

УДК 519.63  
MSC2020 76T30

© А. Е. Васильев<sup>1</sup>

# Численное моделирование неустойчивости Рэлея – Тейлора с использованием многофазной модели

В работе представлено исследование применимости многофазной модели типа Баера – Нунциато к исследованию процесса развития неустойчивости Рэлея – Тейлора в металлах, находящихся в экстремальном «псевдожидком» состоянии. Рассмотрена модельная задача с синусоидальным возмущением контактной границы между металлами. Полученные результаты показывают соответствие теоретическим оценкам. Проведено исследование влияния сжимаемости на развитие процесса. Полученные результаты свидетельствуют о наличии влияния сжимаемости фаз не только на сам процесс, но и на особенности его численного моделирования.

**Ключевые слова:** *численное моделирование, многофазные течения, неустойчивость Рэлея – Тейлора, уравнения Баера – Нунциато, решатель HLLC.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202513>

## Введение

Математическое моделирование процесса сварки взрывом является активно развивающейся и актуальной областью исследований. Специфика быстропротекающих высокоэнергетических явлений, протекающих при сварке взрывом, затрудняет проведение детальных натурных экспериментов. Среди работ, уделяющих внимание моделированию этого процесса, можно отметить [1–4]. В этих работах, как и во многих других, основное внимание уделяется упруго-пластическим процессам внутри металлических пластин, таким как образование зоны упрочнения, деформация пластин, их разрушение, формирование кумулятивной струи металлических частиц и тому подобных. Такая специфика исследуемых явлений диктует и определенный набор математических моделей и численных методов. Большое внимание уделяется моделям упруго-пластической сплошной среды, Лагранжевым методам, ALE [4], SPH [4, 5]. Используются и коммерческие программные пакеты, такие как LS-DYNA [6, 7].

<sup>1</sup> Институт автоматизации проектирования РАН, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18.  
Электронная почта: [vasilev.ae@phystech.edu](mailto:vasilev.ae@phystech.edu)

С другой стороны, в задаче сварки взрывом естественным образом возникает необходимость моделирования как минимум двух разнородных материалов, что обуславливает возможность применения моделей многофазной сплошной среды. В таких работах, как [8] и [9], было описано применение многофазной модели Баэра – Нунциато к моделированию процесса высокоскоростного соударения пластин, и были получены данные, свидетельствующие о возможности успешного применения гидродинамического описания для моделирования начальной стадии процесса сварки взрывом. Выбор именно этой модели многофазной среды связан с её выдающимися математическими свойствами, а именно практически безусловной гиперболичностью системы. Помимо этого, важным фактором является приспособленность модели для численного исследования процессов горения и взрыва гетерогенных взрывчатых веществ [10]. Настоящая работа ставит перед собой цель расширить представленный в работе [8] одномерный трёхфазный алгоритм до двумерного и исследовать его применимость к задаче развития неустойчивости Рэлея – Тейлора (РТН) контактной границы между металлами, находящимися в «псевдожидком» состоянии вследствие экстремальных давлений, возникающих в процессе соударения пластин. В работе будет использоваться именно трёхфазный алгоритм, несмотря на двухфазность исследуемой задачи. Причина такого несоответствия заключается в перспективе использования разработанного алгоритма для исследования более сложных задач, связанных со сваркой взрывом, где пренебречь газовой фазой уже нельзя. Задача о развитии РТН выбрана не случайно, а по причине того, что экспериментальные данные и теоретические выкладки, как показано в работе [11], свидетельствуют о том, что это явление вносит существенный вклад в наблюдаемую картину течения в области контакта пластин. Эта задача представляет интерес как сама по себе, в силу редкости рассматриваемой постановки, так и как фундамент будущих исследований в области изучения газодинамических процессов между поверхностями сталкивающихся пластин.

Структура работы выглядит следующим образом. В начале в Главе 1 приведены используемая двумерная трехфазная математическая модель и ее физическое описание. Затем в Главе 2 описан реализованный численный метод, основанный на конечно-объемном Римановском решателе HLLC. Глава 3 содержит постановку модельной задачи для исследования применимости многофазной модели для моделирования процесса развития РТН в металлах в «псевдожидком» состоянии; указаны времена моделирования и использованные расчетные сетки. Наконец, в Главе 4 продемонстрированы основные результаты численного моделирования. Проделано сравнение полученных данных с теоретическими оценками роста амплитуды возмущения во времени на линейной стадии РТН и асимптотических скоростей пузыря и струи на нелинейной стадии РТН. В Главе 4 подведены основные итоги исследования, приведены выводы и обозначены перспективы дальнейшей работы в этом направлении.

## 1. Математическая модель

Двумерная трёхфазная математическая модель основана на системе уравнений Баера–Нунциато [12]:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{U}) + \mathbf{G}_y(\mathbf{U}) = \mathbf{H}(\mathbf{U}, (\alpha_k)_x) + \mathbf{I}(\mathbf{U}, (\alpha_k)_y) + \mathbf{S}_v(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_p(\mathbf{U}),$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1) \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 v_1 \\ \alpha_1 u_1 (\rho_1 E_1 + p_1) \\ 0 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2) \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 v_2 \\ \alpha_2 u_2 (\rho_2 E_2 + p_2) \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 \\ \alpha_3 (\rho_3 u_3^2 + p_3) \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 v_3 \\ \alpha_3 u_3 (\rho_3 E_3 + p_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 v_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 v_1 \\ \alpha_1 (\rho_1 v_1^2 + p_1) \\ \alpha_1 v_1 (\rho_1 E_1 + p_1) \\ 0 \\ \alpha_2 \rho_2 v_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 v_2 \\ \alpha_2 (\rho_2 v_2^2 + p_2) \\ \alpha_2 v_2 (\rho_2 E_2 + p_2) \\ \alpha_3 \rho_3 v_3 \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 v_3 \\ \alpha_3 (\rho_3 v_3^2 + p_3) \\ \alpha_3 v_3 (\rho_3 E_3 + p_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\tilde{u}(\alpha_1)_x \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_1)_x \\ 0 \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_1)_x \\ -\tilde{u}(\alpha_2)_x \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_2)_x \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_2)_x \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_3)_x \\ 0 \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_3)_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\tilde{v}(\alpha_1)_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_1)_y \\ \tilde{p}\tilde{v}(\alpha_1)_y \\ -\tilde{v}(\alpha_2)_y \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_2)_y \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_2)_y \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_3)_y \\ \tilde{p}\tilde{v}(\alpha_3)_y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 v_1 \\ \alpha_1 \rho_1 E_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 v_2 \\ \alpha_2 \rho_2 E_2 \\ \alpha_3 \rho_3 \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 \\ \alpha_3 \rho_3 v_3 \\ \alpha_3 \rho_3 E_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda(u_3 - u_1) \\ \lambda(v_3 - v_1) \\ \lambda\tilde{u}(u_3 - u_1) + \lambda\tilde{v}(v_3 - v_1) \\ 0 \\ 0 \\ \lambda(u_3 - u_1) \\ \lambda(v_3 - v_1) \\ \lambda\tilde{u}(u_3 - u_2) + \lambda\tilde{v}(v_3 - v_2) \\ 0 \\ \lambda(u_1 - u_3) \\ \lambda(v_1 - v_3) \\ \lambda\tilde{u}(u_1 - u_3) + \lambda\tilde{v}(v_1 - v_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} \mu(p_1 - p_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu\tilde{p}(p_1 - p_3) \\ \mu(p_2 - p_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu\tilde{p}(p_3 - p_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu\tilde{p}(p_3 - p_1) \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad E_k = \frac{u_k^2}{2} + \frac{v_k^2}{2} + e_k(p_k, \rho_k) = \frac{u_k^2}{2} + \frac{v_k^2}{2} + \frac{p_k + \gamma_k P_{0k}}{\rho_k(\gamma_k - 1)},$$

