

УДК 519.63:532.5.032:532.517.3

MSC2020 76Fxx

© С. В. Фортова¹

Численный эксперимент в турбулентности (к 100-летию академика О. М. Белоцерковского)

В работе представлены основные результаты по численному моделированию турбулентных течений, выполненные под руководством академика О. М. Белоцерковского и продолженные его учениками. Для задачи о сдвиговом слое жидкости проанализирован процесс образования пространственной турбулентности и развитого масштабного турбулентного течения. Показано, что в формировании прямого энергетического каскада Колмогорова ведущая роль принадлежит крупным вихрям (гипотеза Белоцерковского).

При исследовании режимов двумерного течения вязкой слабосжимаемой жидкости под действием внешней периодической по обоим координатам силы — модифицированное течение Колмогорова — были использованы и апробированы различные методы анализа гидродинамических характеристик. Реализованные подходы позволяют указать, какой из режимов течения: ламинарный, хаотический и вихревой — может наблюдаться при выборе коэффициента донного трения, амплитуды и силы накачки. Для модифицированного течения Колмогорова численно продемонстрировано развитие обратного каскада энергии, характерного для вихревых течений в двумерной турбулентности. В задаче о течении несжимаемой вращающейся жидкости в кубе показано формирование столбовых вихрей и возникновение как прямого каскада энергии, характерного для трехмерной турбулентности, так и обратного, свойственного плоским потокам. Предложена модель и проведено численное моделирование эффекта эластической турбулентности, возникающего для малых числах Рейнольдса при наличии в потоке полимерной примеси.

Ключевые слова: *численное моделирование, турбулентные течения, прямой и обратный каскады энергии, задача Колмогорова, квазидвумерные течения, сдвиговые течения, эластическая турбулентность.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202512>

Введение

Турбулентность — это состояние вихревого движения среды, в котором скорость, давление и другие характеристики поля потока изменяются во времени и простран-

¹ Институт автоматизации проектирования РАН, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 117303, г. Москва, ул. Керченская, д. 1 А, корп. 1. Электронная почта: sfortova@mail.ru

стве резко и нерегулярно. Основной трудностью в данном случае является предсказание поведения турбулентных потоков в различных условиях. Турбулентность окружает нас повсюду: в атмосфере, в океанах, в технических системах и биологических объектах. Впервые турбулентность была осознана Леонардо да Винчи в XV веке. В прошлом столетии она интенсивно изучалась математиками, физиками и инженерами, включая таких гигантов как Колмогоров, Гейзенберг, Тейлор, Прандтль и фон Карман. На данный момент турбулентность продолжает оставаться величайшей загадкой прикладной математики и классической физики. При этом каждый прорыв в разных предметных областях: от хаоса до теории поля, от повышения производительности вычислительных машин до параллельности самих численных алгоритмов — позволял надеяться на продвижение в решении «проблемы турбулентности».

Для описания турбулентных потоков используются различные модели, большинство которых основано на первых принципах — уравнении неразрывности и системе уравнений Навье — Стокса. Но точное аналитическое решение уравнений движения жидкости для турбулентной области течения не получено. В 2018 году Институт Клея объявил премию в миллион долларов за решение «задачи турбулентности», которая вошла в список задач тысячелетия.

С появлением высокопроизводительной техники стало возможным проводить численное исследование весьма сложных турбулентных течений, основываясь на решении данной системы при помощи сложных вычислительных алгоритмов. Применение «рационального» подхода, предложенного академиком О. М. Белоцерковским, позволило учесть при моделировании каждой задачи структурный характер турбулентности, который состоит из крупномасштабных когерентных структур, статистического фона и ламинарно-турбулентного перехода. Такое разделение течения на масштабы движения дало возможность использовать для проведения численного эксперимента наиболее адекватные исследуемым процессам системы уравнений и численные методики.

В данной работе представлены основные результаты по численному моделированию турбулентных течений, выполненные под руководством академика О. М. Белоцерковского и продолженные его учениками. На примере свободно-сдвиговой пространственной турбулентности в разделе 1 показана ведущая роль крупных вихрей, исследован процесс зарождения и развития прямого энергетического каскада Колмогорова. Развитие обратного каскада энергии, характерного для вихревых течений в двумерной турбулентности, продемонстрировано в разделе 2. Для течений колмогоровского типа, возникающих при наличии накачки и донного трения, показано возникновение ламинарного, турбулентного и вихревого режимов течений. Численное моделирование часто встречающихся в природе квазидвумерных течений типа циклонов и антициклонов, возникающих под действием силы Кориолиса, приведено в разделе 3. Раздел 4 посвящен построению численного эксперимента по изучению эффекта эластической турбулентности, возникающего при низких числах Рейнольдса при наличии в потоке полимерной примеси.

1. Свободно-развитая сдвиговая турбулентность

1.1. Идеология ведущей роли «крупных вихрей»

Для анализа структуры и развития турбулентного движения большое значение имеет исследование процессов, связывающих зарождение турбулентности и переход к стадии развитого масштабного турбулентного течения.

В 1920 году Ричардсоном [1] была предложена концепция энергетического каскада, основанная на идее измельчения вихревой структуры турбулентности до вязких масштабов. Спустя 20 лет она нашла свое отражение в работах Колмогорова и Обухова [2, 3], что привело к хорошо известной концепции спектральной структуры энергетического каскада. При достаточно больших числах Рейнольдса распределение плотности энергии пульсаций по волновым числам разбивается на ближний участок малых чисел, где энергия генерируется в основном неустойчивостями крупных вихрей, и дальний участок больших волновых чисел, где энергия диссирирует в тепло через мелкомасштабные пульсации и вязкость. Между ближним и дальним участками расположен инерционный участок спектра, где энергия не генерируется и не диссирирует, а передается от меньших волновых чисел к большим. Ожидаемый механизм энергетического обмена на инерционном участке слабо зависит от значений исходного числа Рейнольдса. Энергетический каскад реализуется благодаря потере устойчивости основного течения и возникновению нового поля скоростей с более мелкой вихревой структурой. Роль молекулярной вязкости ограничивается тем, что она влияет только на высокочастотную часть турбулентного спектра и на процесс перехода кинетической энергии в тепло. Этот переход происходит только для мелких вихрей у границы спектра, для крупных масштабов такого перехода энергии в тепло не происходит.

Большое значение в понимании вопросов развития турбулентности имело признание ведущей роли крупных масштабов и проблемы когерентности. В 1985 году в Кармановской лекции [4] О. М. Белоцерковский обосновал возможность прямого численного моделирования свободной развитой турбулентности без подсеточных моделей. Он сформулировал две гипотезы, составляющие идеологию его подхода. Первая состоит в том, что для больших чисел Рейнольдса крупные вихри не зависят от мелких. Вторая гипотеза указывает на то, что вязкость жидкости можно не учитывать при численном моделировании крупных вихрей. Основную энергиетику турбулентного течения несут крупные вихри, которые определяют структуру течения. Когда инерционные члены в уравнениях Навье–Стокса преобладают над вязкими напряжениями, то крупная структура течения формируется благодаря динамическим силам и градиенту поля давления. В этом случае процесс рождения крупных структур течения должен описываться уравнениями Эйлера. В дальнейшем на границе крупного вихря и потока возникают вихри малого размера, которые способствуют развитию турбулентности. В работе [5] авторам путем численного решения системы уравнений Эйлера удалось получить турбулентное течение при условиях детерминированного начального возмущения скорости в виде одной моды Фурье.

Ввиду чрезвычайной сложности и нелинейности турбулентных течений адекватным инструментом их изучения является численное моделирование [6]. При расчете крупномасштабных течений хорошо себя зарекомендовали монотонные диссипативно-устойчивые разностные схемы с положительным оператором [7], разработанные под руководством академика О. М. Белоцерковского.

В разделе 1 на основании численных экспериментов изучено турбулентное движение в сдвиговом слое скимаемой среды и проанализирована схема формирования турбулентного ядра и закона «-5/3» Колмогорова на инерционном участке для системы уравнений Эйлера. Численно исследованы процессы ламинарно-турбулентного перехода, описывающие зарождение турбулентности и переход к стадии развитого масштабного турбулентного течения. Отметим, что данные исследования на момент проведения численного эксперимента являлись пионерскими в области предсказания поведения турбулентных течений. Это связано с тем, что авторам удалось определить вид начального возмущения компонент скорости, при котором происходит ламинарно-турбулентный переход.

1.2. Уравнения модели и метод расчета

Для проведения численных экспериментов используется система уравнений Эйлера в прямоугольной системе координат [5]. Она включает в себя закон сохранения массы (уравнение неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0,$$

уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla(\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla(\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla(\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g,$$

и уравнение сохранения полной энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E + P) \vec{V} = -\rho g w.$$

Здесь и далее $\vec{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости; ρ — плотность; $E = e + |\vec{V}|^2/2$ — удельная полная энергия и e — удельная внутренняя энергия, g — ускорение силы тяжести. Для замыкания системы уравнений используется уравнение состояния идеального газа $P = (\gamma - 1)\rho e$, γ — показатель адиабаты. Все вычисления выполняются в системе измерения СИ.

При численном моделировании были использованы монотонные диссипативно-устойчивые разностные схемы с положительным оператором, не требующим введения подсеточной турбулентности и специальных фильтров для моделирования свободной развитой турбулентности [6, 7]. Предлагаемая методика является обобщением явной гибридной схемы [6]. Эта схема имеет второй порядок точности на гладких решениях и, являясь монотонной, не использует ни искусственную вязкость, ни сглаживание, ни процедуры ограничения потока, часто применяемые в некоторых схемах вычислительной динамики жидкости.

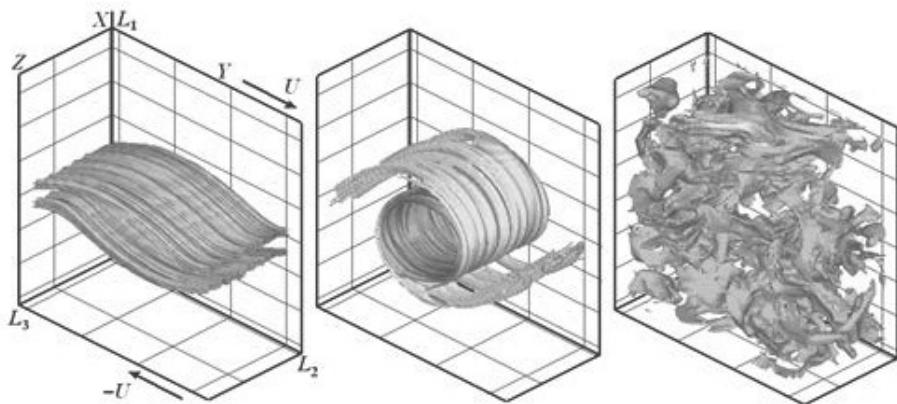


Рис. 1. Развитие вихревого каскада.

1.3. Результаты численных экспериментов

Рассматривается процесс возникновения турбулентности в трехмерном сдвиговом слое сжимаемой невязкой среды. Расчетная область представляет собой трехмерный параллелепипед в прямоугольной системе координат с размерами

$$0 \leq x \leq L_1; \quad 0 \leq y \leq L_2; \quad 0 \leq z \leq L_3.$$

Начальный этап развития турбулентности заключается в возникновении одной крупной структуры в виде вихревого рулона, плавно обтекаемого потоком. Затем на поверхности рулона набегающий «ламинарный» поток сворачивается в вихревые жгуты меньшего диаметра по сравнению с диаметром первичного рулона. Они разрушают этот вихревой рулон, приводя к образованию турбулентного режима течения. Развитие турбулентности за счет возникновения вихревых жгутов на поверхности рулона представлено на рис. 1. Численный эксперимент показал, что развитие вихревого каскада происходит только при определенных модах и амплитудах возмущений компонент скорости, заданных в начальный момент времени. Рост амплитуды

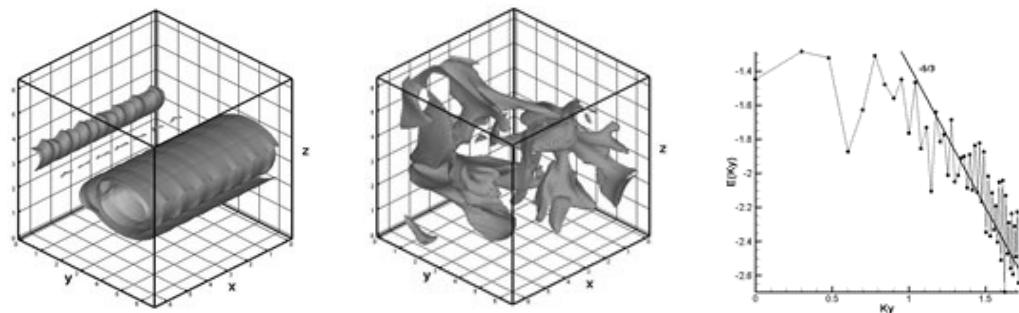


Рис. 2. Вихревой каскад и спектр кинетической энергии на развитой стадии турбулентности.

возмущения компонент скорости приводит к уменьшению скорости развития турбулентного течения. При других изученных авторами способах задания начальных условий происходит «схлопывание» вихревого рулона в вертикальном направлении и дальнейшая «ламинаризация» потока.

Представим результаты анализа спектральных энергетических характеристик для режимов течения, в которых наблюдается наличие вихревого каскада. На рис. 2 показано развитие вихревого каскада неустойчивостей, а также распределение энергии пульсаций по волновым числам. Проведенные расчеты показали наличие участка в энергетическом спектре, который можно отождествить с инерционным. Соответствующий наклон на этом участке спектра равен (-59°), что означает выполнение закона $\sim -5/3$ Колмогорова. Таким образом, в результате численного моделирования получен каскад вихрей, энергетические характеристики которого можно отождествить с прямым каскадом энергии Колмогорова.

2. Двумерная турбулентность и численное моделирование течения колмогоровского типа

2.1. Введение

Двумерное численное моделирование турбулентных течений широко применяется при исследовании атмосферных, океанических и астрофизических течений, когда поле скорости слабо меняется в вертикальном направлении. Характерной особенностью двумерной турбулентности является наличие обратного каскада энергии, который передает энергию от мелких масштабов к крупным. При отсутствии крупномасштабной диссипации энергия накапливается в потоке, который принимает форму когерентного вихря. Размеры этой структуры ограничены размером исследуемой области [8].

Еще в 1959 году академик А. Н. Колмогоров для изучения двумерной турбулентности предложил исследовать простейшую модель — двумерное движение вязкой жидкости, возникающее под действием периодического (по одной из координат) поля внешней силы (накачки) [9]. В [10] показано, что для более точного описания движения тонких слоев жидкости, вызываемого внешним периодическим силовым полем, следует пользоваться модифицированной моделью Колмогорова, в которой учитывается также и донное трение (трение о дно кюветы).

В физических экспериментах течение Колмогорова генерируется приложением электромагнитной силы к тонкому слою электропроводящей жидкости. Форма линейного отклика жидкости имеет вид периодической решетки, состоящей из противоположно вращающихся вихрей («паркет» Колмогорова). Кроме числа Рейнольдса Re , устойчивость этого течения также зависит от коэффициента трения о дно α . Оно характеризует линейную диссипацию, возникающую из-за трения на нижней границе области исследования. В работе [11] проведен линейный анализ устойчивости потока Колмогорова, создаваемого внешней силой, действующей в одном направлении. Более сложные воздействия внешней силы были исследованы аналитически в работах [12, 13]. Поддержание крупномасштабного потока мелкомасштабным перио-

дическим силовым полем в работе [14] рассматривается как эффект отрицательной эффективной вязкости.

Тенденция к образованию крупных вихрей отмечалась в многочисленных работах, как экспериментальных [15], так и численных [16, 17], посвященных двумерной турбулентности. Большие когерентные структуры наблюдались при численном моделировании [18, 19], основанном на решении двумерной системы уравнений Навье – Стокса с граничными условиями прилипания. Аналогичная когерентная вихревая структура была исследована в лабораторных экспериментах в квадратной кювете [20, 21]. Крупные вихри были получены при численном моделировании статической накачки с различными типами крупномасштабной диссипации, о чем сообщалось в работах [22, 23]. Первая попытка установить профиль средней скорости когерентного вихря была предпринята в работе [24], где использовались периодические граничные условия и кратковременная коррелированная во времени накачка. Авторами показано возникновение устойчивого вихревого диполя. В [25] в аналогичной постановке найден профиль средней скорости когерентного вихря, который проявляет свойства изотропии в диапазоне расстояний до центра вихря. В работе [26] были исследованы условия существования когерентного вихря и показано, что он не может существовать при достаточно большом значении α . В работе [27] исследованы различные режимы течения Колмогорова в квадратной ячейке. В статье [28] представлен исторический обзор наиболее важных опубликованных за последние семьдесят лет работ, в которых течение Колмогорова используется в качестве вычислительного полигона для изучения механики жидкости, проверки численных или экспериментальных методов или даже изучения свойств самого течения.

В работах [29–31] численно анализировалась задача двумерного течения вязкой слабосжимаемой жидкости в квадратной ячейке при возбуждении внешней силой, периодической по обоим направлениям, и наличии донного трения. В работе [29] было показано, что в зависимости от α , амплитуды силы накачки G и числа Рейнольдса могут формироваться ламинарный, хаотический и вихревой режимы течений. Построенные на фазовой плоскости (α, G) типы течений позволили провести их классификацию в зависимости от величин силы накачки и трения о дно.

