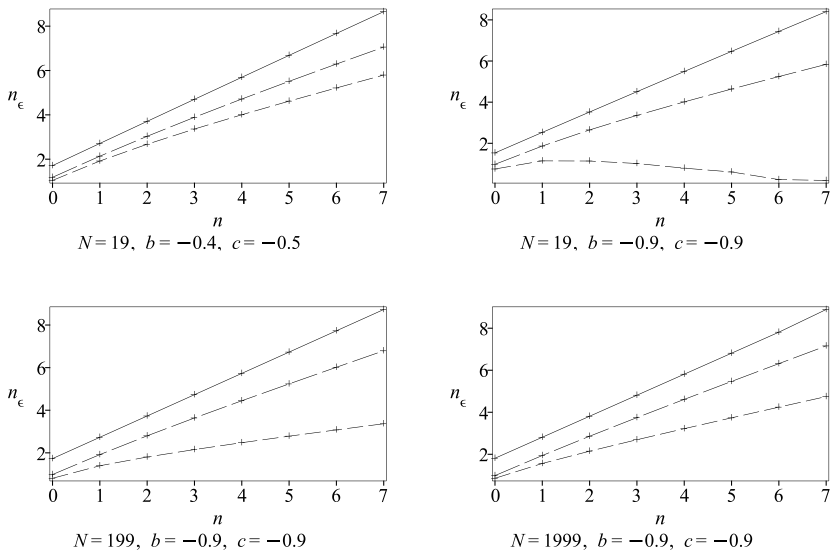

Рис. 4. Порядок точности аппроксимации n_ϵ как функция порядка аппроксимации n для выбранных корней многочлена $p_N(z)$ при различных значениях N, b и c. Штриховая линия обозначает корень, ближайший к точке $z=1$, сплошная линия — к точке с угловой координатой $\phi=\phi_{(N-1)/2}$, линия с длинными штрихами — к точке с угловой координатой $\phi=\phi_{(N+1)/4}$.

Мы видим, что если b и c достаточно далеки от значения -1, то даже при относительно малых N приближение корней многочлена $p_N(z)$, полученное на основе частичных сумм ряда (11), отлично согласуется с порядком этих сумм. Если же b и c близки к -1, то корни, близкие к $|z|=1$, аппроксимируются плохо. Однако при увеличении N согласование порядка точности аппроксимации с порядком аппроксимации восстанавливается.

Представленные наблюдения являются косвенным подтверждением утверждений, сделанных в теореме предыдущего раздела.

Список литературы

[1] Schrödinger E., "Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme", *Annalen der Physik*, **44**, (1914), 916–934.

[2] Takizawa E., Kobayasi K., "Heat Flow in a System of Coupled Harmonic Oscillators", *Chinese J. Phys.*, **1**:2, (1963), 59–73.

[3] Gudimenko A. I., Likhosherstov A., "Spectral problem for a harmonic chain with dissipation at the boundaries", *Math. Notes*, **116**:4, (2024), 600–613.

[4] Comtet L., *Advanced combinatorics. The art of finite and infinite expansions*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1974.

[5] Goursat E., *A Course in Mathematical Analysis, Vol. 2: Functions of a Complex Variable*, Ginn and Compaty, Boston, New York, 1916.

[6] Whittaker E. T., Watson G. N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2021.

[7] Losonczi L., "Eigenvalues and eigenvectors of some tridiagonal matrices", *Acta Math. Hungar.*, **60**, (1992), 309–322.

[8] da Fonseca C. M., Kowalenko V., "Eigenpairs of a family of tridiagonal matrices: three decades later", *Acta Math. Hungar.*, **160**, (2020), 376–389.

[9] Du Z., da Fonseca C. M., "Root location for the characteristic polynomial of a Fibonacci type sequence", *Czechoslovak Mathematical Journal*, **73**:1, (2023), 189–195.

[10] Losonczi L., "On the zeros of reciprocal polynomials", *Publ. Math. Debrecen.*, **94**:3–4, (2019), 455–466.

[11] Rieder Z., Lebowitz J. L., Lieb E., "Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state", *J. Math. Phys.*, **8**:5, (1967), 1073–1078.

[12] Nakazawa H., "On the lattice thermal conduction", *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **45**, (1970), 231–262.

[13] Weiderpass G. A., Monteiro G. M., Caldeira A. O., "Exact solution for the heat conductance in harmonic chains", *Phys. Rev. B*, **102**, (2020), 125401.

[14] Гузев М. А., Дмитриев А. А., "Различные формы представления решения одномерной гармонической модели кристалла", *Дальневост. матем. журн.*, **17**:1, (2017), 30–47.

[15] Евграфов М. А., *Аналитические функции*, Наука ГРФМЛ, Москва, 1991.

Поступила в редакцию
01 июня 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00. Работа А. В. Лихошерстова поддержана Российским Научным Фондом (проект № 22-11-00171-П).

Gudimenko A. I.[1], *Likhosherstov A. V.*[1,2] Application of the Lagrange formula to calculate the eigenvalues of a harmonic chain with dissipation at the boundaries. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2025. V. 25. No 2. P. 232–243.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
[2] Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The eigenvalue problem for a dynamic system describing in Schrödinger coordinates the oscillations of a homogeneous harmonic chain with dissipation at the boundaries is considered. The combinatorial Lagrange formula is used to obtain a uniform approximation of the eigenvalues for a sufficiently large number of particles in the chain.

Key words: *harmonic chain, Schrödinger coordinates, eigenvalue problem.*