$$\tilde{p} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k, \quad \tilde{u} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \rho_k u_k / \sum_{k=1}^3 \alpha_k \rho_k, \quad \tilde{v} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \rho_k v_k / \sum_{k=1}^3 \alpha_k \rho_k.$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — вектор консервативных переменных;  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  — векторы потоков в  $x$  и  $y$  направлениях соответственно,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{I}$  — «неконсервативные» члены, также называемые сопловыми членами;  $\mathbf{S}_v$  и  $\mathbf{S}_p$  — векторы, содержащие члены, связанные с релаксацией скоростей и давлений. При записи системы уравнений использованы стандартные обозначения:  $t$  — время,  $x$  и  $y$  — пространственные координаты,  $\alpha$  — объемная доля,  $\rho$  — истинная плотность,  $u$  и  $v$  — компоненты скорости в  $x$  и  $y$  направлениях,  $p$  — давление,  $E$  — полная энергия. Скорости  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$ , давление  $\tilde{p}$  — параметры на межфазной границе. Нижними индексами  $k=1,2,3$  обозначается принадлежность величины к первой, второй и третьей фазам соответственно, а нижние

индексы  $t, x, y$  соответствуют частным производным величин по времени или одной из пространственных координат.

В качестве уравнения состояния (УРС) для каждой из фаз используется дву-  
членное уравнение состояния, аналогичное приведённому в работе [8].

Параметры  $\mu$  и  $\lambda$  отвечают за релаксацию давления и скорости соответственно. В рамках задач пористых сред эти параметры имеют конечные значения, связанные с акустическими масштабами для релаксации давления и межфазным трением для релаксации скорости. Однако в рамках настоящей работы можно сделать упрощаю-  
щее предположение о мгновенном установлении межфазного равновесия скоростей и давлений в силу отсутствия смешивания фаз:  $\mu \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow +\infty$ . В таком случае будет выполняться следующее соотношение между скоростями и давлениями фаз:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 = p_3, \\ u_1 &= u_2 = u_3, \\ v_1 &= v_2 = v_3. \end{aligned}$$

## 2. Численный метод

### 2.1. Схема расщепления по физическим процессам

Вычислительный алгоритм основан на принципе расщепления по физическим процессам:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = L_p L_v L_h \mathbf{U}_{i,j}^n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{U}_{i,j}^n$  — вектор консервативных переменных численного решения в ячейке  $i, j$  на временном слое  $n$ .

На каждом шаге по времени первым производится гиперболический шаг, соот-  
ветствующий в формуле (1) оператору  $L_h$ . Этот шаг состоит из решения исходной  
системы уравнений без векторов релаксации  $\mathbf{S}_v$  и  $\mathbf{S}_p$ . Затем полученное решение ис-  
пользуется как начальные данные для оператора релаксации скорости  $L_v$ . На этом  
этапе скорости всех фаз выравниваются, а также корректируются внутренние энер-  
гии фаз. После этого аналогично применяется оператор релаксации давления  $L_p$ .  
В результате действия этого оператора давления фаз выравниваются, изменяются  
объёмные доли, плотности и внутренние энергии фаз. Полученный после этого этапа  
вектор переменных является итоговым на каждом шаге по времени.

### 2.2. Гиперболический шаг

Для решения системы на гиперболическом шаге целесообразно использовать  
конечно-объёмный метод с подходящим Римановским решателем. Быстропротека-  
ющий высокозэнергетический характер процессов в области применения модели, в  
том числе и в области задачи исследования процессов сварки взрывом, определяет  
необходимость в консервативном методе, хорошо разрешающем волновые процессы.  
В настоящей работе используется HLLC-подобный метод, основанный на методе,  
использованном в работе [8] и модифицированный для трёхмерного двухфазного  
случая.

Для решения исходная система разбивается на две части: уравнения для объемной доли и оставшуюся уменьшенную подсистему. Оставшаяся подсистема для вектора консервативных переменных  $\mathbf{U}$  может быть переписана в следующем виде:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x(\mathbf{u}) + \mathbf{g}_y(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{u}, (\alpha_k)_x) + \mathbf{i}(\mathbf{u}, (\alpha_k)_y),$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 v_1 \\ \alpha_1 \rho_1 E_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 v_2 \\ \alpha_2 \rho_2 E_2 \\ \alpha_3 \rho_3 \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 \\ \alpha_3 \rho_3 v_3 \\ \alpha_3 \rho_3 E_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1) \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 v_1 \\ \alpha_1 u_1 (\rho_1 E_1 + p_1) \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2) \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 v_2 \\ \alpha_2 u_2 (\rho_2 E_2 + p_2) \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 \\ \alpha_3 (\rho_3 u_3^2 + p_3) \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 v_3 \\ \alpha_3 u_3 (\rho_3 E_3 + p_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 v_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 v_1 \\ \alpha_1 (\rho_1 v_1^2 + p_1) \\ \alpha_1 v_1 (\rho_1 E_1 + p_1) \\ \alpha_2 \rho_2 v_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 v_2 \\ \alpha_2 (\rho_2 v_2^2 + p_2) \\ \alpha_2 v_2 (\rho_2 E_2 + p_2) \\ \alpha_3 \rho_3 v_3 \\ \alpha_3 \rho_3 u_3 v_3 \\ \alpha_3 (\rho_3 v_3^2 + p_3) \\ \alpha_3 v_3 (\rho_3 E_3 + p_3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{p}(\alpha_1)_x \\ 0 \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_1)_x \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_2)_x \\ 0 \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_2)_x \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_3)_x \\ 0 \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_3)_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_1)_y \\ \tilde{p}\tilde{v}(\alpha_1)_y \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_2)_y \\ \tilde{p}\tilde{u}(\alpha_2)_y \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p}(\alpha_3)_y \\ \tilde{p}\tilde{v}(\alpha_3)_y \end{bmatrix}.$$