В связи с большим разнообразием хаотических движений окончательная теория турбулентности до сих пор не построена. Поэтому ученые находятся в постоянном поиске наиболее точного способа анализа характеристик турбулентных потоков. Перечислим наиболее известные на данный момент подходы для описания вихревых течений. Построение полей основных параметров потока, таких как скорость, завихренность, давление и плотность, дает возможность визуального восприятия структуры потока. Оценка статистических, вероятностных и энергетических характеристик течения позволяет расширить знания об объекте исследования и уловить некоторые количественные особенности этого сложного явления. На практике для описания сложных вихревых течений применяются как отдельные методы анализа, так и их совокупность. Однако универсального метода пока не найдено.

В данном разделе представлены различные подходы к исследованию вихревых потоков для двумерного течения колмогоровского типа в квадратной области. Наряду со стандартным анализом полей основных параметров течения авторами пред-

ложены новые подходы для описания турбулентных течений: метод определения положения максимальной завихренности, метод Фурье — разложения отдельных компонент скорости — и ранговый анализ. Совокупность представленных методов позволяет наиболее надежно составить так называемый «паспорт» явления и определить режим возникающего течения при различных характерных значениях параметров, внешней силы и трения о дно.

2.2. Уравнения модели и метод расчета

Исследуется двумерное движение вязкой слабосжимаемой жидкости, которое описывается системой уравнений Навье — Стокса. Для замыкания системы используется уравнение слабой сжимаемости. Соответствующие уравнения неразрывности (1), уравнения сохранения импульса (2), (3) и уравнение слабой сжимаемости (4) представлены ниже:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(u \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x^k + \frac{1}{Re} \Delta u - \alpha u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla(\rho v \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y^k + \frac{1}{Re} \Delta v - \alpha v, \quad (3)$$

$$dp = c^2 \rho_0 \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4)$$

Слагаемые $F_x^k, F_y^k, k = 1, 2$ в (2), (3) соответствуют наличию внешней силы \vec{F}^k . Безразмерными параметрами являются число Рейнольдса $Re = UL\rho/\mu$, представляющее собой отношение инерционных сил к вязким, и $\alpha = UL/\tau$, равное отношению инерционных сил к силам трения. Здесь и далее (см. раздел 3) U — характерная крупномасштабная скорость течения, L — размер области, а $1/\tau$ — скорость затухания, связанная с трением. Приведенная система уравнений записана в безразмерной форме с использованием масштаба длины L и масштаба скорости U . Здесь p — давление; α — коэффициент трения о дно; c — скорость звука. В правой части уравнений (2) и (3) присутствуют слагаемые F_x^k и F_y^k соответственно, которые моделируют действие силы накачки. Параметр k указывает на выбор силы с различными характеристиками (см. раздел 2.3). Компоненты $-\alpha u$ и $-\alpha v$ характеризуют силу трения о дно. Для скоростей требуется выполнение условия прилипания на границе Γ расчётной ячейки: $\vec{V}|_{\Gamma} = 0$.

Моделирование течения вязкой жидкости требует больших вычислительных мощностей, поэтому необходимо оптимизировать расчеты. Для уменьшения времени расчетов в используемой компьютерной программе реализовано распараллеливание вычислительного кода при помощи стандарта OPEN MP. Размер вычислительной сетки в большинстве экспериментов подобран таким образом, чтобы результаты качественно описывали исследуемое течение с разрешением пограничного слоя.

Численное решение системы уравнений Навье — Стокса основано на методе искусственной сжимаемости [32]. При этом гиперболическая часть уравнений решается

явным методом Мак-Кормака [33], а параболическая часть — стандартным методом конечных разностей. Схема Мак-Кормака имеет второй порядок точности по пространству и времени. Каждый этап расчета на каждом временном шаге разделен на 4 этапа: разности вперед и разности назад у предиктора вдоль направления x , а также разности вперед и назад у предиктора по направлению y . На этапе корректора расчет проводится аналогично этапу предиктора, за исключением того, что шаг «вперед» меняется на «назад» и наоборот. Эти шаги циклически сменяют друг друга с каждым временным шагом. Метод Мак-Кормака хорошо зарекомендовал себя при решении гиперболических уравнений газо- и гидродинамики.

2.3. Результаты численных экспериментов

Расчетная область представляет собой квадрат размером $2\pi \times 2\pi \text{ м}^2$. Начальные условия и физические свойства жидкости таковы: $p(t=0) = p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $u(t=0) = 0 \text{ м/с}$, $v(t=0) = 0 \text{ м/с}$, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 0.01 \text{ Па} \cdot \text{с}$. При численном моделировании могут использоваться следующие способы задания вынуждающей силы $\vec{F}^1 = (F_x^1, F_y^1)$ и $\vec{F}^2 = (F_x^2, F_y^2)$:

$$F_x^1 = \rho G \sin(ky), \quad F_y^1 = \rho G \sin(kx); \quad F_x^2 = \rho G \cos(ky), \quad F_y^2 = \rho G \cos(kx),$$

где G — амплитуда внешней силы, k — пространственная частота внешней силы. В нашем исследовании полагаем $k = 5$.

Заметим, что сила $\vec{F}^1 = (F_x^1, F_y^1)$ имеет ненулевой суммарный момент относительно центра расчетной области, в то время как суммарный момент силы $\vec{F}^2 = (F_x^2, F_y^2)$ равен нулю. Действительно, вычисляя момент вынуждающей силы, получаем

$$M_1 = \frac{1}{S} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((x - \pi) \cdot F_y^1 - (y - \pi) \cdot F_x^1 \right) dx dy = 0.4 \cdot \rho G;$$

$$M_2 = \frac{1}{S} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((x - \pi) \cdot F_y^2 - (y - \pi) \cdot F_x^2 \right) dx dy = 0,$$

где $S = 4\pi^2$ — площадь расчетной области.

Ниже проанализированы режимы течения, возникающие для задачи с ненулевым суммарным моментом накачки $\vec{F}^1 = (F_x^1, F_y^1)$. Как показали численные эксперименты, трение о дно оказывает решающее влияние на структуру формирующегося течения. На рис. 3 представлены различные типы течения, возникающие в зависимости от величины коэффициента донного трения α .

Для ламинарного режима при $\alpha > 0.3$ характерна картина течения, которая носит колебательный характер (рис. 3(а)) относительно равновесного состояния, определяемого силой накачки. При значениях α от 0.1 до 0.3 между ламинарным (рис. 3(а)) и хаотическим (рис. 3(г)) режимами течений возникает переходный. Он является перемежающимся, что представляет собой чередующуюся картину ламинарного и турбулентного режимов течения в зависимости от времени наблюдения (рис. 3(б)),

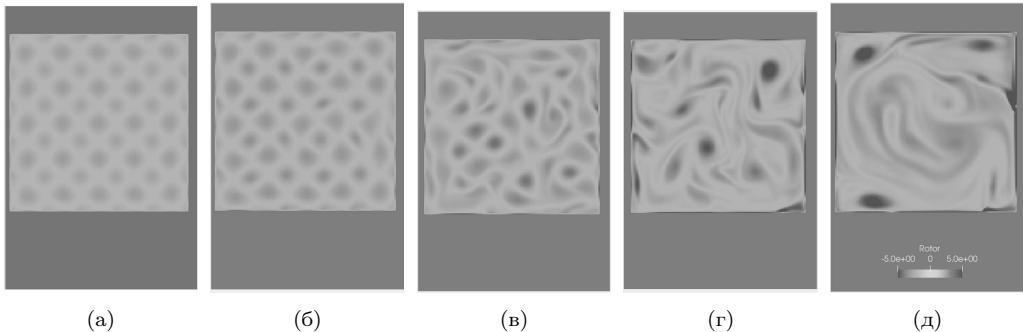


Рис. 3. Поля завихренности при фиксированном параметре G для ламинарного режима течения (а) ($\alpha=0.3$, $Re=125 \cdot 10^3$); переходных режимов (б) ($\alpha=0.2$, $Re=220 \cdot 10^3$), (в) ($\alpha=0.1$, $Re=378 \cdot 10^3$); турбулентном (г) ($\alpha=0.01$, $Re=754 \cdot 10^3$) и вихревом (д) ($\alpha=0.0001$, $Re=1257 \cdot 10^3$) режимах течения.

рис. 3(в)). Развитие течения в переходном режиме (при уменьшении коэффициента трения о дно до $\alpha=0.1$) приводит к увеличению амплитуды колебаний вихрей относительно их равновесного положения и последующему разрушению течения с дальнейшим переходом к турбулентной стадии (рис. 3(в)). Критерием перехода к хаотическому режиму (рис. 3(г)) является отрыв вихрей от исходного расположения и их хаотическое движение по расчетной ячейке. Для этого режима характерно случайное объединение и распад вихрей различных размеров, а также короткое время их жизни. Дальнейшее уменьшение коэффициента трения ($\alpha=0.0001$) приводит к возникновению вихревого режима течения (рис. 3(д)), для которого наблюдается образование одной крупной структуры, занимающей всю расчетную ячейку. Наблюдается обратный вихревой каскад.

Отметим, что вихревой режим течения в отсутствие трения о дно подробно исследован в работе [30], важным результатом которой является построенный профиль когерентного вихря. В работе [31] построена фазовая диаграмма режимов течения в зависимости от величин силы накачки и коэффициента трения о дно. Она приведена на рис. 4. Здесь по горизонтальной оси отложена амплитуда силы накачки G , по вертикальной — коэффициент трения о дно α . Кругами на фазовой диаграмме обозначены расчёты, соответствующие ламинарному режиму течения, квадратами — турбулентному, а ромбами — вихревому. Переходные режимы течения выделены отдельно: треугольниками (вверх) обозначен переход между ламинарным и турбулентным течениями, а треугольниками (вниз) — переход между турбулентным и вихревым. При каждом фиксированном значении величины силы накачки и изменяющемся значении коэффициента трения о дно от минимального до максимального наблюдаются все режимы течения: ламинарный, турбулентный, вихревой и переходные. Таким образом, проведённые численные эксперименты показали, что важным параметром, определяющим режим течения, является коэффициент трения о дно.

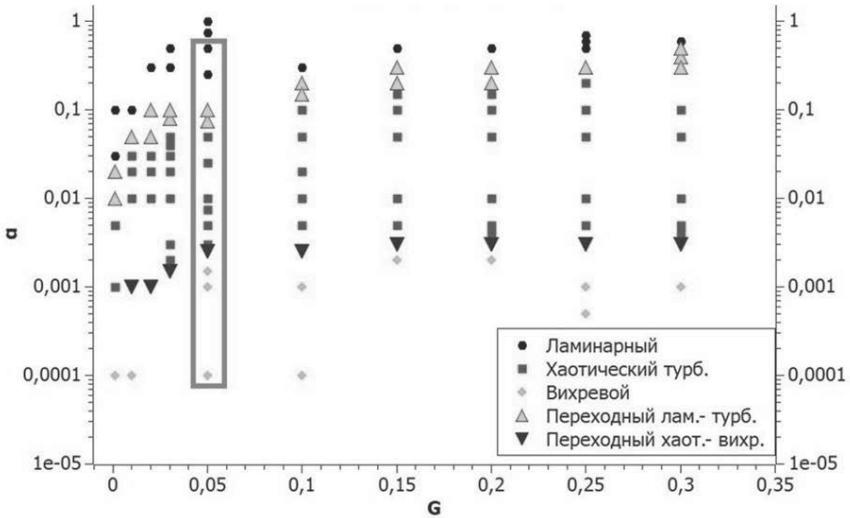


Рис. 4. Фазовая диаграмма течений в зависимости от величины коэффициента трения о дно и амплитуды накачки.

2.4. Анализ течения методом определения максимума завихренности

Полученные выше результаты численного моделирования поведения поля завихренности для различных режимов течения позволяют сформулировать оригинальный подход к определению типа движения среды. Разобьем расчетную область на ячейки с номерами i и j по горизонтали и вертикали соответственно, где i, j изменяются от 1 до n , где n — размер сетки в одном направлении. Значение завихренности ω_{ij} в ячейке (i, j) равно $\omega_{ij} = \partial v_{ij} / \partial x - \partial u_{ij} / \partial y$, где u_{ij}, v_{ij} — компоненты скорости движения жидкости в ячейке (i, j) .

Пусть в течении сформировалась крупная вихревая структура. Максимальное значение завихренности локализовано в его центре. С точки зрения физики ясно, что для данного режима изменение положения максимальной завихренности во времени происходит плавно (без скачков). Обозначим через (x_{mN}, y_{mN}) координаты максимальной завихренности на каждом временном шаге N и введем в рассмотрение расстояние dx_N между точками, соответствующими максимуму завихренности для соседних шагов по времени $dx_N = \sqrt{(x_{mN+1} - x_{mN})^2 + (y_{mN+1} - y_{mN})^2}$. В силу указанного выше физического предположения dx_N должна гладко вести себя в зависимости от времени.

Предложенный метод анализа был реализован численно. График поведения dx_N в зависимости от N представлен на рис. 5. По его поведению можно заметить, что dx_N меняется плавно, без скачков. Такой характер поведения можно принять в качестве критерия возникновения вихревого режима. Наблюдаемый одиночный пик на графике рис. 5 связан со случайным попаданием мелкого пристеночного вихря, имеющего большое значение завихренности. Поэтому при таком типе анализа следу-

ет исключить области в окрестности стенок, поскольку в них формируются мелкие вихри с большой завихренностью.

Применим этот подход к анализу турбулентного движения. Численное моделирование показывает, что хаотическое течение характеризуется скачкообразным изменением положения максимальной завихренности в соседние моменты времени. На рис. 6. представлено поведение расстояния dx_N между точками, соответствующими максимуму завихренности, в зависимости от N . Как и следовало ожидать, поведение графика характеризуется наличием многочисленных скачкообразных изменений в dx_N . Следовательно, такое скачкообразное поведение dx_N можно рассматривать в качестве критерия возникновения хаотического режима течения. Между хаотическим и вихревым типами течения возникает переходный режим, когда при определенных начальных параметрах моделирования турбулентный и вихревой режимы сменяют друг друга. При этом для dx_N характерно как скачкообразное, так и плавное изменение (рис. 7).

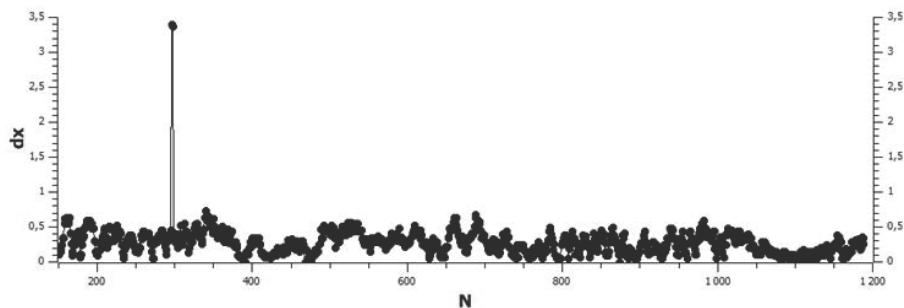


Рис. 5. Зависимость расстояния dx_N между точками максимума завихренности от времени для вихревого режима.

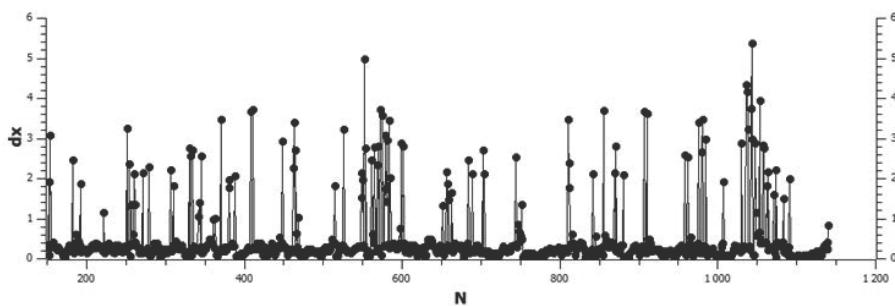


Рис. 6. Зависимость расстояния dx_N между точками максимума завихренности от времени для турбулентного режима.

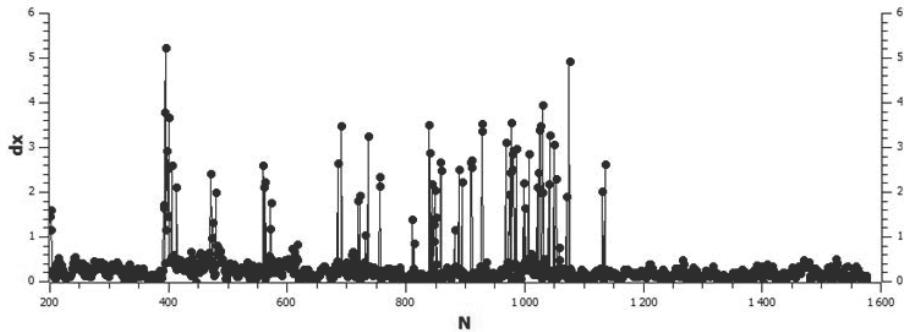


Рис. 7. Зависимость расстояния dx_N между точками максимальной завихренности от времени для режима перемежаемости.