Аппроксимация уравнений переноса объемной доли в соответствии с работой [13] выглядит следующим образом:

$$(\alpha_{k,i,j}^{n+1})_h = \alpha_{k,i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \tilde{u}_{i,j}^n \left[ \delta_{k,i+1/2,j}^n - \delta_{k,i-1/2,j}^n \right] - \frac{\Delta t^n}{\Delta y} \tilde{v}_{i,j}^n \left[ \delta_{k,i,j+1/2}^n - \delta_{k,i,j-1/2}^n \right],$$

$$\delta_{k,i+1/2,j}^n = \begin{cases} \alpha_{k,i,j}^n, & S_{i+1/2,j}^* \geq 0 \\ \alpha_{k,i+1,j}^n, & S_{i+1/2,j}^* < 0 \end{cases}, \quad \delta_{k,i-1/2,j}^n = \begin{cases} \alpha_{k,i-1,j}^n, & S_{i-1/2,j}^* \geq 0 \\ \alpha_{k,i,j}^n, & S_{i-1/2,j}^* < 0 \end{cases},$$

Здесь  $S^+$  и  $S^-$  — сигнальные скорости,  $S^*$  — скорость контактного разрыва,  $c$  —

скорость звука, определяемые как

$$\begin{aligned} S_{i+1/2,j}^+ &= \max_{k=1,2,3} (u_{k,i,j}^n + c_{k,i,j}^n, u_{k,i+1,j}^n + c_{k,i+1,j}^n), \\ S_{i+1/2,j}^- &= \min_{k=1,2,3} (u_{k,i,j}^n - c_{k,i,j}^n, u_{k,i+1,j}^n - c_{k,i+1,j}^n), \\ S_{i+1/2,j}^* &= \frac{\tilde{p}_{i+1,j}^n - \tilde{p}_{i,j}^n + \tilde{\rho}_{i,j}^n \tilde{u}_{i,j}^n \left( S_{i+1/2,j}^- - \tilde{u}_{i,j}^n \right) - \tilde{\rho}_{i+1,j}^n \tilde{u}_{i+1,j}^n \left( S_{i+1/2,j}^+ - \tilde{u}_{i+1,j}^n \right)}{\tilde{\rho}_{i,j}^n \left( S_{i+1/2,j}^- - \tilde{u}_{i,j}^n \right) - \tilde{\rho}_{i+1,j}^n \left( S_{i+1/2,j}^+ - \tilde{u}_{i+1,j}^n \right)}, \\ \tilde{\rho}_{i,j}^n &= \sum_{k=1,2,3} \alpha_{k,i,j}^n \rho_{k,i,j}^n, \quad c_{k,i,j}^n = \sqrt{\gamma_k \frac{p_{k,i,j}^n + P_{0k}}{\rho_{k,i,j}^n}}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Конечно-объемная аппроксимация большой подсистемы записывается в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{i,j}^{n+1})_h &= \mathbf{u}_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[ \mathbf{f}_{i+1/2,j}^{HLLC} (\mathbf{u}_{i,j}^n, \mathbf{u}_{i+1,j}^n) - \mathbf{f}_{i-1/2,j}^{HLLC} (\mathbf{u}_{i-1,j}^n, \mathbf{u}_{i,j}^n) \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t^n}{\Delta y} \left[ \mathbf{g}_{i,j+1/2}^{HLLC} (\mathbf{u}_{i,j}^n, \mathbf{u}_{i,j+1}^n) - \mathbf{g}_{i,j-1/2}^{HLLC} (\mathbf{u}_{i,j-1}^n, \mathbf{u}_{i,j}^n) \right] + \\ &\quad + \mathbf{h} (\mathbf{u}_{i,j}^n, (\Delta_x \alpha_k)_{i,j}^n) + \mathbf{i} (\mathbf{u}_{i,j}^n, (\Delta_y \alpha_k)_{i,j}^n). \end{aligned}$$

Численная аппроксимация потока  $\mathbf{f}$  через грани ячеек вычисляется в соответствии с подходом HLLC. Для этого введём следующие обозначения:

$$\mathbf{f}_{i+1/2,j}^{HLLC} (\mathbf{u}_{i,j}^n, \mathbf{u}_{i+1,j}^n) = \begin{bmatrix} \Phi_{1,i+1/2,j}^n \\ \Phi_{2,i+1/2,j}^n \\ \Phi_{3,i+1/2,j}^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{i,j}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1,i,j}^n \\ \mathbf{W}_{2,i,j}^n \\ \mathbf{W}_{3,i,j}^n \end{bmatrix}.$$

Тогда поток через грань ячейки

$$\Phi_{k,i+1/2,j}^n = \begin{cases} \Phi_{k,i,j}^n, & S_{i+1/2,j}^- \geq 0, \\ \Phi_{k,i,j}^n + S_{i+1/2,j}^- \left( \mathbf{Q}_k^- \mathbf{u}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{W}_{k,i,j}^n \right), & S_{i+1/2,j}^- < 0 \leq S_{i+1/2,j}^*, \\ \Phi_{k,i+1,j}^n + S_{i+1/2,j}^+ \left( \mathbf{Q}_k^+ \mathbf{u}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{W}_{k,i+1,j}^n \right), & S_{i+1/2,j}^* < 0 \leq S_{i+1/2,j}^+, \\ \Phi_{k,i+1,j}^n, & S_{i+1/2,j}^+ \geq 0. \end{cases}$$

Здесь значения переменных слева и справа от контактного разрыва  $\mathbf{Q}_k^-, \mathbf{Q}_k^+$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k,i+1/2,j}^- &= C_k^- \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ S_{i+1/2,j}^* \\ v_{k,i,j}^n \\ \frac{p_{k,i,j}^n}{\rho_{k,i,j}^n} + \left( S_{i+1/2,j}^* - u_{k,i,j}^n \right) \left( S_{i+1/2,j}^* + \frac{p_{k,i,j}^n}{\rho_{k,i,j}^n (S_{i+1/2,j}^- - u_{k,i,j}^n)} \right) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{k,i+1/2,j}^+ &= C_k^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ S_{i+1/2,j}^* \\ v_{k,i+1,j}^n \\ \frac{p_{k,i+1,j}^n}{\rho_{k,i+1,j}^n} + \left( S_{i+1/2,j}^* - u_{k,i+1,j}^n \right) \left( S_{i+1/2,j}^* + \frac{p_{k,i+1,j}^n}{\rho_{k,i+1,j}^n (S_{i+1/2,j}^+ - u_{k,i+1,j}^n)} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$C_k^- = \frac{\alpha_{k,i,j}^n \rho_{k,i,j}^n \left( S_{i+1/2,j}^- - u_{k,i,j}^n \right)}{S_{i+1/2,j}^- - S_{i+1/2,j}^*}, \quad C_k^+ = \frac{\alpha_{k,i+1,j}^n \rho_{k,i+1,j}^n \left( S_{i+1/2,j}^+ - u_{k,i+1,j}^n \right)}{S_{i+1/2,j}^+ - S_{i+1/2,j}^*}.$$

Производные объёмных долей по координате  $x$  в сопловых членах аппроксимируются в соответствии с выбранной аппроксимацией уравнения переноса объёмной доли:

$$(\Delta_x \alpha_k)_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x} \left( \delta_{k,i+1/2,j}^n - \delta_{k,i-1/2,j}^n \right),$$

$$\delta_{k,i+1/2,j}^n = \begin{cases} \alpha_{k,i,j}^n, & S_{i+1/2,j}^* \geq 0 \\ \alpha_{k,i+1,j}^n, & S_{i+1/2,j}^* < 0 \end{cases}, \quad \delta_{k,i-1/2,j}^n = \begin{cases} \alpha_{k,i-1,j}^n, & S_{i-1/2,j}^* \geq 0 \\ \alpha_{k,i,j}^n, & S_{i-1/2,j}^* < 0 \end{cases}.$$

### 2.3. Релаксация скорости

Из исходной системы следует, что на шаге релаксации скорости необходимо решить в каждой ячейке следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) для каждой из фаз:

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{S}_v(\mathbf{U}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial (\alpha_k \rho_k)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial (\alpha_k \rho_k u_k)}{\partial t} = \lambda(u_m - u_k), \\ \frac{\partial (\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial t} = \lambda(v_m - v_k), \\ \frac{\partial (\alpha_k \rho_k E_k)}{\partial t} = \lambda \tilde{v}(v_m - v_k) + \lambda \tilde{u}(u_m - u_k), \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \quad m \neq k, \quad (2)$$

где  $m$  — любой индекс, не равный  $k$ .

Принимая во внимание учтённое ранее предположение о стремлении  $\lambda$  к бесконечности, можно получить выражение для равновесной скорости фаз:

$$(u)_v = \sum_{k=1}^3 (\alpha_k \rho_k u_k)_h / \sum_{k=1}^3 (\alpha_k \rho_k)_h, \quad (v)_v = \sum_{k=1}^3 (\alpha_k \rho_k v_k)_h / \sum_{k=1}^3 (\alpha_k \rho_k)_h.$$

Здесь нижний индекс  $h$  соответствует значениям переменных после гиперболического шага,  $v$  — после шага релаксации скоростей. В соответствии с системой (2) процедура релаксации скорости приводит к изменению не только скоростей фаз, но и их внутренних энергий. Для поправки к энергии можно несложным образом получить следующее выражение:

$$(e_k)_v = (e_k)_h + \frac{1}{2}((u)_v - (u_k)_h)^2 + \frac{1}{2}((v)_v - (v_k)_h)^2.$$

## 2.4. Релаксация давления

Как и для релаксации скоростей, в каждой ячейке для каждой фазы возникает необходимость решения следующей СОДУ:

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{S}_p(\mathbf{U}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \mu(p_k - p_m), \\ \frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_k \rho_k u_k)}{\partial t} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad m \neq k, \\ \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha_k \rho_k E_k)}{\partial t} = \mu \tilde{p}(p_k - p_m), \end{cases} \quad (3)$$

Принимая предположение об устремлении параметра  $\mu$  к бесконечности, систему (3) можно упростить, приведя её к системе нелинейных алгебраических уравнений. Основываясь на выкладках, приведённых в работах [8, 14, 15], можно записать итоговую систему уравнений относительно переменных  $(\rho_1)_p, (\rho_2)_p, (\rho_3)_p, (p)_p$ :

$$\begin{cases} 2(\rho_1)_p(\rho_1)_v \left( \frac{(p)_p + \gamma_1 P_{01}}{(\rho_1)_p(\gamma_1-1)} - \frac{(p)_v + \gamma_1 P_{01}}{(\rho_1)_v(\gamma_1-1)} \right) - ((p)_p - (\tilde{p})_v)((\rho_1)_p - (\rho_1)_v) = 0, \\ 2(\rho_2)_p(\rho_2)_v \left( \frac{(p)_p + \gamma_2 P_{02}}{(\rho_2)_p(\gamma_2-1)} - \frac{(p)_v + \gamma_2 P_{02}}{(\rho_2)_v(\gamma_2-1)} \right) - ((p)_p - (\tilde{p})_v)((\rho_2)_p - (\rho_2)_v) = 0, \\ 2(\rho_3)_p(\rho_3)_v \left( \frac{(p)_p + \gamma_3 P_{03}}{(\rho_3)_p(\gamma_3-1)} - \frac{(p)_v + \gamma_3 P_{03}}{(\rho_3)_v(\gamma_3-1)} \right) - ((p)_p - (\tilde{p})_v)((\rho_3)_p - (\rho_3)_v) = 0, \\ \sum_{k=1}^3 \left( \frac{m_k}{(\rho_k)_p} \right) - 1 = 0, \quad m_k = (\alpha_k)_v(\rho_k)_v. \end{cases}$$

Здесь нижний индекс  $p$  соответствует величинам после релаксации давлений. Полученная система может быть записана в векторном виде как

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} = [(\rho_1)_p \ (\rho_2)_p \ (\rho_3)_p \ (p)_p]^T,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 2(\rho_1)_p(\rho_1)_v \left( \frac{(p)_p + \gamma_1 P_{01}}{(\rho_1)_p(\gamma_1-1)} - \frac{(p)_v + \gamma_1 P_{01}}{(\rho_1)_v(\gamma_1-1)} \right) - ((p)_p - (\tilde{p})_v)((\rho_1)_p - (\rho_1)_v) \\ 2(\rho_2)_p(\rho_2)_v \left( \frac{(p)_p + \gamma_2 P_{02}}{(\rho_2)_p(\gamma_2-1)} - \frac{(p)_v + \gamma_2 P_{02}}{(\rho_2)_v(\gamma_2-1)} \right) - ((p)_p - (\tilde{p})_v)((\rho_2)_p - (\rho_2)_v) \\ 2(\rho_3)_p(\rho_3)_v \left( \frac{(p)_p + \gamma_3 P_{03}}{(\rho_3)_p(\gamma_3-1)} - \frac{(p)_v + \gamma_3 P_{03}}{(\rho_3)_v(\gamma_3-1)} \right) - ((p)_p - (\tilde{p})_v)((\rho_3)_p - (\rho_3)_v) \\ \sum_{k=1}^3 \left( \frac{m_k}{(\rho_k)_p} \right) - 1 \end{bmatrix}.$$

Решение нелинейной системы ищется методом Ньютона

$$\mathbf{X}^{(s+1)} = \mathbf{X}^{(s)} - \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(s)})\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(s)}),$$

где матрица Якоби системы

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 \\ -m_1/(\rho_1)_p^2 & -m_2/(\rho_2)_p^2 & -m_3/(\rho_3)_p^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_k = -2 \cdot \frac{(p_k)_v + \gamma_k P_{0k}}{\gamma_k - 1} - ((p)_p + (\tilde{p})_v), \quad B_k = \frac{2(\rho_k)_v}{\gamma_k - 1} - ((\rho_k)_p + (\rho_k)_v), \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь  $s$  — текущий номер итерации. Максимальное количество итераций для расчета в работе взято равным 100, однако на практике достаточно нескольких итераций для достижения требуемой точности.