2.5. Анализ течения методом исследования Фурье-компонент скорости

Другой подход к анализу турбулентных течений основан на анализе Фурье-разложения поля скорости:

$$U(x, y) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \left[U^{(1)}(k_x, k_y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) + U^{(2)}(k_x, k_y) \cos(k_x x) \sin(k_y y) + U^{(3)}(k_x, k_y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) + U^{(4)}(k_x, k_y) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \right],$$

где k_x и k_y — компоненты волнового вектора вдоль Ox и Oy соответственно, $U^{(i)}(k_x, k_y)$ ($i = 1 \div 4$) — коэффициенты Фурье, получаемые как

$$\begin{aligned} U^{(1)}(k_x, k_y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x, y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \\ U^{(2)}(k_x, k_y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x, y) \cos(k_x x) \sin(k_y y) dx dy, \\ U^{(3)}(k_x, k_y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x, y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \\ U^{(4)}(k_x, k_y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x, y) \sin(k_x x) \sin(k_y y) dx dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим Фурье-компоненты горизонтальной составляющей скорости на масштабе всей ячейки $u_{11}^* = U^{(3)}(k_x = 1, k_y = 1)$ и на масштабе накачки $u_{55}^* = U^{(3)}(k_x = 5,$

$k_y = 5$). Перейдем к безразмерным компонентам U_{lm} , полагая

$$U_{lm} = \frac{u_{lm}^*}{\sqrt{G/k}}.$$

Для вихревого, хаотического и ламинарного режимов течения были построены графики зависимости коэффициента Фурье U_{11} от шага по времени N для различных типов течения. На рис. 8 черными кругами обозначен ламинарный режим, квадратами обозначен хаотический режим, вихревому режиму соответствует линия с ромбами. Наибольшее значение U_{11} имеет для вихревого типа течения.

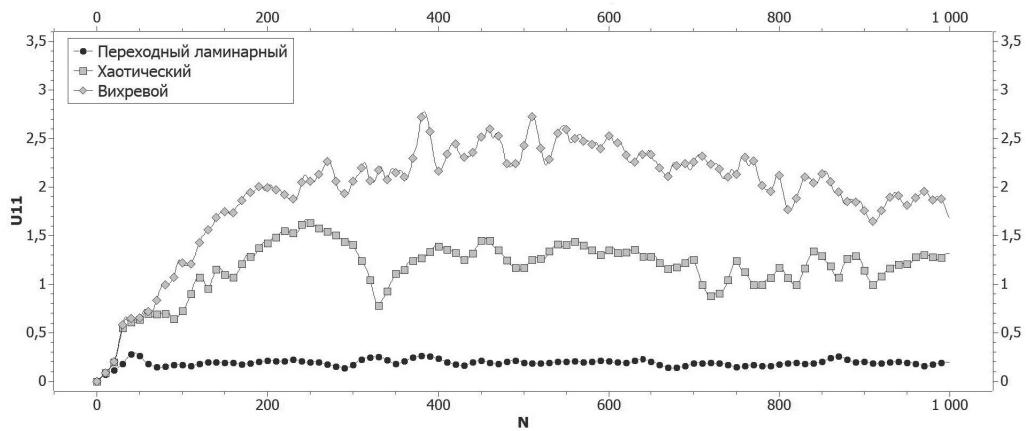


Рис. 8. Зависимость коэффициента U_{11} от шага по времени для разных типов течения.

Для анализа перехода течения от ламинарного к хаотическому и от хаотического к вихревому исследуем зависимость поведения Фурье-компоненты скорости на масштабе накачки U_{55} от Фурье-компоненты скорости на масштабе ячейки U_{11} для каждого из исследуемых типов течения. Этот метод анализа соответствует подходу, представленному в работе [27].

В ламинарном случае скорость течения слабо меняется во времени, при этом указанные коэффициенты Фурье также остаются неизменными. На рис. 9 это соотношение представлено точкой черного цвета и соответствует ламинарному режиму течения на рисунке рис. 3(а). В переходном режиме возникают квазипериодические колебания скорости, что показано на вставке к рис. 9 линией с треугольниками и соответствует режиму на рис. 3(б). В турбулентном режиме зависимость между U_{55} и U_{11} становится хаотической, она представлена линией с квадратами (рис. 9). Линия с ромбами на графике (рис. 9) соответствует вихревому режиму, поле завихренности которого показано на рис. 3(д). Для него характерно наибольшее изменение амплитуды гармоники U_{11} , что показывает ведущую роль этой гармоники в формировании вихревого режима течения. Отметим также, что при уменьшении донного трения значение гармоники U_{11} увеличивается.

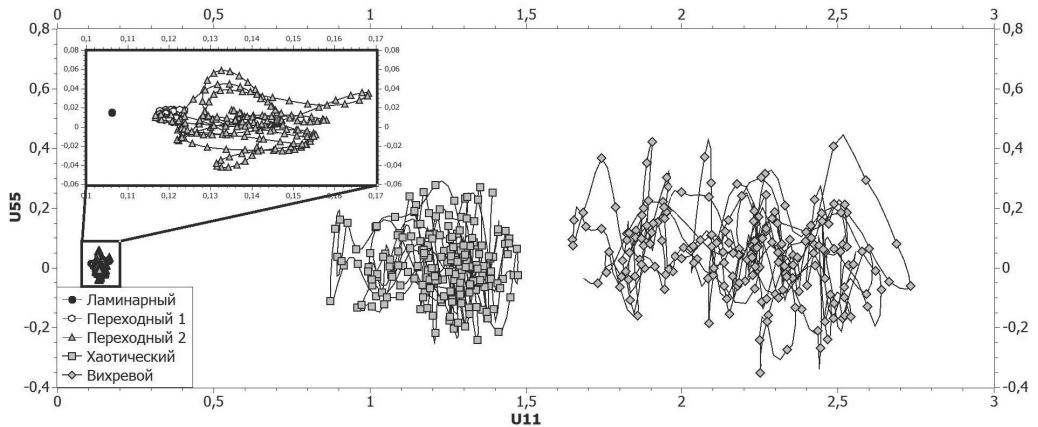


Рис. 9. Зависимость U_{55} от U_{11} для разных режимов течения при различных коэффициентах трения о дно α (ламинарный $\alpha = 0.4$, $Re = 315 \cdot 10^3$, переходный (1) $\alpha = 0.35$, $Re = 315 \cdot 10^3$, переходный (2) $\alpha = 0.3$, $Re = 378 \cdot 10^3$, хаотический $\alpha = 0.01$, $Re = 1570 \cdot 10^3$, вихревой $\alpha = 0.0001$, $Re = 1885 \cdot 10^3$).

2.6. Анализ течения методом ранговых распределений

Следующий способ анализа характеристик гидродинамических потоков возникает на основании существования аналогии между физическими моделями, что позволяет распространить методы исследования одной из них для изучения другой. Выше было указано, что ламинарное течение для гидродинамической системы (1)–(4) можно рассматривать как ее основное состояние, которое изменяется в зависимости от величины коэффициента трения. При этом формирующиеся различные типы течения соответствуют переходу из основного состояния в хаотическое, вихревое или промежуточное, которые с точки зрения физики естественно назвать возбужденными. Для каждого из этих состояний наблюдается система вихрей, число которых не фиксировано и меняется в ходе процесса перехода между состояниями. Таким образом, приходится исследовать поведение системы с неопределенным числом элементов внутренней структуры.

В физике примеры таких систем дает квантовая электродинамика. В частности, уравнение Шредингера для материальной системы (атома или молекулы) определяет набор уровней для энергии, среди которых основной уровень является стационарным состоянием. Если система находится в возбужденном состоянии, то существует вероятность перехода в основное состояние, и такой переход сопровождается излучением. Лучшее приближение для описания реальности можно получить, если в модели будет рассматриваться атом или молекула вместе с излучением, т. е. в сочетании со световыми квантами, из которых состоит излучение. Возвращаясь к гидродинамической системе (1)–(4), следует указать на аналогию, возникающую между основным состоянием атома и ламинарным течением, вихрями и световыми квантами.

В квантовой электродинамике основная трудность при моделировании материи

и излучения как единой системы заключалась в том, что число квантов света может меняться в ходе процесса: они могут поглощаться или испускаться. Поэтому такая система имеет неопределенное число частиц. Математическая теория, позволяющая рассматривать такие системы, известна как метод вторичного квантования и была представлена в работе В. А. Фока [34]. Согласно идеи Фока, для построения волновой функции при описании системы квантовых частиц следует использовать новый кинематический набор переменных. Было предложено анализировать волновую функцию не в конфигурационном пространстве, а в пространстве чисел заполнения или, по терминологии квантовой механики, в пространстве Фока. Эти числа возникают естественным образом, если перейти от исходной многочастичной волновой функции к новой переменной, принимающей только дискретные значения. Тогда эти числа указывают, сколько раз значения этих кинематических переменных повторяются в аргументах коэффициентов разложения многочастичной волновой функции по одночастичным функциям.

Таким образом, метод вторичного квантования показал, что введение частоты повторяемости для выбранной соответствующим образом кинематической переменной позволяет исследовать характеристики системы с неопределенным числом частиц. Применительно к гидродинамической системе (1)–(4) знание частоты повторяемости полей скорости (завихренностей) можно использовать для построения алгоритма классификации различных типов течений жидкости [35, 36]. Известно, что частоты повторяемости позволяют построить эмпирическую плотность распределения (PDF-распределение) случайной величины. Однако информационная интерпретация частоты повторяемости с других позиций, выполненная в различных областях человеческой деятельности, привела к использованию частотно-ранговых распределений при описании количественных характеристик наблюдаемых явлений.

В ранговых распределениях участвуют ранг объекта r и рассматриваемая характеристика объекта. Опишем два подхода к построениям ранговых распределений. В первом подходе под рангом понимается порядковый номер в упорядоченной по возрастанию (или по убыванию) последовательности значений рассматриваемой характеристики, при этом ее наибольшему значению ставится в соответствие наибольший ранг, наименьшему — наименьший. Во втором подходе вместо самих значений характеристики используют частоту её встречаемости E , отсортированную от меньшего к большему значению, и для полученного массива значений строится распределение для E в зависимости от ранга r . Феномен применения частотно-ранговых распределений был открыт в первой половине двадцатого века и связан с работами, ставшими классическими в области демографии [37], научометрии [38], биологии [39], сейсмологии [40], лингвистики [41]. Среди ранговых распределений особое место занимают распределения, описываемые законами Ципфа, Парето, Лотки, Мандельброта и др. В частности, если для какого-нибудь довольно большого текста составить список всех слов, которые встретились в нем, а потом ранжировать эти слова в порядке убывания частоты E их появления в тексте, то согласно закону Ципфа [41, 42] произведение ранга (номера) слова r и частоты появления E будет величиной постоянной: $Er = \text{const}$. Для других ранговых распределений были предложены модификации закона Ципфа, однако существует достаточно много явлений, для которых описание

их характеристик не согласуется с предложенными законами.

В лингвистике при анализе текстов известен подход Мандельброта [43]. Сравнение этого подхода с другими представлено в обзоре [44]. Тогда же А. Н. Колмогоров в своих работах рассмотрел теорию вероятностей [45] с позиции алгоритмического подхода. Согласно его концепции, понятие случайности определено им как максимально сложное. Если каждое случайное событие объяснять детерминистическим образом, то алгоритм его возникновения будет очень сложным, а расшифровка этого алгоритма потребует очень длинного кода. Чем сложнее описана информация, тем длиннее необходим алгоритм расшифровки, а это, согласно Колмогорову, близко к случайному.

Конструктивное воплощение концепция А. Н. Колмогорова получила в работах В. П. Маслова [46], что позволяет изучать поведение наблюдаемых характеристик, не разделяя их на детерминированные и случайные. Его подход существенно отличается от подхода Ципфа, как и от подхода всех других исследователей, изучавших эту проблему. А именно, он использовал представление, в котором в качестве наблюдаемой характеристики рассматривается частота встречаемости значений величины.

В [35] при построении алгоритма классификации течений колмогоровского типа с использованием знаний о поле скоростей были применены теоретические положения В. П. Маслова, предполагающие интерпретацию информационных данных как знаковой системы, в которой значения завихренности поля скорости рассматриваются как знаки. Ранговый анализ был выполнен как для значений завихренности, так и для частоты ее встречаемости. Показано, что для течений колмогоровского типа можно идентифицировать различные режимы движения жидкости, сравнивая графики ранговых распределений завихренности. Используя эти результаты, а также аналогичное исследование энергии и давления [36], мы покажем, что при анализе кривых рангового распределения для частоты встречаемости различных параметров принципиальную роль играет поведение точки перегиба, возникающей на графике ранговых распределений.

2.6.1. Ранговые распределения

В соответствии с ранговым подходом, завихренность рассматривается в качестве переменной для рангового подхода [35]. Анализ ранговых распределений был выполнен отдельно для положительной и отрицательной завихренности и частоты их появления в различных режимах течения. При этом меньшему рангу соответствует меньшая величина завихренности. Графики модуля отрицательной и положительной завихренности в зависимости от ранга для различных типов течения представлены на рис. 10(а) и рис. 10(б) соответственно. Обратим внимание, что кривые располагаются в определенном порядке. Для ламинарного течения характерно линейное распределение, в турбулентном и вихревом режимах наблюдается резкое возрастание кривых в области высоких рангов. Завихренность достигает своего максимального значения для вихревого режима течения.

Приведем результаты рангового анализа задачи для частоты встречаемости завихренности (рис. 11). Форма этих кривых для ламинарного, турбулентного и вихре-

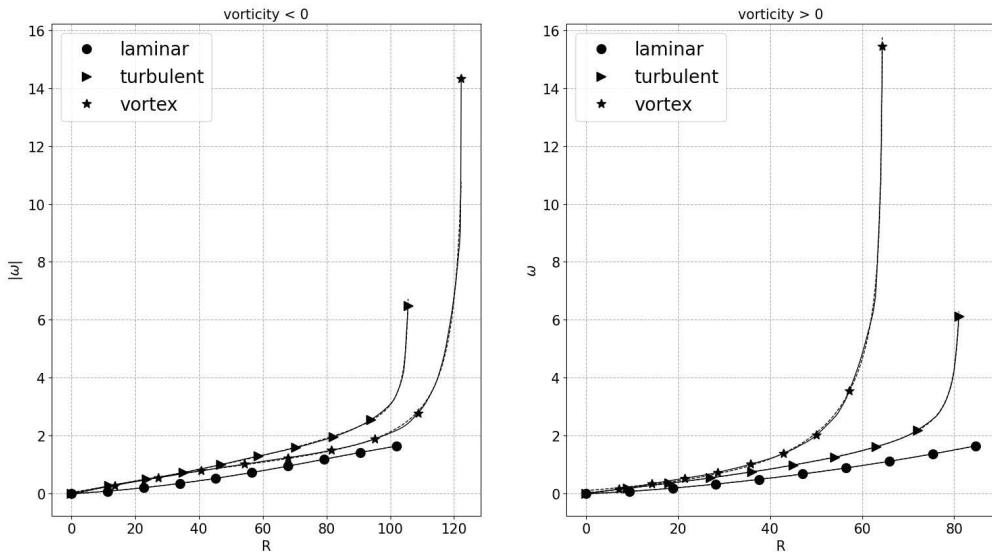


Рис. 10. Графики зависимости модуля отрицательной завихренности (а) и положительной завихренности (б) от рангов для различных режимов течения.

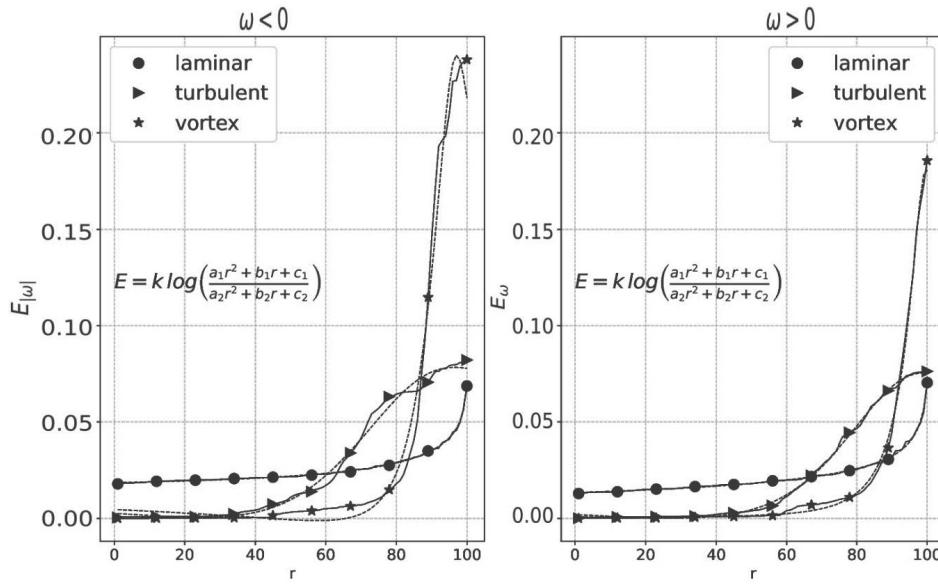


Рис. 11. Графики зависимости частоты встречаемости модуля отрицательной завихренности (а) и положительной завихренности (б) от рангов для ламинарного, хаотического и вихревого типов течения.

вого режимов течения значительно отличается. Было замечено, что важной характеристикой, позволяющей описать особенности различных типов течений, является возникающая на графиках точка перегиба.

Зависимость величин и частот встречаемости завихренности от ранга $g=g(r)$ описывается интерполяционной формулой

$$g(r) = k \cdot \log \left(\frac{a_1 r^2 + b_1 r + c_1}{a_2 r^2 + b_2 r + c_2} \right).$$

В дополнение к ранговому анализу полей завихренности проведем аналогичное исследование полей энергии и давления [36]. На рис. 12 представлены графики зависимости величины модуля отрицательной завихренности (а), энергии (б) и давления (в) от рангов для различных типов течения. Отметим характерные особенности, являющиеся общими как для завихренности, так и для энергии и давления. Кривые, соответствующие различным режимам течения, располагаются в определенной последовательности. При этом ранговые распределения для ламинарных течений (большие значения коэффициента донного трения α) близки к линейным. В остальных режимах для завихренности и энергии характерно резкое возрастание в области больших рангов.