### 3. Постановка задачи

Исследуется двумерная модельная задача, состоящая из двух «псевдожидкостей», находящихся в поле действия однородной массовой силы с  $g=2 \cdot 10^9 \text{ м/с}^2$ , соответствующим по порядку величины реально возникающему на поверхности пластин ускорению, как показано в [8]. Жидкости расположены в два слоя так, чтобы вектор массовой силы был направлен от более плотной к менее плотной жидкости. В начальный момент времени жидкости покоятся, к верхнему краю тяжелой жидкости приложено атмосферное давление  $p_{atm} = 10^5 \text{ Па}$ , а распределение давления внутри области задано как гидростатическое в поле массовой силы. Такие начальные условия соответствуют неустойчивому положению равновесия. Кроме того, в начальный момент вводится гармоническое возмущение поверхности раздела жидкостей. Схематическое изображение постановки задачи приведено на рис. 1.

Для численного моделирования была выбрана прямоугольная расчётная область размерами  $20 \times 10 \text{ мм}$  с построенной в ней равномерной декартовой расчётной сеткой. Расчёты проводились на трёх сетках разных размеров:  $125 \times 62$ ,  $250 \times 125$  и  $500 \times 250$  ячеек, число Куранта было равно  $CFL = 0.5$ . Слой тяжёлой жидкости толщиной  $h_2 = 4 \text{ мм}$  соответствовал свинцу плотностью  $\rho_l = 11300 \text{ кг/м}^3$  и двучленным УРС с параметрами  $P_{0l} = 15.5 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\gamma_l = 2.7$ , слой лёгкой жидкости толщиной  $h_1 = 6 \text{ мм}$  — стали плотностью  $\rho_s = 7900 \text{ кг/м}^3$  и параметрами УРС  $P_{0s} = 65 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\gamma_s = 3.0$ , кото-

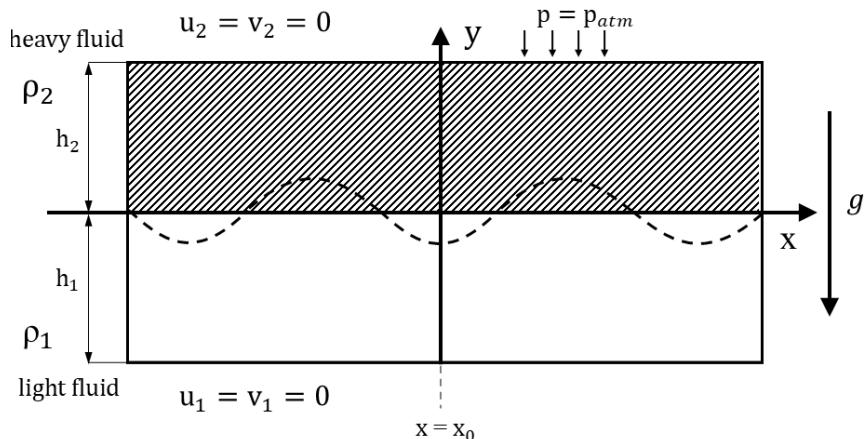


Рис. 1. Схематическое изображение постановки модельной задачи исследования применимости модели неравновесной многофазной сплошной среды для численного моделирования процесса развития РТН в металлах, находящихся в пластическом состоянии.

рые по предположению находятся в псевдожидком пластическом состоянии. Число Атвуда в данном случае составляет  $A = (\rho_l - \rho_s)/(\rho_l + \rho_s) = 0.177$ . В соответствии с оценкой времени нахождения соударяющихся металлов в этом состоянии из [11], а также приведенной далее оценки времени применимости линейной теории (5), время окончания вычислений было принято равным 10 мкс для наблюдения нелинейной стадии РТН. Дополнительно был проведен расчет для сетки  $1000 \times 500$  ячеек только до момента времени 4 мкс. На всех краях расчётной области задавались граничные условия стенки с проскальзыванием, то есть поток всех величин через границу равен нулю.

Третья фаза, которая в представленной постановке не используется, однако существует в исходной модели, моделируется с плотностью  $\rho_3 = 5000 \text{ кг}/\text{м}^3$  и таким же двучленным УРС с параметрами  $P_{03} = 20 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\gamma_3 = 3.0$  для обеспечения большей стабильности решения в случае возникновения растягивающих напряжений. Использование именно трёхфазной модели для исследования двухфазной задачи обусловлено перспективой использования этой же модели для исследования струи ударно-сжатого газа. Влияние третьей фазы на моделирование динамики процесса пренебрежимо мало, так как её объёмная доля полагается равной  $\alpha_3 = 0.00001$  во всей расчётной области. В области, соответствующей свинцу, объёмная доля свинца равна  $\alpha_l = 0.99998$ , соответственно в области стали уже объёмная доля стали равна  $\alpha_s = 0.99998$ . Поскольку использующийся в текущей работе метод принципиально многофазный, возмущение поверхности раздела задаётся как возмущение разрыва объёмных долей фаз в начальный момент времени. Формула этой поверхности  $\eta(t, x)$  в момент  $t = 0$ :

$$dy = \eta(0, x) = A \cdot \sin(x'), \quad x' = \frac{\pi}{B}|x - x_0| - \frac{\pi}{2},$$

где  $x_0$  —  $x$ -координата по центру расчетной области,  $A$  и  $B$  — задаваемые параметры.

Из линейной теории возмущений можно получить оценку для скорости роста неустойчивости. Согласно [11], если начальное возмущение  $\eta(0, x) = A \cdot \sin(kx + \delta)$ , где  $k$  — частота,  $\delta$  — сдвиг по фазе ( $kx + \delta \equiv x'$ ):

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= A \cdot \operatorname{ch}(nt) \cdot \sin(kx + \delta), \\ n &= \sqrt{k g \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_l + \rho_s}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Согласно [16], характерное время применимости этого выражения можно оценить следующим образом:

$$t \approx \left| \frac{1}{n} (\ln(|A|k)) \right|. \tag{5}$$

#### 4. Результаты численного моделирования

Рассмотрим процесс с параметрами возмущения  $A = 0.15 \text{ мм}$ ,  $B = 3.72 \text{ мм}$ . В этом случае амплитуда возмущения  $A \ll \lambda = 2\pi/k = 2B$  значительно меньше его длины волны, и результаты в начале моделирования должны согласовываться с выводами

линейной теории. На рис. 2 представлены графики зависимости удвоенной амплитуды возмущения от времени в расчётах в сравнении с предсказанием линейной теории устойчивости. Размер возмущения измерялся как расстояние между самой низкой и самой высокой точками линии  $\alpha_s = 0.5$  возле пика по центру.

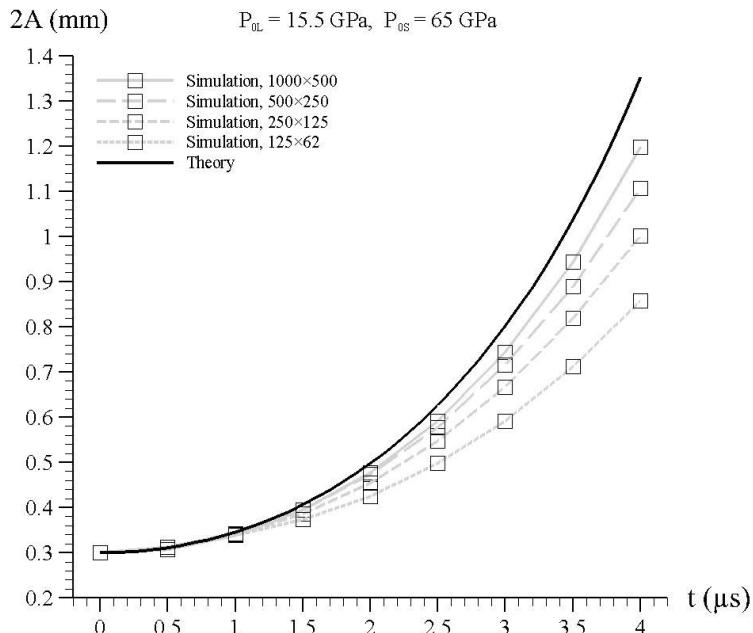


Рис. 2. Зависимость амплитуды возмущения от времени для расчётов на разной сетке, а также аналитическая оценка из линейной теории.

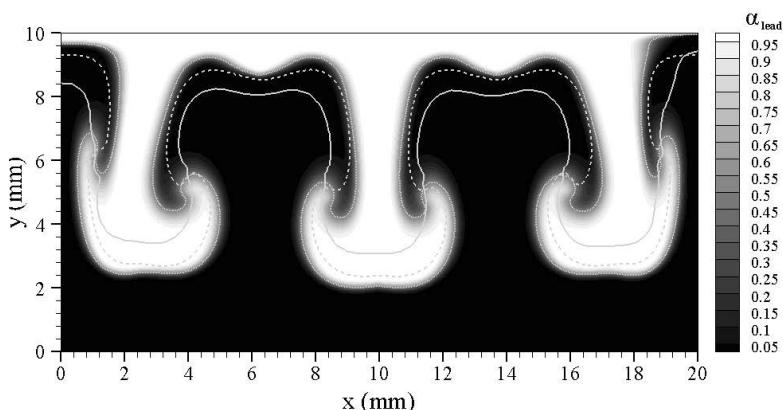


Рис. 3. Двумерные распределения объёмной доли свинца в момент времени 10 мкс.

Представленные графики показывают хорошее качественное и количественное соответствие. Как и ожидалось, присутствует сеточная сходимость результатов, то есть увеличение числа расчётных ячеек отражается в лучшем соответствии результатов моделирования аналитическому решению. Стоит отметить, что при достаточном увеличении амплитуды предположение о малости возмущения перестаёт быть справедливым и линейная теория устойчивости перестаёт быть достаточно точным приближением, что и наблюдается на рис. 2 в виде заметного расхождения между теорией и расчётом в области больших амплитуд. Согласно выражению (5), характерное время применимости линейной теории в рассматриваемом случае составляет  $\approx 3.72$  мкс. Заметное расхождение теории и расчёта, как и ожидается, начинается приблизительно в этот момент времени.

Помимо размеров возмущения, интерес представляет и его форма. На рис. 3 представлены двумерные распределения объёмной доли свинца в момент времени 10 мкс. Заливка соответствует результатам моделирования на сетке  $500 \times 250$ , пунктир —  $250 \times 125$ , сплошная линия —  $125 \times 62$  ячеек. Форма возмущения также демонстрирует наличие сеточной сходимости результатов. Хорошо видно, как увеличение количества ячеек позволяет разрешить более тонкие детали возникающего течения. На картине, полученной для сетки  $500 \times 250$  ячеек, хорошо заметно наличие в решении грибовидных структур — струй тяжелой жидкости (свинца) и пузырей легкой жидкости (стали). Эти структуры являются характерными именно для нелинейной стадии РТН, что подтверждает верность рассуждений, с помощью которых было выбрано такое время расчета. Для каждой из них на рис. 4 дополнительно приведены графики зависимости измеренной от уровня  $h_1 = 6$  мм амплитуды и ее отношения к длине волны возмущения от времени.

Видно, что расхождение с линейной теорией наступает в момент, когда  $A/\lambda \approx 0.1$ . Кроме того, заметно, что струи узкие в  $x$ -направлении и растут немного быстрее широких пузырьков. Подобная небольшая асимметричность течения является характерной для РТН с выбранным малым числом Атвуда  $A = 0.177$ .

Асимптотическую скорость всплытия пузыря можно оценить разными способами. Согласно [17], если считать течение потенциальным, она равна:

$$V_B = Fr(\rho_s/\rho_l) \sqrt{g\lambda} = 486.7 \text{ м/с},$$

$$Fr(\rho_s/\rho_l) = Fr(0) \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_l}\right)^{1/2}, \quad Fr(0) \approx 0.23,$$

где  $Fr$  — число Фруда с поправкой плавучести.

С другой стороны, для двумерного случая в работе [18] было получено следующее выражение для скорости пузыря и приведена приближенная оценка для скорости струи при  $t \rightarrow \infty$ :

$$V_B = \sqrt{\frac{2A}{1+A} \frac{g}{3k}} = 487.3 \text{ м/с}, \quad V_S \approx \sqrt{\frac{2A}{1-A} \frac{g}{3k}} = 582.8 \text{ м/с}.$$

При этом вычисленные с помощью линейной аппроксимации графиков рис. 4 на временном отрезке от 5 до 10 мкс значения асимптотических скоростей пузыря