Построим ранговые распределения частот встречаемости модуля отрицательной завихренности, энергии и давления для различных режимов течения. Графики представлены на рис. 13(а), рис. 13(б) и рис. 13(в) соответственно. Обозначим точки перегиба графиков. На рис. 13 видно, что при переходе от одного режима к другому значение ранга для точки перегиба изменяется в зависимости от α .

Зависимость ранга точки перегиба от коэффициента трения α представлена на рис. 14. Квадраты соответствуют вихревому режиму, который формируется при малых значениях коэффициента донного трения. Ромбы ограничивают область турбулентного режима, существующего для средних значений коэффициента трения. Круги обозначают ламинарный режим, соответствующий высоким величинам коэффициента донного трения. Переходные режимы обозначены треугольниками.

Зависимость ранга точки перегиба от коэффициента трения α может быть ап-

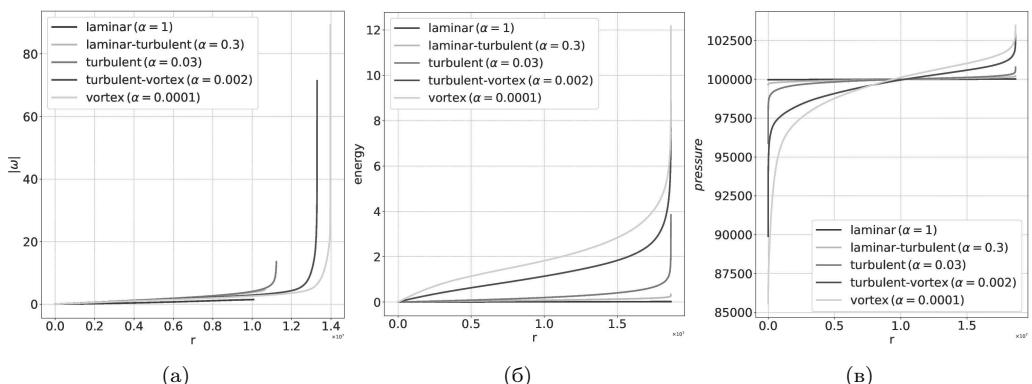


Рис. 12. Графики зависимости величины модуля отрицательной завихренности (а), энергии (б) и давления (в) от рангов для различных режимов течения.

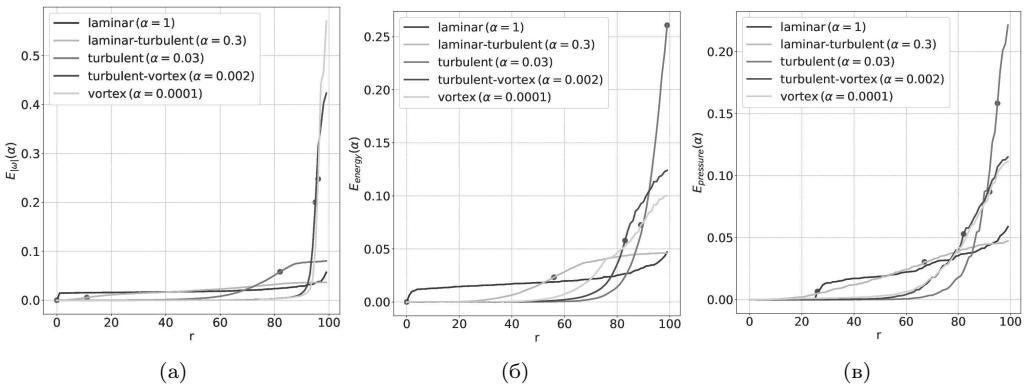


Рис. 13. Графики зависимости частоты встречаемости модуля отрицательной завихренности (а), энергии (б) и давления (в) от рангов для различных режимов течения. Точки перегиба на графиках выделены.

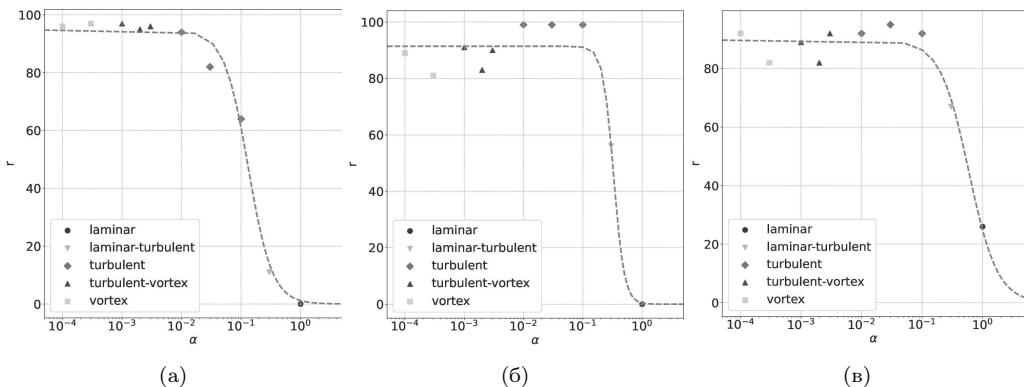


Рис. 14. Графики зависимости точки перегиба для частоты встречаемости модуля отрицательной завихренности (а), энергии (б) и давления (в) от рангов для различных типов течения.

проксимирована с помощью соотношения

$$r = \frac{A}{1 + B(\alpha/\alpha_0)^\gamma}. \quad (5)$$

Здесь α_0 — размерный коэффициент, равный c^{-1} , A, B и γ — подгоночные параметры. На рис. 14 приведены кривые, построенные по формуле (5).

Таким образом, график зависимости ранга точки перегиба от величины коэффициента трения о дно дает возможность определить тип течения (ламинарный, хаотический, вихревой и переходный) по расположению точек на этом графике.

3. Численное моделирование квазидвумерных турбулентных течений

3.1. Введение

В предыдущем разделе было указано, что основной особенностью двумерного турбулентного течения, возбуждаемого внешней силой, является возникновение обратного каскада энергии. Напомним, что он состоит в увеличении пространственного масштаба вихрей, создаваемых внешней силой. Рост вихрей ограничен размером исследуемой области (ячейки) [10, 29, 47]. В этом случае энергия накапливается на масштабе ячейки. При определенных условиях такое накопление энергии приводит к возникновению устойчивой крупной вихревой структуры.

Возникновение когерентных вихрей наблюдается также в пространственных турбулентных течениях во вращающейся жидкости, когда сила Кориолиса доминирует над силами инерции. Это приводит к формированию геострофических (столбовых) вихрей, структура течения которых однородна вдоль оси вращения. Такой тип вихревых течений называется квазидвумерным. Для этого вида течений характерно наличие как прямого каскада энергии, наблюдаемого в трехмерной турбулентности, так и обратного, свойственного плоским потокам. Этот процесс можно описать следующим образом. Накачка течения формирует сначала турбулентный поток во всей исследуемой области, но под действием силы вращения данный турбулентный поток перестраивается в вертикальные столбовые структуры, течение которых однородно по вертикали. Около границ области исследования образуются слои Экмана, которые обеспечивают систему дополнительной накачкой энергией [8, 48, 49].

В данном разделе на основании численных экспериментов изучено вихревое движение жидкости, формирующееся в кубе под действием силы Кориолиса и при наличии накачки. Проанализирована схема формирования различных типов течения в зависимости от частоты вращения и амплитуды силы. Численно исследованы процессы формирования турбулентного режима течения, возникновения нескольких вихрей-антициклонов (многовихревой режим) и крупновихревого режима типа циклона. Показано, что выполненные численные эксперименты находятся в согласии с физическими исследованиями [47].

3.2. Уравнения модели и метод расчета

Рассматривается задача о течении несжимаемой жидкости в кубе со стороной L . Куб вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси, проходящей через центр области в вертикальном направлении. Движение жидкости моделируется системой уравнений Навье–Стокса во вращающейся системе отсчёта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(u\vec{V}) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v + f_0\frac{A_x}{k_x}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) + \nu\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla(v\vec{V}) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u + f_0\frac{A_y}{k_y}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) + \nu\Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla(w\vec{V}) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - f_0\frac{(A_x + A_y)}{k_z}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z) + \nu\Delta w, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\nabla \vec{V} = 0; \quad \vec{V}|_{\Gamma} = 0, \quad \nabla_n p|_{\Gamma} = 0,$$

где кинематические и динамические переменные задачи определены в разделах 1, 2; здесь Γ обозначает границу куба, ∇_n — нормальная компонента градиента. Возбуждающую течение объёмную силу характеризуют волновой вектор $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, её амплитуда f_0 и некоторые выбранные постоянные коэффициенты A_x и A_y , имеющие порядок единицы. Угловая скорость вращения системы Ω является изменяемым параметром.

Безразмерными априорными числами, характеризующими задачу, являются параметр kL , $k = |\vec{k}|L$, числа Рейнольдса $Re_f = V_0/k\nu$ и Россби $Ro_f = V_0 k / 2\Omega$, где $V_0 = \sqrt{f/k}$ — характерное значение скорости. В определении V_0 присутствует f — полная амплитуда силы, определяемая выражением

$$f = \left((A_x/k_x)^2 + (A_y/k_y)^2 + ((A_x + A_y)/k_z)^2 \right)^{1/2} f_0.$$

Сложная пространственная динамика квазидвумерных турбулентных течений делает их численное моделирование достаточно трудоемкой вычислительной задачей. Особенно долгими становятся расчеты при задании нулевых граничных условий — прилипания жидкости к стенкам куба. Это связано с необходимостью подробного разрешения влияния пограничного слоя на основной поток. Нулевые граничные условия приводят к появлению резких градиентов параметров течения в окрестности границы исследуемой области, так как здесь формируются сложные вихревые структуры, для численного разрешения которых требуется введение подробных сеток вблизи граничных областей. В нашей работе для решения этой проблемы применен метод стягивания сетки к границам таким образом, чтобы в пограничном слое присутствовало как минимум 10 вычислительных ячеек.

Расчёты проводились с использованием пакета программ вычислительной гидродинамики OpenFOAM. Это один из немногих прикладных программных пакетов для решения задач механики сплошных сред с открытым исходным кодом. Широкий инструментарий для формализации задачи, высокая эффективность реализации, а также хорошая масштабируемость относительно архитектуры вычислительной системы позволяют удобно конструировать в пакете численные модели разной сложности. Открытый исходный код, в свою очередь, дает возможность в деталях контролировать ход решения, начиная от построения сетки до выбора схем аппроксимации слагаемых управляющей системы и методов численного решения. В основе работы пакета программ лежит метод конечных объемов. Данный подход основан на дискретизации пространства — разделении его на конечные объемы, в которых формулируются и решаются уравнения сохранения для рассматриваемых величин (массы, импульса, энергии). Такой способ расчёта полей гарантирует выполнение законов сохранения внутри области. Для ускорения расчётов в пакете OpenFOAM реализованы методы декомпозиции расчетной области. Процесс параллельных вычислений включает в себя декомпозицию сетки и полей, параллельный запуск программы и последующую обработку подобластей. При параллельном запуске используется стандартный интерфейс передачи сообщений (MPI).

3.3. Результаты численных экспериментов

Расчетная область представляет собой куб размером $2\pi \times 2\pi \times 2\pi \text{ м}^3$. Границы куба считаются твердыми и непроницаемыми. В качестве начальных условий используются нулевые условия для всех измеряемых параметров течения. Плотность жидкости $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$, вязкость $\nu = 0.01 \text{ м}^2/\text{с}$.

Численный эксперимент продолжается до установления стационарного состояния, переход к которому контролируется путем построения зависимости общей кинетической энергии системы от времени. После достижения системой стационарного состояния происходит обработка и анализ полученных результатов.

В ходе расчетов были выявлены три основных режима течений. Опишем кратко их особенности. Почти все численные эксперименты проводились при числе Рейнольдса $Re_f = 82$. При относительно высоких значениях априорного числа Россби Ro_f наблюдался режим трёхмерной турбулентности, который при снижении Ro_f сменялся режимом нескольких вихрей-циклонов с диаметром $L' \sim L/3$, имеющих однородную по вертикали структуру. Эти циклоны неустойчивы и имеют тенденцию как к слиянию, так и к распаду. На краю диапазона изменения Ro_f возникал один крупный вихрь-антициклон размером $L' \sim L$, занимающий практически всю расчетную область. Вращение циклонических течений соправлено с вращением куба, антициклон же вращается в противоположном направлении. Выявленный набор режимов соответствует экспериментальным наблюдениям [47], хотя в эксперименте режим нескольких циклонов (многовихревой) достигался при более высокой частоте вращения, нежели режим одного крупного антициклиона (вихревой). Источником этого различия является, вероятно, то, что в указанных экспериментальных работах возбуждение течения производилось плоскими лопатками, расположенными вблизи вертикальных рёбер куба, тогда как при численном моделировании накачка течения производится по всему объёму куба.

На рис. 15 представлены изоповерхности поля завихренности $\omega_z = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ и линии тока в горизонтальной плоскости для различных режимов и соответствующих чисел Россби Ro_f . Рис. 15 (а) соответствует режиму трёхмерной турбулентности, который формируется при $Ro_f \gtrsim 0.5$. На рис. 15 (б) представлен режим течения, для которого характерно образование нескольких циклонов, однородных по вертикали, с характерным числом Россби $Ro_f = 0.2 \div 0.3$. На рис. 15 (в) изображен режим течения с одним крупным антициклоном, возникающий при числах Россби $Ro_f = 0.25$ и Рейнольдса $Re_f = 100$. Установившиеся течения удобнее оценивать, используя апостериорные числа Рейнольдса $Re = VL'/\nu$ и Россби $Ro = V/2\Omega L'$, где V есть среднеквадратичная скорость в ячейке. Данные безразмерные параметры построены по характеристикам уже установившегося потока, тогда как аналогичные априорные параметры определяются начальными условиями задачи. Для турбулентного режима характерный масштаб был принят равным $L' = L_f = 1/k$.

В следующих пунктах данного раздела рассмотрены основные физические и статистические параметры, полученные в ходе численного эксперимента. Основное внимание уделено анализу вихревого режима течения.

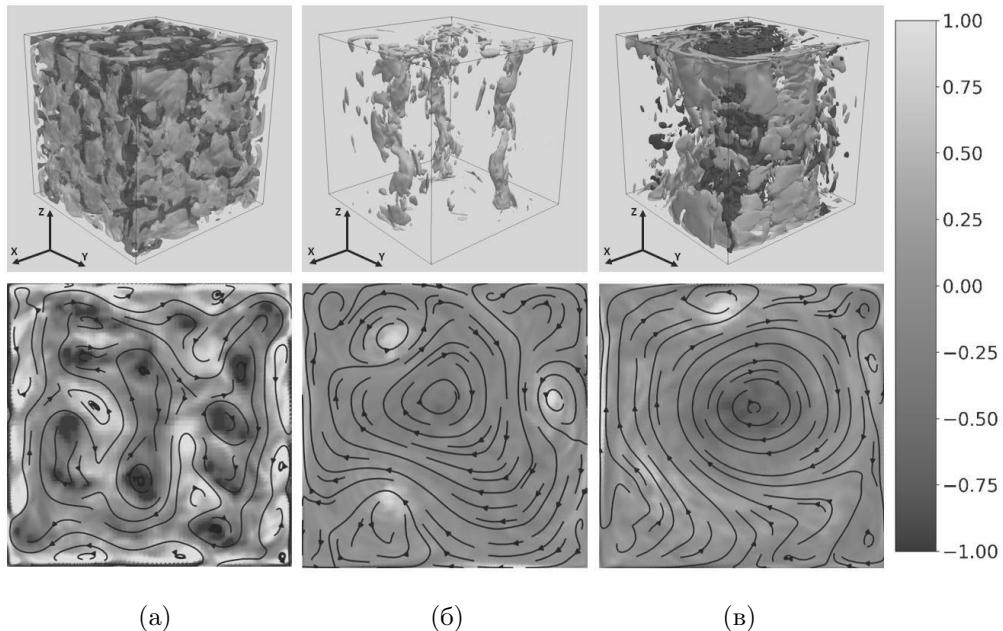


Рис. 15. Первый ряд показывает изоповерхности завихренности, нормированной на удвоенную угловую скорость ($\omega_z/2\Omega$), для турбулентного (а, $Rof \sim 1$), многовихревого (б, $Rof \sim 0.2$) и вихревого (в, $Rof = 0.25$) режимов. Во втором ряду представлены осредненные по вертикали горизонтальные срезы полей завихренности с наложенными линиями тока для соответствующих режимов.

3.4. Распределение среднеквадратичной скорости течения

Формирование каждого из описанных режимов течения начинается с хаотических мелкомасштабных структур, возникающих под воздействием внешней силы (накачки). Определенные значения частоты вращения и силы накачки приводят к формированию режима, состоящего из нескольких однородных по вертикали вихрей-циклонов (многовихревой режим), которые движутся вместе с вращающейся жидкостью. Они имеют тенденцию как к слиянию, так и к распаду. При определенных условиях данный многовихревой режим может перейти в режим одного крупного вихря-антициклона. На графике рис. 16 представлена среднеквадратичная скорость для каждого из перечисленных типов течения. В турбулентном режиме она принимает наименьшее значение, тогда как многовихревой и вихревой режимы демонстрируют возрастание среднеквадратичной скорости.

Для наглядности на графике каждого режима изображена аппроксимационная кривая, позволяющая судить о выходе на стационарный режим и наблюдать наличие флюктуаций около стационарного значения. Сплошная линия с квадратными точками соответствует многовихревому, пунктирная с треугольными — вихревому, штрихпунктирная с круглыми точками — турбулентному режимам.