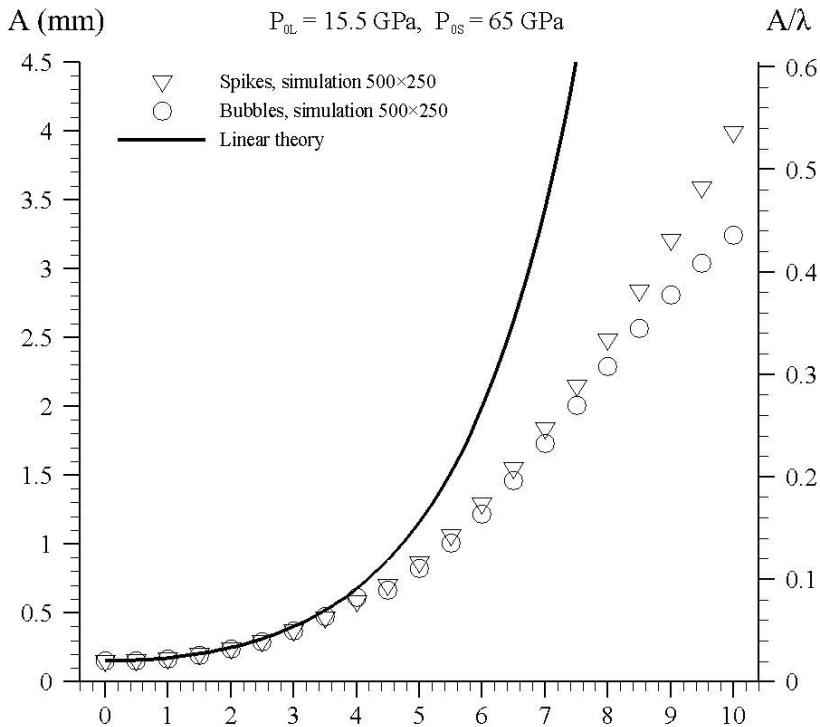


Рис. 4. Зависимость амплитуды и ее отношения к длине волны возмущения от времени для струи и пузыря для расчета на сетке  $500 \times 250$  ячеек, а также аналитическая оценка из линейной теории.

и струи  $V_B = 504.1$  м/с и  $V_S = 630.9$  м/с с неплохой точностью совпадают с приведенными выше оценками. Относительная погрешность для пузыря в данном случае составляет менее 3.6%.

Стоит отметить, что аналитические выкладки для скорости роста возмущения (выражение (4)) выводятся в предположении о несжимаемости обеих жидкостей. Используемая модель явным образом предполагает их сжимаемость, что может вносить некоторую долю погрешности при сравнении результатов моделирования с теорией. Однако при этом важно, что сжимаемость не является негативной чертой модели, напротив, она критически важна для моделирования реальных ударно-волновых процессов в металлах. Для исследования влияния сжимаемости на результаты моделирования была проведена ещё одна идентичная серия расчётов, в которой был взят параметр УРС  $P_0 = 1 \cdot 10^{12}$  Па для всех трёх фаз. Такое значение этого параметра на порядки уменьшает сжимаемость по сравнению с реальными материалами. На рис. 5 представлены результаты, полученные для зависимости амплитуды возмущения от времени для этой «несжимаемой» модели, на рис. 6 — форма возмущения.

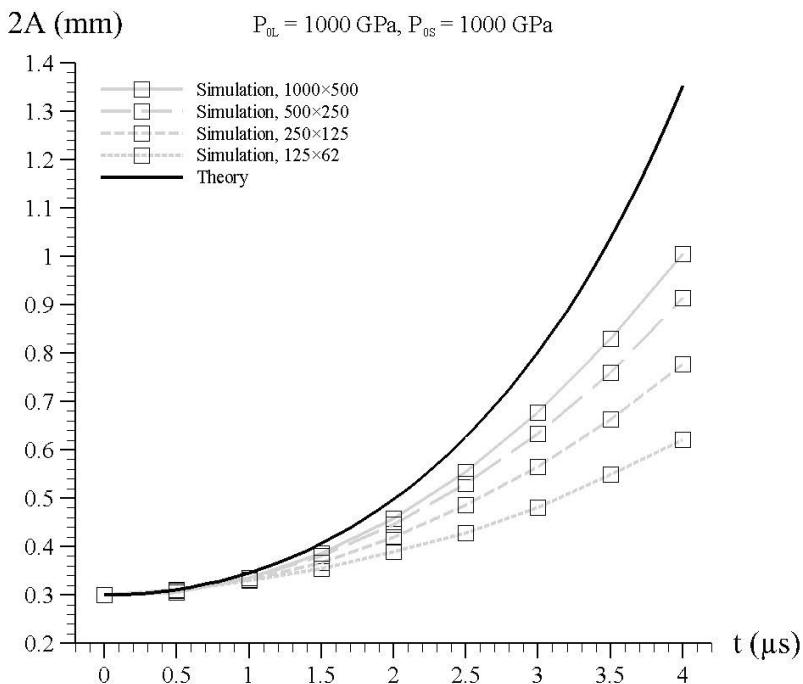


Рис. 5. Зависимость амплитуды возмущения от времени для расчётов на разной сетке для случая «несжимаемой» модели, а также аналитическая оценка из линейной теории.

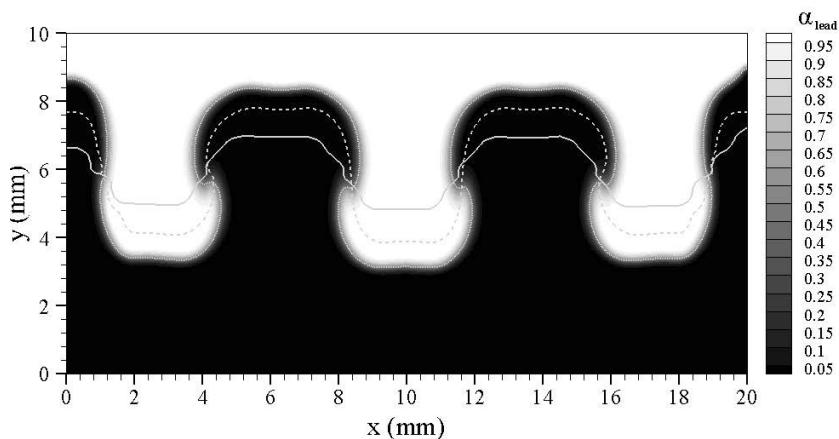


Рис. 6. Двумерные распределения объёмной доли свинца для случая «несжимаемой» модели в момент времени 10 мкс.

В общем результаты сохраняют качественное соответствие с полученными ранее данными, аналогично случаю сжимаемой модели присутствует сеточная сходимость к аналитической кривой, однако количественное совпадение с предсказаниями линейной теории немного ухудшилось, что хорошо заметно на графике на рис. 7. Объяснение этому результату можно найти в том, что численное решение сжимаемых моделей с малым значением сжимаемости не всегда может служить достаточно хорошим приближением для результатов моделирования несжимаемыми моделями. Как показано в работе [19], попытка произвести такую подмену модели может вызывать осцилляции давления и даже привести к полному отсутствию сходимости решения к несжимаемому пределу. Вероятнее всего, именно этот фактор ограничивает возможность используемой модели по точному соответствию аналитическим выкладкам, что не уменьшает ценности разработанного алгоритма для моделирования реальных сжимаемых течений. Помимо этого, можно предположить, что такое значительное изменение сжимаемости приводит к замедлению сеточной сходимости из-за значительного увеличения количества шагов по времени, необходимых для обеспечения устойчивости алгоритма в случае больших значений параметра  $P_0$ .