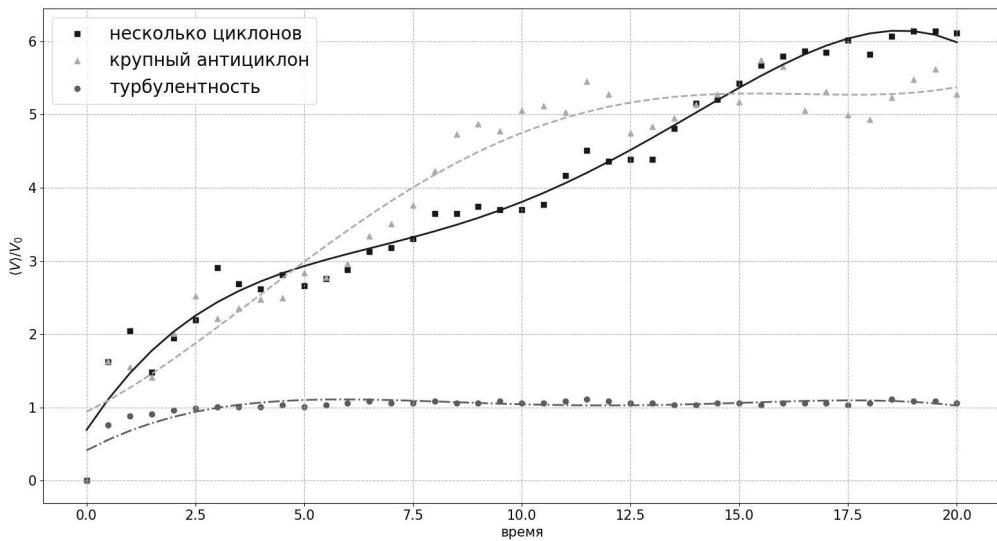


Рис. 16. Распределение среднеквадратичной скорости течения в зависимости от времени для различных типов течения, нормированное на V_0 .

3.5. Положение центра антициклона

При формировании вихревого режима внутри области выделяется крупное антициклоническое течение. Течение носит нестационарный характер, при котором положение центра вихря перемещается внутри области, периодически удаляясь и приближаясь к ее центру. Поскольку постановка задачи обладает центральной симметрией, будем следить только за радиальным перемещением центра антициклона.

Для отслеживания центра антициклона разработан специальный алгоритм. Для каждого момента времени профиль z компоненты завихренности усреднялся по вертикали. Пограничные слои не учитывались. После этого находилась точка с минимальным значением завихренности, и в её окрестностях выделялся центр вращения. Это место полагалось центром антициклона.

На рис. 17 показано, что отклонение центра антициклона от центра куба носит хаотический характер, а характерный размер максимального отклонения равен ~ 1 , что значительно меньше ближайшего расстояния до границы области, равного π .

3.6. Радиальный профиль азимутальной скорости

Для построения радиального профиля азимутальной скорости отслеживалось положение центра антициклона, после чего производилось усреднение по времени и углу (U^ϕ) относительно центра вихря [47]. При теоретическом рассмотрении осесимметричного неподвижного вихря во вращающейся системе была получена оценка для U^ϕ [50, 51]. Сравнение теоретической кривой (светлая пунктирная линия) с расчётной (сплошная линия) указывает на их качественное совпадение (рис. 18). Однако они отличаются количественно, и аппроксимация расчётного профиля полино-

мами (темная пунктирная линия) демонстрирует лучшее совпадение с численными экспериментами.

3.7. Распределение плотности вероятности завихренности

Для классификации различных типов течений жидкости используем одноточечную статистику полей завихренности. Основная трудность при анализе характе-

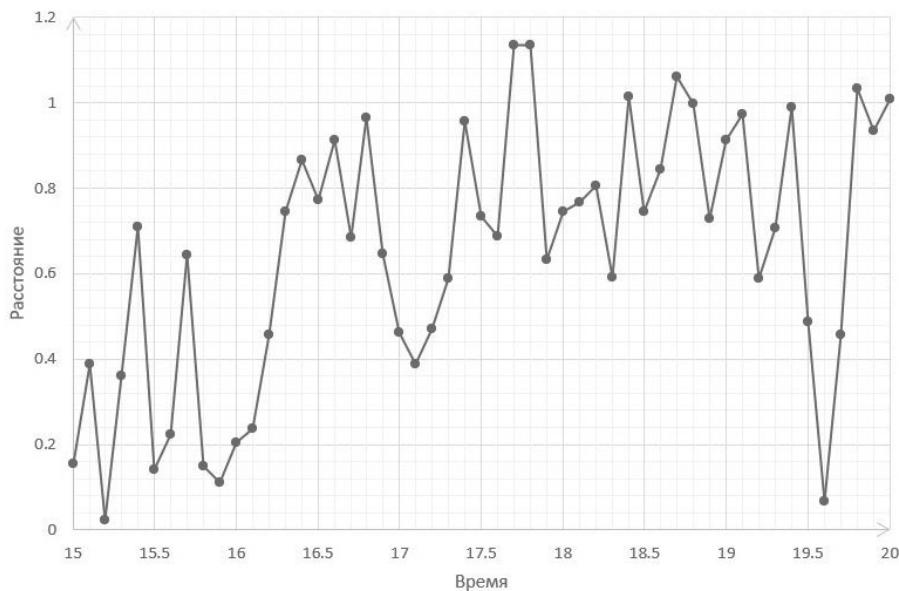


Рис. 17. Расстояние от центра антициклона до центра области, в зависимости от времени.

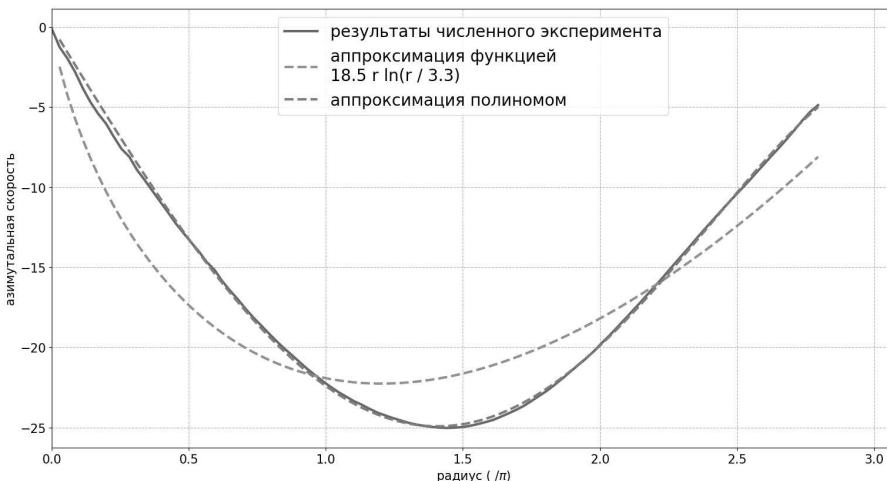


Рис. 18. Усреднённый по углу профиль азимутальной скорости в зависимости от радиуса и его аппроксимация.

ристик выбранной динамической системы состоит в формировании информации, подходящей для создания соответствующей процедуры алгоритмизации.

На рис. 19 изображены функции плотности вероятности распределения завихренности $\omega_z/2\Omega$ для турбулентного и двух вихревых режимов течения — крупного антициклона и нескольких вихрей-циклонов. Сплошная линия соответствует режиму нескольких вихрей-циклонов, пунктирная — крупному вихрю-антициклону, штрих-пунктирная — турбулентному режиму. На данных графиках наблюдается асимметрия в их поведении, определяемая разным наклоном графика плотности вероятности относительно вертикальной линии, проходящей через ноль. Это обусловлено наличием сил Кориолиса и соответствует результатам экспериментальных исследований. Стоит отметить, что для турбулентного режима угол наклона графика существенно отличается в области отрицательных значений завихренности.

3.8. Энергетические характеристики течения

На рисунках 20(а, б, в) изображены энергетические спектры для трёх полученных режимов течения. Графики строились по мгновенным полям скоростей после установления стационарного режима.

Графики построены в логарифмической системе координат. На всех трёх графиках можно выделить линейный участок, который определяет вид зависимости: $E \sim k^\gamma$. Угол наклона прямой определяет показатель степени. Он оценивается значениями «-2.65», «-2.8» и «-2.8» для турбулентного, многовихревого и вихревого режимов соответственно. Следует заметить, что теоретическая оценка (закон Колмогорова) определяет показатель степени значением «-5/3». Данное отличие предположительно связано с наличием силы Кориолиса, которая нарушает изотропию турбулентного течения в случае его вращения.

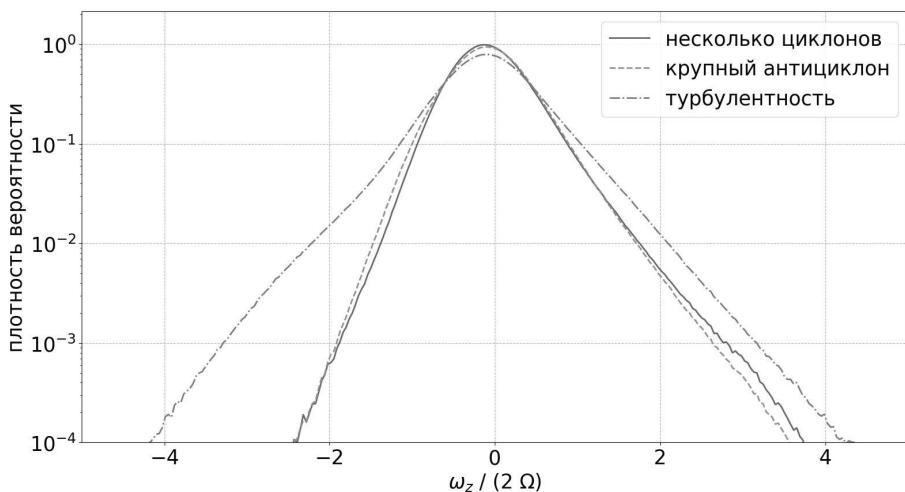


Рис. 19. Функции плотности вероятности распределения завихренности.

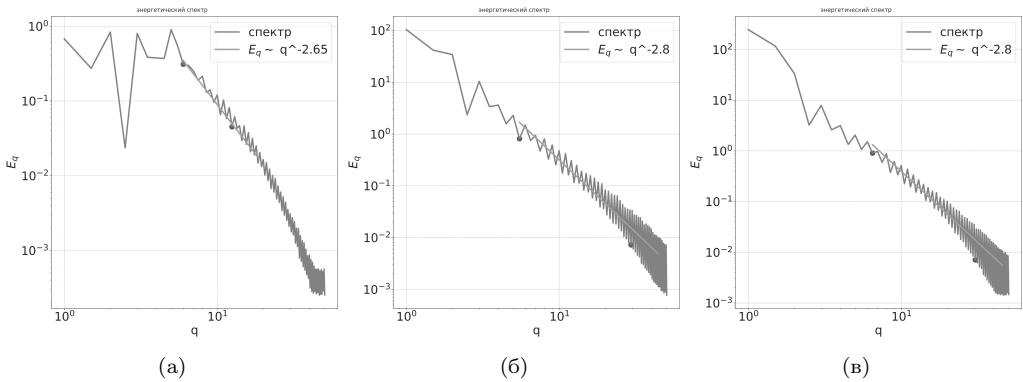


Рис. 20. Энергетический спектр различных режимов течения: турбулентного (а, $Rof = 0.5$, $Re_f = 82$); многовихревого (б, $Rof = 0.2$, $Re_f = 82$), вихревого (в, $Rof = 0.5$, $Re_f = 100$).

3.9. Ранговый анализ завихренности

В соответствии с предложенной ранее идеей рангового анализа выполним построение ранговых кривых для завихренности, используя методику, описанную в пункте 2.6. На рис. 21(а) представлено распределение модуля отрицательной завихренности для различных режимов течения: турбулентного, многовихревого и вихревого. Отметим характерное поведение построенных графиков: они располагаются в определенной последовательности, и каждый из них соответствует определенной величине числа Россби Rof . Смена режимов течения отражается на ранговом распределении завихренности (рис. 21(а)), где каждая из кривых асимптотически стремится к вертикальной прямой на больших рангах.

На рис. 21(б) приведены графики частоты встречаемости отрицательной компоненты завихренности для различных типов течений. Графики распределения имеют характерную S-образную форму. Анализ кривых рангового распределения для частоты встречаемости завихренности обнаруживает наличие точек перегиба на графиках. Положение этих точек связано с типом течения. Для многовихревого и вихревого режимов они расположены в области больших рангов, что позволяет распространить выполненный для двумерного случая ранговый анализ на трехмерный вариант.

4. Численное моделирование эластической турбулентности

4.1. Введение

Добавление полимерных молекул в жидкость приводит к радикальному изменению динамики ее течения. Лабораторные эксперименты показывают, что наличие даже незначительной концентрации полимеров может существенно изменить свойства ламинарных гидродинамических потоков и породить новую форму турбулентности, получившую название эластической турбулентности [52–55]. Для ньютоновского потока жидкости переход к турбулентности определяется отношением инер-

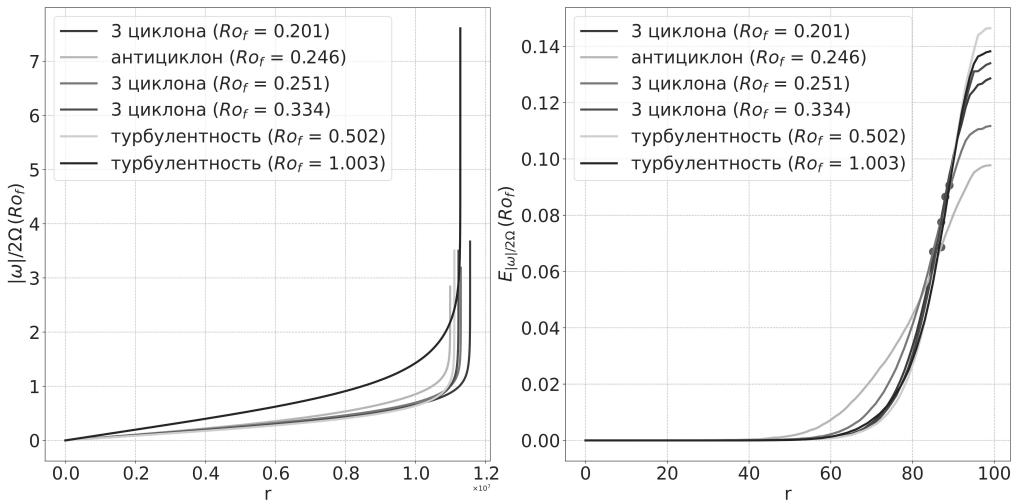


Рис. 21. (а) Ранговое распределение завихренности, нормированной на удвоенную угловую скорость ($|\omega_z|/2\Omega$), для различных режимов течений. (б) Ранговое распределение частоты встречаемости завихренности для различных типов течений. Точки перегиба выделены.

ционных сил к вязким и характеризуется числом Рейнольдса Re . Чем выше Re , тем более неустойчивым становится поток, что приводит к возникновению и развитию турбулентного режима течения.

Однако в жидкости, в которой присутствуют полимерные молекулы, возникает так называемый вязкоупругий эффект. Полимерная молекула представляет собой крупную молекулу, состоящую из множества повторяющихся звеньев — мономеров, связанных в одну длинную цепь. В своем равновесном состоянии молекулы полимеров имеют форму клубка, а в неравновесном состоянии эти молекулы могут растягиваться или сжиматься. Поэтому, если их добавить в жидкость, получившийся раствор будет иметь необычные свойства. Как показывают физические эксперименты, силы, действующие со стороны полимерной примеси на гидродинамический поток, приводят к возникновению и развитию неустойчивости течения при очень малых числах Рейнольдса (порядка единицы). Возникает эффект эластической (или упругой) турбулентности [52–55].

Несмотря на то, что феномен эластической турбулентности был открыт всего два десятилетия назад, его применение уже стало возможным в различных областях, таких, например, как перемешивание вязких жидкостей в криволинейных микроканалах при низких числах $Re \ll 1$ [56–58]. Наличие полимеров в среде позволяет эффективно увеличить теплопередачу в микроканалах [59–61]. Кроме того, в работах [62, 63] описано, что добавление полимеров позволяет наблюдать эффективную эмульгацию масляных капель и разрушающий капиллярный эффект. Отдельно необходимо упомянуть влияние полимеров на интенсификацию добычи сырой нефти по сравнению с традиционным химическим заводнением [64–66].

В связи с перечисленными свойствами полимерных растворов жидкости, акту-

альным является построение вычислительных методик и проведение самих численных экспериментов в данной области [67–71]. Настоящий раздел посвящен численному решению задачи колмогоровского типа в квадратной ячейке для полимерного раствора. Определены параметры гидродинамического потока и полимеров, которые приводят к возникновению эластической турбулентности. Построены энергетические характеристики задачи, поля завихренности основного гидродинамического течения и полимерной составляющей потока.

4.2. Численное моделирование эластической турбулентности

Численное моделирование полимерных растворов представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу [67–71]. Это связано с тем, что в потоке присутствует две компоненты: это основное гидродинамическое течение, описываемое в случае вязкой среды системой уравнений Навье–Стокса (для невязкой среды – системой уравнений Эйлера), и полимерная компонента течения, динамика которой описывается уравнениями переноса. Наличие полимеров в гидродинамическом потоке учитывается в виде внешней силы, которая присутствует в правой части системы уравнений Навье–Стокса. Дополнительно необходимо задать модель растяжения полимеров, которая также существенно влияет на формирование общего течения.

Основной проблемой, возникающей при численном моделировании с использованием любой вычислительной модели полимерного раствора, является численная неустойчивость, возникающая вследствие большого числа Вайсенберга [72], которое определяется как отношение времени релаксации $1/\gamma_0$ полимерной молекулы до ее равновесного состояния к характерному градиенту скорости потока жидкости: $Wi = U/\gamma_0 L$. Чрезмерное растяжение полимерных молекул, возникающее при больших величинах числа Wi , характерное для упругой турбулентности, приводит к резким градиентам напряжений в полимерном поле, которые могут привести к неустойчивости численного счета. Эти численные неустойчивости могут быть частично устранены за счет использования схем дискретизации с высоким разрешением [67, 68], соблюдения строгих требований к полимерам [69] или добавления коэффициента искусственной диффузии в определяющие уравнения на полимерную компоненту [70, 71].

Поскольку режим эластической турбулентности обусловлен исключительно упругими неустойчивостями, коэффициент искусственной диффузии может существенно повлиять на численное решение, что может привести к неправильной физической интерпретации хаотического режима [71]. Отсутствие же коэффициента диффузии влечет за собой возникновение больших градиентов растяжений полимерных молекул. Для численной устойчивости счета при этом необходимо использовать очень подробные вычислительные сетки. В некоторых случаях эти проблемы могут быть частично устранены за счет локального использования искусственной диффузии только в областях с высокими градиентами растяжений полимеров [73]. Указанные сложности моделирования предъявляют высокие требования к качеству вычислительного алгоритма, выбранного для расчета полимерного потока.

В данном разделе используется численная схема второго порядка точности, сконструированная авторами [74–77] для прямого численного моделирования динамики

полимерных растворов. Отдельно заметим, что для моделирования гидродинамической составляющей потока применяется линеаризованная схема Годунова [74], которая была разработана авторами под руководством академика Сергея Константиновича Годунова. Полимерная составляющая потока решается численной методикой Курганова – Тедмора [67].

С помощью методики Курганова – Тедмора исследовано течение колмогоровского типа в периодической квадратной области для вязкого полимерного раствора. Параметры задачи подбирались таким образом, чтобы число Рейнольдса было минимальным $Re \sim 10^{-1}$ и таким образом нивелировалось действие инерционных сил на течение. В ходе численных экспериментов получена неустойчивость полимерного течения и построены энергетические спектры турбулентных потоков. В спектрах наблюдается инерционный диапазон энергетического каскада гидродинамического потока с показателем «-4», для каскада растяжений полимерных молекул этот показатель составляет «-1.6».

4.3. Уравнения переноса для полимера

Полимерная молекула, помещенная во внешнее неоднородное гидродинамическое поле, деформируется, поскольку различные ее звенья движутся с различной скоростью. Относительная деформация характеризуется вектором $\vec{R} = (R^1, R^2, R^3)$, определяющим направление, в котором вытягивается полимерный клубок. При формулировке уравнения переноса для \vec{R} естественным требованием является ограничение тензорной инвариантности: векторный характер объекта должен сохраняться вдоль несущего его потока жидкости. Для этого воспользуемся подходом Олдройда [78], который указал, что тензорный характер объекта сохраняется, если использовать аппарат производной Ли. Производная Ли $L_v R^k$ характеризует изменение вектора \vec{R} вдоль векторного поля v^i и, по определению [79], равна

$$L_v R^i = v^j \frac{\partial R^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^i}{\partial x^j} R^j.$$

Если полимер переносится вместе с потоком, то

$$\frac{DR^i}{Dt} = \frac{\partial R^i}{\partial t} + L_v R^i = \frac{dR^i}{dt} - \frac{\partial v^i}{\partial x^j} R^j = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является следствием общего утверждения, доказанного в [80]. Чтобы описать деформацию полимера в гидродинамическом поле, запишем уравнение переноса (7) в виде

$$\frac{DR^i}{Dt} = \frac{dR^i}{dt} - \frac{\partial v^i}{\partial x^j} R^j = I^i + \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial x^j}. \quad (8)$$

В правую часть (7) введен источник I^k для деформаций и их поток Γ_i^k . Эти функции определяются в соответствии с требованиями неравновесной термодинамики.

4.4. Диссипативная функция

Будем следовать стандартной схеме неравновесной термодинамики для вычисления диссипативной функции [81]. Запишем уравнения законов сохранения массы, импульса, первый и второй законы термодинамики:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x^k} = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + \rho f_i. \quad (9)$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = - \frac{\partial J_j^{(q)}}{\partial x^j} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j}, \quad \rho \frac{ds}{dt} = - \frac{\partial J_j^{(s)}}{\partial x^j} + D. \quad (10)$$

Для сокращения записи введены обозначения для компонент скорости $u = v_1$, $v = v_2$, $w = v_3$ под повторяющимся индексом подразумевается суммирование. Здесь σ_{ij} — компоненты поля напряжений, предполагаемого симметричным, $J_j^{(q)}$ и $J_j^{(s)}$ — составляющие потоков тепла и энтропии, D — диссипативная функция, f_i — ускорения внешних массовых сил.

Будем предполагать, что внутренняя энергия системы жидкость — полимер U является функцией энтропии s , плотности ρ и вектора относительной деформации $\vec{R}: U = U(s, \rho, \vec{R})$. Поскольку функция $U = U(s, \rho, \vec{R})$ является скалярной, то она зависит от вектора \vec{R} через его инвариант, которым является длина $R = |\vec{R}|: U = U(s, \rho, R)$. Отсюда вдоль траектории частицы следует тождество Гиббса [81]:

$$\frac{dU}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \frac{dR^i}{dt}.$$

Подставляя сюда выражения для производных по времени от внутренней энергии и энтропии из (10), получим

$$-\frac{\partial J_j^{(s)}}{\partial x^j} + D = -\frac{1}{T} \frac{\partial J_j^{(q)}}{\partial x^j} + \frac{1}{T} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \frac{dR^i}{dt} \right). \quad (11)$$

Для исключения в правой части (11) производных по времени от ρ и R^i необходимо воспользоваться уравнениями переноса (8), (9). После ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \frac{dR^i}{dt} = \\ = \left(\sigma_{ij} + \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta_{ij} - \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i R^j}{R} \right) - \rho I^i \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} - \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial x^j}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $e_{ij} = (\partial v_i / \partial x^j + \partial v_j / \partial x^i) / 2$ — тензор скоростей деформации. Подставим (12) в (11) и выделим потоковые слагаемые так, чтобы в правой части остались только те вклады, которые образуют билинейную форму термодинамических сил и потоков. В результате придем к соотношению

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x^j} \left(J_j^{(s)} - \frac{1}{T} J_j^{(q)} - \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \Gamma_j^i \right) + D = \frac{e_{ij}}{T} \left(\sigma_{ij} + \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta_{ij} - \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i R^j}{R} \right) - \\ - \frac{1}{T} \rho I^i \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} + \frac{1}{T} \Gamma_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \right) - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(J_j^{(q)} + \frac{1}{T} \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \Gamma_j^i \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Стандартный анализ (13) в рамках предположений неравновесной термодинамики [81] приводит к следующему выражению для потока энтропии:

$$J_j^{(s)} = \frac{1}{T} J_j^{(q)} + \frac{1}{T} \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \Gamma_j^i.$$

Таким образом, для диссипативной функции окончательно получим

$$D = \frac{e_{ij}}{T} \left(\sigma_{ij} + \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta_{ij} - \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i R^j}{R} \right) - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(J_j^{(q)} + \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \Gamma_j^i \right) - \frac{1}{T} \rho I^i \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} + \frac{1}{T} \Gamma_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \right). \quad (14)$$

В такой форме диссипативная функция представлена билинейной формой термодинамических сил и потоков

$$D = X_i Y_i, \quad \frac{\partial D}{\partial X_i} = Y_i, \quad D \geq 0. \quad (15)$$

Примем для потоков приближение линейных связей. В этом случае

$$J_j^{(q)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x^j} - \frac{1}{T} \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} \Gamma_j^i, \quad \Gamma_j^i = \gamma_{jm}^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^m}{R} \right). \quad (16)$$

Феноменологические коэффициенты в (16) должны удовлетворять ограничениям, обеспечивающим неотрицательность диссипативной функции. В частности, $\lambda \geq 0$, а γ_{jm}^{ik} — коэффициенты положительно определенной квадратичной формы.

В соответствии с (14), (15) можно записать уравнения состояния материала

$$\sigma_{ij} = -\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta_{ij} + \rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i R^j}{R} + \frac{\partial D T}{\partial e_{ij}}, \quad -\rho \frac{\partial U}{\partial R} \frac{R^i}{R} = \frac{\partial D T}{\partial I^i}. \quad (17)$$

Заметим, что в выражении для σ_{ij} имеются слагаемые, связанные с деформациями полимера — структурные составляющие поля напряжений.

4.5. Уравнения модели

Будем полагать, что внутренняя энергия и диссипативная функция заданы. Представим внутреннюю энергию в виде

$$U = U_0 + U_1 = U_0(s, \rho) + U_1(R), \quad U_1 = \frac{A \gamma_0}{2 \rho} R^2 \quad (18)$$

с некоторыми коэффициентами $A, \gamma_0 \geq 0$. Предполагаем, что диссипативная функция имеет структуру относительно источника I^i , аналогичную структуре диссипативной функции в модели обычной вязкой жидкости относительно тензора скоростей деформации e_{ij} : $D(\lambda e_{ij}) = \lambda^2 D(e_{ij})$, $D(\lambda I^i) = \lambda^2 D(I^i)$. Тогда отсюда и из (17), (18) следует, что

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + A \gamma_0 R^i R^j + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{d} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad (19)$$

$$I^i = -\frac{A \gamma_0 R^i}{2}, \quad (20)$$

где d — размерность пространства ($d = 2, 3$), η, ζ — коэффициенты вязкости. Для коэффициентов γ_{jm}^{ik} выберем следующую параметризацию:

$$\gamma_{jm}^{ik} = \delta_{im} \delta_{jk} \frac{C_d}{A \gamma_0}, \quad C_d \geq 0.$$

Отсюда и из (16), (18) следует, что

$$\Gamma_j^i = C_d \frac{\partial R^i}{\partial x^j}. \quad (21)$$

Полученные соотношения справедливы при размерности пространства $d = 2, 3$. Предполагая дальнейшее выполнение численного моделирования для $d = 2$, запишем соответствующие уравнения модели. Используя принятые в предыдущих разделах обозначения для компонент скорости, полагаем $v_1 = u$, $v_2 = v$, $\vec{V} = (u, v)$, $R^1 = R^x$, $R^2 = R^y$. Ускорения внешних массовых сил равны $f_1 = -G \sin(ky) \cos(kx)$, $f_2 = G \sin(kx) \cos(ky)$, G — интенсивность внешней силы. Также напомним, что численное моделирование выполнялось при условии слабой сжимаемости. Это приводит к тому, что в уравнении для импульсов в правой части можно пренебречь сла-гаемым, пропорциональным $\partial v_k / \partial x_k$. В результате уравнения законов сохранения массы, импульса и уравнение переноса для полимера можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla(\rho u \vec{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho G \sin(ky) \cos(kx) + \mu \Delta u + A \gamma_0 \frac{\partial (R^x)^2}{\partial x} + A \gamma_0 \frac{\partial R^x R^y}{\partial y}, \quad (22) \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla(\rho v \vec{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho G \sin(kx) \cos(ky) + \mu \Delta v + A \gamma_0 \frac{\partial (R^y)^2}{\partial y} + A \gamma_0 \frac{\partial R^x R^y}{\partial x}, \\ \frac{\partial R^x}{\partial t} + u \frac{\partial R^x}{\partial x} + v \frac{\partial R^x}{\partial y} - R^x \frac{\partial u}{\partial x} - R^y \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_0 R^x &= C_d \Delta R^x, \\ \frac{\partial R^y}{\partial t} + u \frac{\partial R^y}{\partial x} + v \frac{\partial R^y}{\partial y} - R^x \frac{\partial v}{\partial x} - R^y \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma_0 R^y &= C_d \Delta R^y. \end{aligned}$$

Здесь и далее Δ — оператор Лапласа, параметр γ_0 характеризует время релаксации полимерной молекулы.

Для замыкания системы добавим закон сохранения энергии и уравнение состояния. Объемная плотность энергии E равна: $E = \rho |\vec{V}|^2 / 2 + \rho U$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{|\vec{V}|^2}{2} + \rho \frac{\partial v^k}{\partial t} v^k. \quad (23)$$

Из (9) определяем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_i}{\partial x^i}, \quad \rho \frac{\partial v_k}{\partial t} = -\rho v_i \frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x^i} v^k + \rho f_k.$$

Отсюда и из (23) следует представление для изменения объемной плотности кинетической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\rho v^k |\vec{V}|^2}{2} \right) + \frac{\partial \sigma_{ki} v^k}{\partial x^i} - \sigma_{ki} e_{ki} + \rho f_k v_k. \quad (24)$$

Изменение со временем объемной плотности внутренней энергии ρU равно:

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} = -U \frac{\partial \rho v_i}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \rho U v_i}{\partial x^i} + \rho v_i \frac{\partial U}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \rho U v_i}{\partial x^i} + \rho \frac{dU}{dt}. \quad (25)$$

Используя (10), можно записать (25) в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} = -\frac{\partial \rho U v_i}{\partial x^i} - \frac{\partial J_j^{(q)}}{\partial x^j} + \sigma_{ij} e_{ij}. \quad (26)$$

Соотношения (24), (26) позволяют представить изменение объемной плотности энергии E в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} + \rho U \right) = -\frac{\partial}{\partial x^i} v_i \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} + \rho U \right) + \frac{\partial \sigma_{ki} v^k}{\partial x^i} + \rho f_k v_k - \frac{\partial J_j^{(q)}}{\partial x^j}. \quad (27)$$

Подставим в (27) выражение для σ_{ki} из (19) при $d=2$ и воспользуемся условием слабой сжимаемости, что позволяет пренебречь вкладом, содержащим коэффициент, ζ и приводит к уравнению изменения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(\vec{V}(E + p)) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} + \rho U \right) + \nabla \left(\vec{V} \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} + \rho U + p \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A u \gamma_0 (R^x)^2 + v \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + A v \gamma_0 R^x R^y \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A u \gamma_0 R^x R^y + v \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A v \gamma_0 (R^y)^2 \right] - \\ &\quad - u \rho G \sin(ky) \cos(kx) + v \rho G \sin(kx) \cos(ky) - \frac{\partial J_j^{(q)}}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (28)$$

При $T=\text{const}$ представление для потока $J_j^{(q)}$ дается формулой (16), которая при учете (18), записывается в виде

$$J_j^{(q)} = -\frac{1}{T} A \gamma_0 R^i \Gamma_j^i.$$

Подставляя сюда (21), получим

$$J_j^{(q)} = -\frac{1}{T} A \gamma_0 C_d R^i \frac{\partial R^i}{\partial x^j} = -\frac{1}{2T} A \gamma_0 C_d \frac{\partial R^2}{\partial x^j}.$$

Окончательно уравнение (28) для энергии редуцируется к следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} + \rho U \right) + \nabla \left(\vec{V} \left(\frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} + \rho U + p \right) \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A u \gamma_0 (R^x)^2 + v \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + A v \gamma_0 R^x R^y \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A u \gamma_0 R^x R^y + v \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A v \gamma_0 (R^y)^2 \right] - \\ &\quad - u \rho G \sin(ky) \cos(kx) + v \rho G \sin(kx) \cos(ky) + \frac{1}{2T} A \gamma_0 C_d \Delta R^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Получим уравнение состояния. В отсутствии полимера для идеального газа $U = U_0$ и его давление $p_0 = \rho^2 \partial U_0 / \partial \rho = \rho U_0$. При наличии полимера внутренняя энергия дается формулой (18), тогда давление p (19) определяется соотношением

$$p = p_0 - \frac{A\gamma_0}{2} R^2 = \rho \left(U_0 - \frac{A\gamma_0}{2\rho} R^2 \right) = \rho \left(U - \frac{A\gamma_0}{\rho} R^2 \right). \quad (30)$$