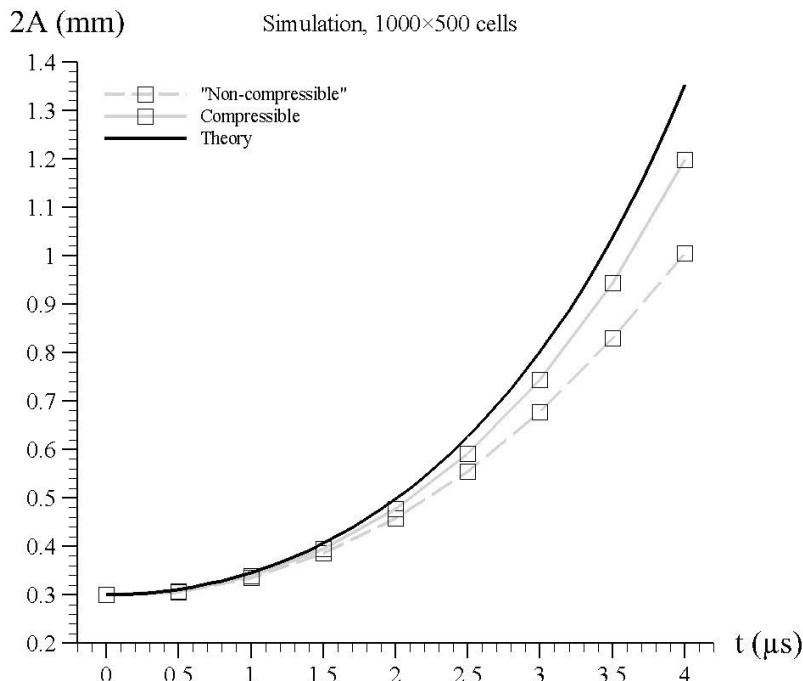


Рис. 7. Зависимость амплитуды возмущения от времени для расчётов на разной сетке для случая разных сжимаемостей, а также аналитическая оценка из линейной теории.

## Заключение

Представленные результаты показывают возможность успешного применения выбранной модели многофазной сжимаемой гидродинамики для численного исследования процессов развития неустойчивости контактной границы между металлами, находящимися в «псевдожидком» состоянии. Результаты численного моделирования показывают количественное и качественное соответствие теоретическим предсказаниям и в целом соответствуют общему виду картины развития неустойчивости Рэлея – Тейлора. В работе проведено исследование влияния сжимаемости фаз на результаты моделирования. Показано, что даже изменение параметров УРС в десятки раз не меняет качественно характеристики течения, лишь незначительно замедляет сеточную сходимость.

Представленный в работе алгоритм показал свою устойчивость и работоспособность, что открывает возможность для дальнейшего исследования процесса сварки взрывом, в том числе и исследования возникновения струи ударно-сжатого газа между пластинами.

## Благодарности

Автор благодарит за научное руководство и ценные указания Петра Анатольевича Чупрова.

## Список литературы

- [1] Godunov S., Deribas A., Zabrodin A., Kozin N., “Hydrodynamic effects in colliding solids”, *Journal Of Computational Physics*, **5**, (1970).
- [2] Fortov V., Kim V., Lomonosov I., Matveichev A., “Numerical modeling of hypervelocity impacts”, *International Journal Of Impact Engineering*, **33**, (2006).
- [3] Ghomi M., Mahmoudi J., Khalkhali A., Liaghat G., “Explosive welding of unequal surface using Groove Method”, *Transactions Of The Canadian Society For Mechanical Engineering*, **36**, (2022).
- [4] Nassiri A., Kinse B., “Numerical studies on high-velocity impact welding: smoothed particle hydrodynamics (SPH) and arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE)”, *Journal Of Manufacturing Processes*, **24**, (2016).
- [5] Zhang Z. L., Feng D. L., Liu M. B., “Investigation of explosive welding through whole process modeling using a density adaptive SPH method”, *Journal of Manufacturing Processes*, **35**, (2018).
- [6] Розен А. Е., Лось И. С., Муйземнек А. Ю., Хорин А. В., “Моделирование деформационного процесса в задачах армирования и сварки взрывом с применением программы LS-DYNA”, *Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки*, **13**, (2010).
- [7] Маринин М. А., Хохлов С. В., Ишнейский В. А., “Моделирование режима протекания процесса сварки плоских листовых деталей взрывом”, *Записки горного института*, **237**, (2019).
- [8] Chuprov P., Utkin P., Fortova S., “Numerical Simulation of a High-Speed Impact of Metal Plates Using a Three-Fluid Model”, *Metals*, **11**, (2021).
- [9] Fortova S., Utkin P., Kazakova T., “Three-Dimensional Numerical Simulation of the De-

- velopment of Instability of a Contact Boundary of Colliding Metal Plates within the Gas-Dynamic Approximation”, *High Temperature*, **57**, (2019).
- [10] Чупров П. А., Порошина Я. Э., Уткин П. С., “Численное исследование дефлаграции пороха в рамках модели Баера-Нунциато”, *Горение и Взрывы*, **13**, (2020).
  - [11] Yakovlev I., “Instability of the interface between colliding metals”, *Combustion, Explosion And Shock Waves*, **9**, (1973).
  - [12] Baer M., Nunziato J., “A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials.”, *International Journal Of Multiphase Flow*, **12**, (1986).
  - [13] Liang S., Liu W., Yuan L., “Solving seven-equation model for compressible two-phase flow using multiple GPUs”, *Computers & Fluids*, **99**, (2014).
  - [14] Saurel R., Abgrall R., “A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows”, *Journal Of Computational Physics*, **150**, (1999).
  - [15] Saurel R., Lemetary O., “A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation”, *Journal Of Fluid Mechanics*, **431**, (2001).
  - [16] И ногамов Н. А., Демьянин А. Ю., Соин Э. Е., *Гидродинамика перемещивания*, Москва, 1999.
  - [17] Layzer D., “On the Instability of Superposed Fluids in a Gravitational Field”, *The Astrophysical Journal*, **122**, (1955).
  - [18] Goncharov V. N., “Analytical Model of Nonlinear, Single-Mode, Classical Rayleigh-Taylor Instability at Arbitrary Atwood Numbers”, *Physical Review Letters*, **88**, (2002).
  - [19] Guillard H., Murrone A., “On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit: II. Godunov type schemes”, *Computers & Fluids*, **33**, (2004).

Поступила в редакцию  
5 сентября 2025 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание 124022400174-3).

---

*Vasiliev A. E.<sup>1</sup> Numerical modeling of the Rayleigh-Taylor instability using multiphase model. Far Eastern Mathematical Journal. 2025. V. 25. No 2. P. 194–210.*

<sup>1</sup> Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences

## ABSTRACT

The article presents research on the applicability of the Baer-Nunziato type multiphase systems to the numerical modeling of the Rayleigh-Taylor instability in metals under extreme “pseudo-liquid” conditions. A model problem with a sinusoidal disturbance of the contact boundary between metals is considered. The results show compliance with theoretical estimates. A study of the influence of compressibility on the development of the process was conducted. The results obtained indicate the influence of phase compressibility not only on the process itself, but also on the features of its numerical modeling.

Key words: *numerical modeling, multiphase flow, Rayleigh-Taylor instability, Baer-Nunziato equations, HLLC solver*.