4.6. Численная методика

Для численной аппроксимации системы (22) применялась комбинация двух численных методик: линеаризованного метода Годунова [74] и метода Курганова – Тедмора [67]. Линеаризованным методом Годунова аппроксимировалась гидродинамическая часть модели — система уравнений Навье – Стокса, а уравнения, описывающие полимерную компоненту течения, аппроксимировались методом Курганова – Тедмора. Подробное описание линеаризованной схемы Годунова представлено в работе [74]. Опишем аппроксимацию уравнений для вектора \vec{R} . Представим соответствующее уравнение в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}_x - \begin{pmatrix} C_d \frac{\partial R^x}{\partial x} \\ C_d \frac{\partial R^y}{\partial x} \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} C_d \frac{\partial R^x}{\partial y} \\ C_d \frac{\partial R^y}{\partial y} \end{pmatrix}_y = \\ = \begin{pmatrix} 2R^x \frac{\partial u}{\partial x} + R^y \frac{\partial u}{\partial y} + R^x \frac{\partial v}{\partial y} - \gamma_0 R^x \\ 2R^y \frac{\partial v}{\partial y} + R^y \frac{\partial u}{\partial x} + R^x \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_0 R^y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Суть методики Курганова – Тедмора состоит в вычислении конвективных потоков $\begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}$ на гранях расчетных ячеек, для аппроксимации остальных членов (диффузионных и источника) применяется обычное осреднение на гранях ячеек расчетной сетки. Обозначим конвективный поток вдоль осей $x, y : F = \begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}$, вектор-столбец неизвестных — $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix}$. Конвективные потоки тогда будут вычисляться следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \frac{F((\tilde{R}_{i+\frac{1}{2},j}^+)^n) + F((\tilde{R}_{i-\frac{1}{2},j}^-)^n)}{2} - \frac{(a_{i+\frac{1}{2},j}^x)^n}{2} \left((\tilde{R}_{i+\frac{1}{2},j}^+)^n - (\tilde{R}_{i-\frac{1}{2},j}^-)^n \right); \\ G_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{G((\tilde{R}_{i,j+\frac{1}{2}}^+)^n) + G((\tilde{R}_{i,j-\frac{1}{2}}^-)^n)}{2} - \frac{(a_{i,j+\frac{1}{2}}^y)^n}{2} \left((\tilde{R}_{i,j+\frac{1}{2}}^+)^n - (\tilde{R}_{i,j-\frac{1}{2}}^-)^n \right); \\ (\tilde{R}_{i+\frac{1}{2},j}^\pm)^n &= \tilde{R}_{i+1,j}^n \mp \frac{\Delta x}{2} (R^x)_{i+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2},j}^n; (\tilde{R}_{i,j+\frac{1}{2}}^\pm)^n = \tilde{R}_{i,j+1}^n \mp \frac{\Delta y}{2} (R^y)_{i,j+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}^n; \\ (a_{i+\frac{1}{2},j}^x)^n &= \max_{\pm} a^x(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = |u_{i+\frac{1}{2},j}|; \\ (a_{i,j+\frac{1}{2}}^y)^n &= \max_{\pm} a^y(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) = |v_{i,j+\frac{1}{2}}|; \\ u_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i+1,j}); v_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{i,j+1}); \end{aligned}$$

$$(R^x)_{i,j}^n = \text{minmod} \left(\theta \frac{(R^x)_{i,j}^n - (R^x)_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \frac{(R^x)_{i+1,j}^n - (R^x)_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \theta \frac{(R^x)_{i+1,j}^n - (R^x)_{i,j}^n}{\Delta x} \right);$$

$$(R^y)_{i,j}^n = \text{minmod} \left(\theta \frac{(R^y)_{i,j}^n - (R^y)_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \frac{(R^y)_{i,j+1}^n - (R^y)_{i,j-1}^n}{2\Delta y}, \theta \frac{(R^y)_{i,j+1}^n - (R^y)_{i,j}^n}{\Delta y} \right);$$

$$\theta = 1.5.$$

Здесь полуцелые индексы обозначают потоки на гранях ячеек, целые — значения величин в центре ячейки, $a = (a^x, a^y)$ — локальную скорость распространения возмущений, компоненты которой вычисляются как собственные числа якобианов $|\frac{\partial F}{\partial R} - a^x I| = 0, |\frac{\partial G}{\partial R} - a^y I| = 0, \frac{\partial F}{\partial R} = \begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{vmatrix}, \frac{\partial G}{\partial R} = \begin{vmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{vmatrix}$. Для ограничения наклонов реконструированного решения в ячейке использовался minmod ограничитель.

4.7. Постановка задачи

Рассматривается течение полимерного раствора под действием периодической внешней силы в квадратной расчетной области размером $2\pi \times 2\pi \text{м}^2$. На границах области задаются периодические граничные условия:

$$u|_{x=0} = u|_{x=L}, \quad v|_{x=0} = v|_{x=L}, \quad p|_{x=0} = p|_{x=L}, \quad \rho|_{x=0} = \rho|_{x=L};$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=L}, \quad v|_{y=0} = v|_{y=L}, \quad p|_{y=0} = p|_{y=L}, \quad \rho|_{y=0} = \rho|_{y=L}.$$

В начале расчетов раствор находится в состоянии покоя:

$$u(x, y, t = 0) = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v(x, y, t = 0) = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Величины плотности и давления в этот момент равны

$$\rho(x, y, t = 0) = 10 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad p(x, y, t = 0) = 10^3 \text{Па}.$$

Начальные значения компонент R^x, R^y даются формулами:

$$R^x(x, y, t = 0) = 0.2 \cos k_x x, \quad R^y(x, y, t = 0) = 0.2 \cos k_y y, \quad k_x = 1 \text{ м}^{-1}, \quad k_y = 1 \text{ м}^{-1}.$$

Коэффициент искусственной диффузии C_d подбирался эмпирически, исходя из требований устойчивого численного счета и соотношения $\sqrt{C_d/\gamma_0} \sim h$, где h — характерный размер ячейки вычислительной сетки. Интенсивность внешней силы принималась равной $G = 10^{-2} \text{Н/кг}$, коэффициент релаксации полимерной молекулы полагался $\gamma_0 = 10^{-6} \text{с}^{-1}$, соответственно $C_d = 10^{-9} \text{м}^2/\text{с}$. Величина динамической вязкости $\mu = 0.5 \text{Па с}$ и частота внешней периодической силы $k = 2 \text{м}^{-1}$. Величина параметра A , являющегося аналогом концентрации полимеров в растворе, варьировалась в пределах $A = 50 \div 5 \cdot 10^6$.

4.8. Результаты вычислительного эксперимента

На рис. 22 показаны поля завихренности течения в момент времени $t \sim 630 \text{с}$ для различных величин параметра A . Во всех приведенных случаях число Рейнольдса $Re \sim 10^{-1}$, число Вайсенберга $Wi \sim 10^3$. При увеличении параметра A течение

теряет свою устойчивость и становится хаотическим. На рис. 23 показаны поля скорости течения (степень насыщенности цветом характеризует амплитуду) и линии тока скорости. На рис. 24 и рис. 25 показаны поля завихренности течения и растяжения полимеров соответственно в момент времени $t \sim 428c$ для различных значений коэффициента релаксации полимерной молекулы γ_0 . Как и следует ожидать, уменьшение γ_0 приводит к тому что течение становится более неустойчивым.

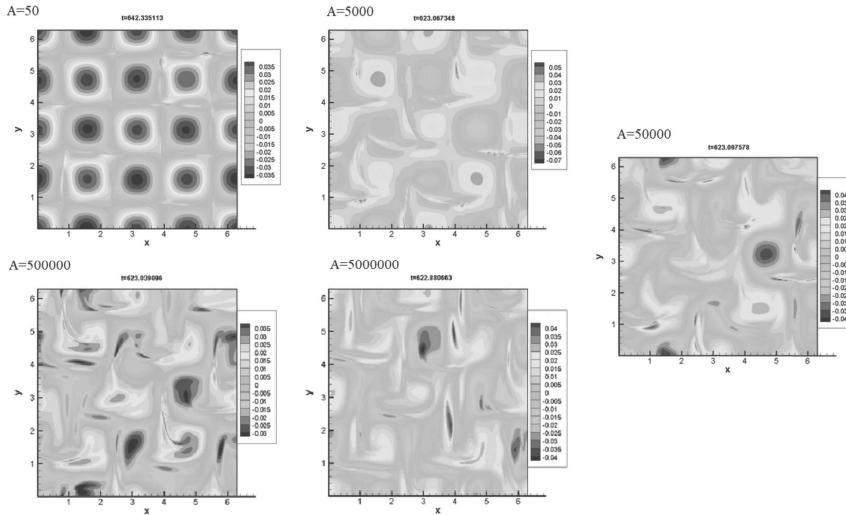


Рис. 22. Поля завихренности течения полимерного раствора для различных значений параметра A в момент времени $t \sim 630c$.

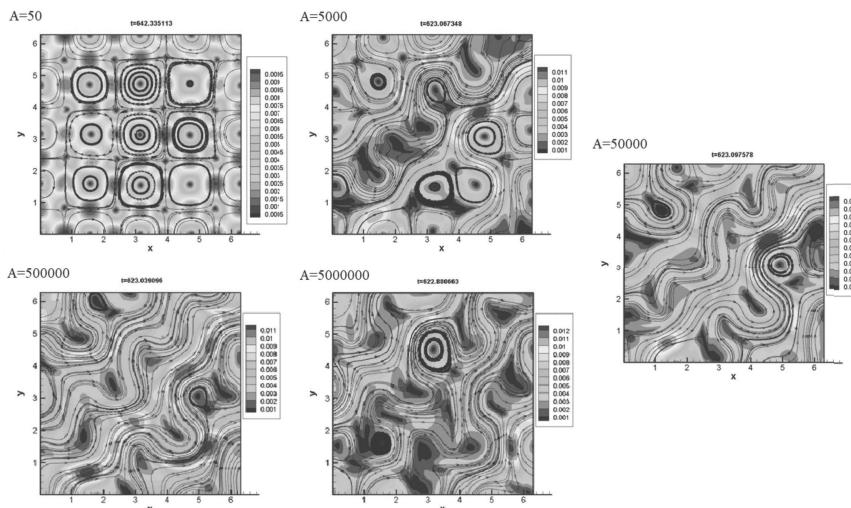


Рис. 23. Картинки скорости течения полимерного раствора с линиями тока для различных значений параметра A в момент времени $t \sim 630c$.

Течение, возникающее в результате воздействия постоянной внешней силы, представляет собой систему когерентных вихрей и называется «паркетом Колмогорова». Наибольший градиент параметров данного течения наблюдается в областях между

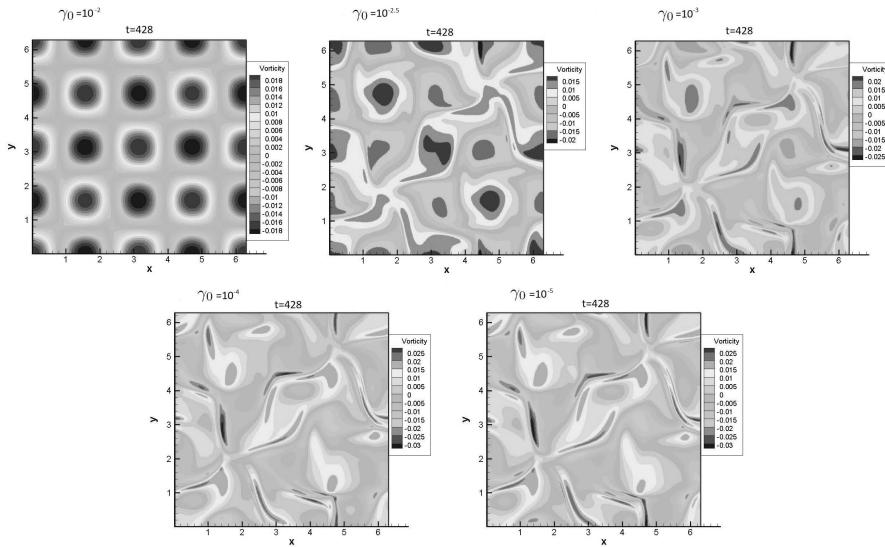


Рис. 24. Картинки завихренности течения в режиме эластической турбулентности в зависимости от коэффициента релаксации γ_0 при фиксированном значении коэффициента A в момент времени $t \sim 428c$.

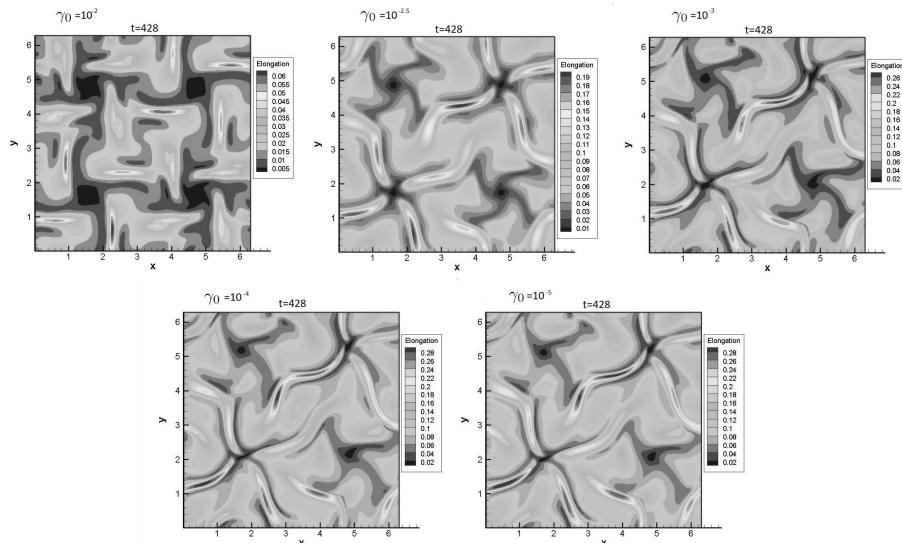


Рис. 25. Картинки растяжения полимерных молекул течения в режиме эластической турбулентности, в зависимости от коэффициента релаксации γ_0 при фиксированном значении коэффициента A в момент времени $t \sim 428c$.

соседними вихрями, которые имеют разное направление закрутки. Степень растяжения полимерных молекул здесь наибольшая. Влияние сильно растянутых полимеров на поток приводит к возникновению неустойчивостей и потере стабильности гидродинамического течения. Это позволяет локализовать участки расчетной области, где возникает эластическая неустойчивость.

На рис. 26 приведены спектры скорости $E_v(k)$ (слева) и растяжений полимерных молекул $E_R(k)$ (справа) полученного течения в момент времени $t \sim 630c$ для различных значений параметра γ_0 . Спектры вычислялись через Фурье-разложение векторных полей $\vec{f} = \vec{V}$ и $\vec{f} = \vec{R}$ [5]:

$$\begin{aligned}
 E(k_x, k_y, t) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^4 f_{i(j)}^2(k_x, k_y, t) + \\
 &+ 2 \sum_{i=0}^1 [f_{i(1)}(k_x, k_y, t) f_{i(2)}(k_x, k_y, t) + f_{i(3)}(k_x, k_y, t) f_{i(4)}(k_x, k_y, t)], \\
 f_{i(1)}(k_x, k_y, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(x, y, t) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \\
 f_{i(2)}(k_x, k_y, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(x, y, t) \cos(k_x x) \sin(k_y y) dx dy, \\
 f_{i(3)}(k_x, k_y, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(x, y, t) \sin(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \\
 f_{i(4)}(k_x, k_y, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(x, y, t) \sin(k_x x) \sin(k_y y) dx dy.
 \end{aligned}$$

Спектр $E(k, t)$ для соответствующего поля получается путем усреднения по углам

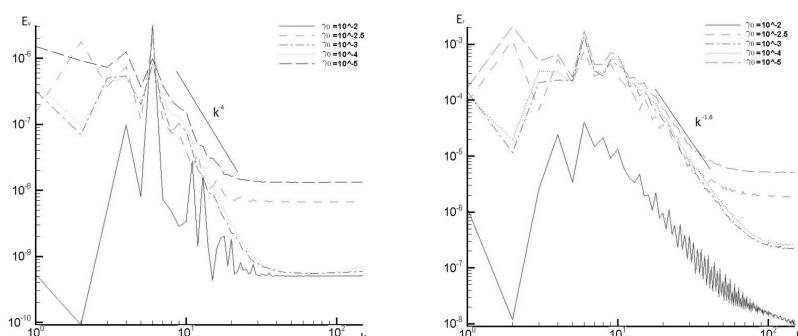


Рис. 26. Спектры скорости (а) и растяжения полимерных молекул (б) хаотических течений полимерного раствора для различных значений параметра γ_0 , построенные в логарифмическом масштабе по обеим осям.

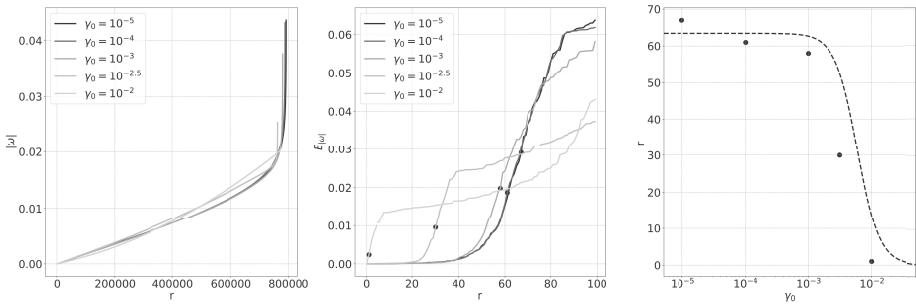


Рис. 27. Ранговые распределения завихренности эластической турбулентности. На графиках изображены величина (а), частота встречаемости (б), точка перегиба частоты (в), в зависимости от коэффициента релаксации γ_0 .

волнового вектора \mathbf{k} :

$$E(k, t) = \sum_{k_x, k_y: |k - \sqrt{k_x^2 + k_y^2}| < \delta} E(k_x, k_y, t), \delta = 0.5.$$

Рис. 26 показывает, что инерциальный поддиапазон формируется при $\gamma_0 \lesssim 10^{-3}$. В логарифмических координатах наклон энергетического спектра гидродинамического потока имеет показатель, равный ≈ -4 . Для каскада растяжений полимеров показатель составляет ≈ -1.6 .

Таким образом, полученные в результате численного моделирования течения полимерного раствора соответствуют хаотическому движению среды, возникающему при низких числах Рейнольдса и вызванному наличием полимерной примеси. Данный тип течения называется эластической (или полимерной) турбулентностью.

4.9. Ранговый анализ завихренности

Проведен ранговый анализ поля завихренности (рис. 27 (а)) для различных коэффициентов релаксации полимерной молекулы γ_0 при фиксированном значении коэффициента A . Большое значение данного коэффициента соответствует ламинарному режиму течения. В режиме эластической турбулентности на графике ранговых кривых для частоты встречаемости завихренности обнаружена точка перегиба (рис. 27(б, в)). Возникновение этой точки показывает наличие зависимости в поведении ранговых кривых от режима формирующегося течения. В случае ламинарного потока точка перегиба находится в области малых рангов. При турбулизации течения она смещается в сторону больших рангов. Данный факт соответствует результатам рангового анализа, проведенного для гидродинамической задачи колмогоровского типа из раздела 2, что показывает эффективность применения методики рангового анализа при рассмотрении турбулентных потоков.

Заключение

Численные эксперименты, представленные в данной работе, выполнены сотрудниками Отдела численных методов и турбулентности Института автоматизации и проектирования РАН под руководством доктора физико-математических наук Светланы Владимировны Фортовой. Изучение двумерной турбулентности проводили А. О. Посудневская (аспирантка МФТИ) и А. Н. Долуденко (к.ф.-м. наук, ОИВТ РАН), квазидвумерной турбулентности — А. Д. Ермаков (студент МФТИ), эластичной турбулентности — В. В. Денисенко (к.ф.-м. наук). Термодинамическое обоснование модели эластичной турбулентности выполнено академиком М. А. Гузевым (ИПМ ДВО РАН). Автор благодарен за активное и плодотворное обсуждение результатов численных экспериментов члену-корреспонденту РАН В. В. Лебедеву, члену-корреспонденту РАН И. В. Колоколову и д.ф.-м.н. В. В. Вергелесу (ИТФ РАН им. Ландау).

Список литературы

- [1] Richardson L. F., “The supply of energy from and to atmospheric eddies”, *Proc. Roy. Soc. London*, **97A**, (1920), 354–373.
- [2] Колмогоров А. Н., “Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса”, *Докл. АН СССР*, **30:4**, (1941), 299–303.
- [3] Обухов А. М., “О распределении энергии в спектре турбулентного потока”, *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.*, **5:4**, (1941), 453–466.
- [4] *Физтеховский прорыв — угол атаки: к 80-летию со дня рождения академика О. М. Белоцерковского*, Наука, М., 2006, 400 с.
- [5] Белоцерковский О. М., Фортова С. В., “Макропараметры пространственных течений в свободной сдвиговой турбулентности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50:6**, (2010), 1126–1139.
- [6] Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Чечеткин В. М., *Турбулентность: новые подходы*, Наука, М., 2002, 285 с.
- [7] Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Коньшин В. Н., “Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **27:4**, (1987), 594–609.
- [8] Kraichnan R. H., “Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence”, *Phys. Fluids*, **10**, (1967), 1417–1423.
- [9] Арнольд В. И., Мешалкин Л. Д., “Семинар А. Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958–1959)”, *УМН*, **15:1**, (1960), 247–250.
- [10] Бондаренко Н. Ф., Гак М. З., Должанский Ф. В., “Лабораторная и теоретическая модели плоского периодического течения”, *Изв. АН, ФАО*, **15 (10)**, (1979), 1017–1026.
- [11] Meshalkin, L., Sinai, I. G., “Investigation of the Stability of a Stationary Solution of a System of Equations for the Plane Movement of an Incompressible Viscous Liquid”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **25 (6)**, (1961), 1700–1705.
- [12] Sivashinsky G., Yakhot V. Negative viscosity effect in largescale flows, *Phys. Fluids*, **28 (4)**, (1985), 1040–1042.
- [13] Gotoh K., Yamada M., “The instability of rhombic cell flows”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **53:10**, (1984), 3395–3398.
- [14] Bormashenko E., Shoval S., *Negative-Viscosity Materials: Exploiting the Effect of Negative Mass Materials*, v. 18, 2025, 1199 pp.

- [15] Sommeria J., “Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box”, *Journal of Fluid Mechanics*, **170** (September 1986), 139–168.
- [16] Smith L. M., Yakhot V., “Finite-size effects in forced two-dimensional turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **274**, (1994), 115–138.
- [17] Borue V., “Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence”, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (10), (1994), 1475–1478.
- [18] Clercx H. J. H., Nielsen A. H., Torres D. J., Coutsias E.A., “Two-dimensional turbulence in square and circular domains with no-slip walls”, *Eur. J. Mech. B-Fluids*, **20**, (2001), 557–576.
- [19] Molenaar D., Clercx H. J. H., Heijst G. J. F. van, *Physica D*, **196**, (2004), 329–340.
- [20] Xia H., Shats M., Falkovich G., “Spectrally condensed turbulence in thin layers”, *Phys. Fluids*, **21**, (2009), 125101.
- [21] Francois N., Xia Y., Punzmann H., Ramsden S., Shats M., “Three-Dimensional Fluid Motion in Faraday Waves: Creation of Vorticity and Generation of Two-Dimensional Turbulence”, *Phys. Rev. X*, **4**, (2014), 021021.
- [22] Tsang Yue-Kin, William R. Young, “Forced-dissipative two-dimensional turbulence: a scaling regime controlled by drag”, *Physical Review E*, **79**, (2009), 045308(R).
- [23] Tsang Yue-Kin, “Non-universal velocity probability densities in forced two-dimensional turbulence: the effect of large-scale dissipation”, *Physics of Fluids*, **22**, (2010), 115102.
- [24] Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., Lebedev V., “Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, (2007), 084501.
- [25] Kolokolov I. V., Lebedev V. V., “Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box”, *Phys. Rev. E*, **93**, (2016), 033104.
- [26] Kolokolov I. V., Lebedev V. V., “Coherent vortex in two-dimensional turbulence: Interplay of viscosity and bottom friction”, *Phys. Rev. E*, **102**, (2020), 023108.
- [27] Mishra P. K., Herault J., Fauve S., Verma M. K., “Dynamics of reversals and condensates in two-dimensional Kolmogorov flows”, *Phys. Rev. E*, **91**, (2015), 053005.
- [28] Fylladitakis E. D., “Kolmogorov Flow: Seven Decades of History”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **6**, (2018), 2227–2263.
- [29] Doludenko A. N., Fortova S. V., Kolokolov I. V., Lebedev V. V., “Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence”, *Annals of Physics*, **447 part 2**, (2022), 169072.
- [30] Doludenko A. N., Fortova S. V., Kolokolov I. V., Lebedev V. V., “Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction”, *Physics of Fluids*, **33**, (2021), 011704.
- [31] Посудневская А. О., Фортова С. В., Долуденко А. Н., Колоколов И. В., Лебедев В. В., “Численное исследование переходных режимов течения Колмогорова в квадратной ячейке”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **64**:9, (2024), 1727–1736.
- [32] Pletcher R. H., Tannehill J. C., Anderson D. A., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 3rd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2013.
- [33] MacCormack R. W., “The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering”, *4th Aerodynamic Testing Conference, 28 April 1969 – 30 April 1969 (Cincinnati, OH)*, 1969, AIAA Paper.
- [34] Fock V., “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, *Z. Physik.*, **75**, (1932), 622–647.
- [35] Guzey M. A., Fortova S. V., Doludenko A. N., Posudnevskaya A. O., Ermakov A. D., “Maslov rank distributions for the analysis of two-dimensional and quasi-two-dimensional turbulent flows”, *Russian journal of mathematical physics*, **31**:3, (2024), 438–449.
- [36] Guzey M. A., Doludenko A. N., Ermakov A. D., Posudnevskaya A. O., Fortova S. V., “Direct numerical simulation and rank analysis of two-dimensional Kolmogorov-type vortex flows”,

- Supercomputing frontiers and innovations*, **12**:1, (2025), 43–59.
- [37] Auerbach F., “Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration”, *Petermanns geographische mitteilungen*, **59**, (1913), 74–76.
- [38] Lotka A. J., “The frequency distribution of scientific productivity”, *Journal of Architectural and Planning Research*, 1926.
- [39] Gleason H. A., “The significance of Raunkiaer’s law of frequency”, *Ecology*, **10**:4, (1929).
- [40] Gutenberg B., Richter C. F., “Frequency of earthquakes in California”, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **34**, (1944).
- [41] Zipf G. K., *Human Behavior And The Principle Of Least Effort*, Addison-Wesley Press, 1949.
- [42] Пузаченко Ю. Г., “Ранговые распределения в экологии и неэкстенсивная статистическая механика”, *Сборник трудов Зоологического музея МГУ им. М. В. Ломоносова*, **54**, (2016), 42–71.
- [43] Mandelbrot B., “Statistical Macro-Linguistics”, *Il Nuovo Cimento*, **13**, (1959), 518–520.
- [44] Lees R. B., “Logique, langage et theorie de l’information by Leo Apostel, Benoit Mandelbrot, and Albert Morf”, *Source: Language*, **35**, (1959), 271–303.
- [45] Колмогоров А. Н., “Три подхода к определению понятия “количество информации””, *Пробл. передачи информ.*, **1**:1, (1965), 3–11.
- [46] Маслов В. П., “Об одной общей теореме теории множеств, приводящей к распределению Гиббса, Бозе-Эйнштейна, Парето и закону Ципфа Мандельброта для фондового рынка”, *Мат. заметки*, **78**:6, (2005), 870–877.
- [47] Тумачев Д. Д., Филатов С. В., Вергелес С. С., Левченко А. А., “Два режима динамики когерентных столбовых вихрей во вращающейся жидкости”, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **118**:6, (2023), 430–437.
- [48] Campagne A., Gallet B., Moisy F., Cortet P.-P., “Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment”, *Phys. Rev. E*, **91**, (2015).
- [49] Levina G. V., Moiseev S. S., Rutkevich P. B., “Hydrodynamic Alpha-Effect in a Convective System”, *Non-Linear Instability, Chaos and Turbulence, Series Advances in Fluid Mechanics*, 2000, 110–161.
- [50] Yue-Kin Tsang, “Nonuniversal velocity probability densities in two-dimensional turbulence: The effect of large-scale dissipation”, *Phys. Fluids*, **22**, (2010), 115102.
- [51] Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., Lebedev V., “Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, (2007), 084501.
- [52] Steinberg V., “Elastic Turbulence: An Experimental View on Inertialess Random”, *Flow. Annu. Rev. Fluid Mech.*, **53**, (2021), 27–58.
- [53] Shahmardi A., Zade S., Ardekani M. N., Poole R. J., Lundell F., Rosti M. E., Brandt L., “Turbulent duct flow with polymers.”, *J. Fluid Mech.*, **859**, (2019), 1057–1083.
- [54] Belan S., Chernykh A., Lebedev V., “Boundary layer of elastic turbulence”, *J. Fluid Mech. yr 2018*, **855**, 910–921.
- [55] Zhang H. N., Li F. Ch., Cao Y., Tomoaki K., Yu B., “Direct numerical simulation of elastic turbulence and its mixing-enhancement effect in a straight channel flow”, *Chin. Phys. B*, **22**:2, (2013), 024703.
- [56] Groisman A., Steinberg V., “Stretching of polymers in a random three-dimensional flow”, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, (2001), 934–937.
- [57] Burghelea T., Segre E., Bar-Joseph I., Groisman A., Steinberg V., “Chaotic flow and efficient mixing in a microchannel with a polymer solution”, *Phys. Rev. E*, **69**, (2004), 066305.
- [58] Gan H. Y., Lam Y. C., Nguyen N-T., “Polymer-based device for efficient mixing of viscoelastic fluids”, *Appl. Phys. Lett.*, **88**, (2006), 224103.
- [59] Traore B., Castelain C., Burghelea T., “Efficient heat transfer in a regime of elastic turbu-

- lence”, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **223**:6, (2015).
- [60] Whalley R., Abed W. M., Dennis D. J. C., Poole R. J., “Enhancing heat transfer at the micro-scale using elastic turbulence”, *Theor. Appl. Mech. Lett.*, **5**:3, (2015), 103–106.
- [61] Abed W. M., Whalley R. D., Dennis D. J. C., Poole R. J., “Experimental investigation of the impact of elastic turbulence on heat transfer in a serpentine channel”, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **231**, (2016), 68–78.
- [62] Slutsky M., Steinberg V., “Effective mixing and emulsification of very viscous substances by elastic turbulence”, *In Report on the Horowitz Foundation Grant 3355*, Weizmann Inst. Sc., Rehovot, Israel, 2005.
- [63] Poole R. J., Budhiraja B., Cain A.R., Scott P.A., “Emulsification using elastic turbulence”, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **177–78**, (2012), 15–18.
- [64] Clarke A., Howe A. M., Mitchell J., Staniland J., Hawkes L., Leepera K., “Mechanism of anomalously increased oil displacement with aqueous viscoelastic polymer solutions”, *Soft Matter*, **11**, (2015), 3536–3541.
- [65] Howe A. M., Clarke A., Giernalczyk D., “Flow of concentrated viscoelastic polymer solutions in porous media: effect of M(W) and concentration on elastic turbulence onset in various geometries”, *Soft Matter*, **11**, (2015), 6419–6431.
- [66] Mitchell J., Lyons K., Howe A. M., Clarke A., “Viscoelastic polymer flows and elastic turbulence in three-dimensional porous structures”, *Soft Matter*, **12**, (2016), 460–468.
- [67] Kurganov A., Tadmor E., “New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations”, *Journal of Computational Physics*, **160**, (2000), 241–282.
- [68] Vaithianathan T., Robert A., Brasseur J. G., Collins L. R., “An improved algorithm for simulating three-dimensional, viscoelastic turbulence”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **140**, (2006), 3–22.
- [69] Vaithianathan T., Collins L. R., “Numerical approach to simulating turbulent flow of a viscoelastic polymer solution”, *J. Comput. Phys.*, **187**, (2003), 1–21.
- [70] Thomases B., Shelley M., Thiffeault J.-L., “A Stokesian viscoelastic flow: transition to oscillations and mixing”, *Phys. D: Nonlinear Phenomena*, **240**, (2011), 1602–1614.
- [71] Gupta A., Vincenzi D., “Effect of polymer-stress diffusion in the numerical simulation of elastic turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **870**, (2019), 405–418.
- [72] Alves M. A., Oliveira P. J., Pinho F. T., “Numerical methods for viscoelastic fluid flows”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **53**, (2021), 509–541.
- [73] Dubief Y., Terrapon V. E., White C. M., Shaqfeh E. S. G., Moin P., Lele S. K., “New answers on the interaction between polymers and vortices in turbulent flows”, *Flow Turbul. Combust.*, **74**, (2005), 311–329.
- [74] Годунов С. К., Денисенко В. В., Ключинский Д. В., Фортова С. В., Шепелев В. В., “Исследование энтропийных свойств линеаризованной редакции метода Годунова”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **60**:4, (2020), 639–651.
- [75] Денисенко В. В., Фортова С. В., Лебедев В. В., Колоколов И. В., “Численное моделирование обратного влияния полимерной примеси на колмогоровское течение”, *Компьютерные исследования и моделирование*, **16**:5, (2024), 1093–1105.
- [76] Денисенко В. В., Фортова С. В., “Численное моделирование эластической турбулентности в ограниченной двумерной ячейке”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **26**:1, (2023), 55–64.
- [77] Denisenko V. V., Fortova S. V., “Application of a two-dimensional version of the linearized godunov scheme to the numerical simulation of the kolmogorov problem for a liquid polymer solution”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **21**:2, (2024), B64-B77.
- [78] Oldroyd J. G., “On the formulation of rheological equations of state”, *Proc. Roy. Soc.*

- London Ser.*, **A200**, (1950), 523–541.
- [79] Новиков С. П., Тайманов И. А., *Современные геометрические структуры и поля*, 2-е изд., испр., МЦНМО, М., 2014, 584 с.
- [80] Gouin H., “Remarks on the Lie derivative in fluid mechanics”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mech*, **150**, (2023), 104347.
- [81] С. де Гроот, Мазур П., *Неравновесная термодинамика*, Мир, М., 1964.

Поступила в редакцию
1 сентября 2025 г.

Работа выполнена в рамках государственного
задания ИАП РАН № 124022400174-3.

Fortova S. V.¹ Numerical experiment in turbulence (on the 100th anniversary of Academician O. M. Belotserkovsky). Far Eastern Mathematical Journal. 2025. V. 25. No 2. P. 148–193.

¹ Institute for Computer Aided Design of RAS, Moscow, Russia; Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper presents the main results on numerical modeling of turbulent flows, carried out under the guidance of academician O.M. Belotserkovsky and continued by his students. For the problem of the shear layer of a liquid, the process of formation of spatial turbulence and a developed large-scale turbulent flow is analyzed. It is shown that large vortices play a leading role in the formation of the direct Kolmogorov energy cascade (Belotserkovsky's hypothesis).

When studying the modes of two-dimensional flow of a viscous, slightly compressible liquid under the action of an external periodic force in both coordinates, the modified Kolmogorov flow, various methods for analyzing hydrodynamic characteristics were used and tested. The implemented approaches make it possible to specify which of the flow modes: laminar, chaotic, and vortex — can be observed when selecting the bottom friction coefficient, amplitude, and pumping force. For the modified Kolmogorov flow, the development of the reverse energy cascade characteristic of vortex flows in two-dimensional turbulence is numerically demonstrated. The problem of the flow of an incompressible rotating fluid in a cube shows the formation of column vortices and the occurrence of both a direct cascade of energy, characteristic of three-dimensional turbulence, and the reverse, characteristic of flat flows. A model is proposed and numerical simulation of the elastic turbulence effect that occurs for small Reynolds numbers in the presence of a polymer impurity in the flow is performed.

Key words: *numerical modeling, turbulent flows, forward and reverse energy cascades, Kolmogorov problem, quasi-two-dimensional flows, shear flows, elastic turbulence.*