Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 2. С. 252–258

УДК 517.95
MSC2020 35J61, 35Q79

© А. А. Пищиков[1]

Разрешимость краевой задачи для модели сложного теплообмена с учётом переменной частоты излучения

Рассмотрена стационарная модель сложного теплообмена с учётом переменной частоты излучения. Найдены достаточные условия существования слабого решения поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: *стационарные модели диффузии-реакции, слабое решение, уравнения сложного теплообмена, нелокальная разрешимость*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202422

1. Введение. Постановка краевой задачи

Интерес к задачам сложного теплообмена [1] связан с их прикладным значением, и соответственно значительное внимание в работах, посвящённых исследованию данной модели, уделяется вопросам численного моделирования. В качестве примера можно привести работы [2–4], в которых рассматриваются модели с переменной частотой излучения. Так, [2] посвящена численным методам решения задачи оптимального управления, связанной с охлаждением стекла. В работах [3,4] рассматривается двухмерная нестационарная модель, для которой продемонстрированы методы численного решения на примере охлаждения и нагрева стеклянной пластины.

Помимо исследований в области численных методов стоит отметить работы, посвящённые теоретическому анализу подобных задач. В качестве примера можно привести [5–7], где рассматриваются вопросы существования, единственности и устойчивости слабого решения. Однако в указанных работах частота излучения считается постоянной.

В настоящей работе рассматривается стационарная трёхмерная модель сложного теплообмена с учётом переменной частоты излучения. При этом в качестве интервала изменения частоты выбирается конечный промежуток $(0,\ \nu_*)$, на котором энергия излучения оказывает существенное влияние на теплообмен. Это справедливо,

[1] ДВФУ, Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, 690922, Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10. Электронная почта: `pishchikov.aa@dvfu.ru`

например, для сред с преобладанием упругого рассеяния. В этом случае промежуток изменения частоты $(0,\ \nu_*)$, предопределенный, например, входящим в среду излучением, не увеличивается в результате многократного рассеяния в среде.

Основной результат работы связан с получением априорных оценок слабого решения, а также определением достаточных для существования слабого решения условий.

В ограниченной липшицевой области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с границей Γ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}\big(a(x)\nabla\theta(x)\big)+b(x)\Big(h\big(\theta(x)\big)-\widehat{\varphi}(x)\Big)=0,\\
&-\alpha(\nu)\operatorname{div}\big(\nabla_x\varphi(x,\nu)\big)+\kappa_a(\nu)\Big(\varphi(x,\nu)-B\big(\theta(x),\nu\big)\Big)=0;
\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&a(x)\partial_n\theta(x)+c(x)\big(\theta(x)-\theta_b(x)\big)\Big|_\Gamma=0,\\
&\alpha(\nu)\partial_n\varphi(x,\nu)+\beta(x,\nu)\Big(\varphi(x,\nu)-B\big(\theta_b(x),\nu\big)\Big)\Big|_\Gamma=0.
\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $\theta(x)$ — нормализованная температура, $\varphi(x,\nu)$ — нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям, $\nu\in(0,\ \nu_*)$ — частота излучения,

$$a(x)=\frac{k}{\rho c_p},\quad b(x)=\frac{4\sigma n^2T_{\max}^3}{\rho c_p},\quad \alpha(\nu)=\frac{1}{3\kappa-A\kappa_s},$$
$$c(x)=\frac{h}{\rho c_p},\quad \theta_b(x)=\frac{T_b}{T_{\max}},\quad \beta(x,\nu)=\frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)},$$

$k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $\rho(x)$ — плотность, $c_p(x)$ — удельная теплоёмкость, σ — постоянная Стефана – Больцмана, n — показатель преломления, $T_{\max}$ — максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa(\nu)=\kappa_a+\kappa_s$ — коэффициент полного взаимодействия, $\kappa_a(\nu)$ — коэффициент поглощения, $\kappa_s(\nu)$ — коэффициент рассеяния, $A\in[-1,\ 1]$ — коэффициент анизотропии рассеяния, $h(x)$ — коэффициент теплоотдачи, $T_b(x)$ — температура границы области в ненормализованной модели, $\varepsilon(x,\nu)$ — коэффициент излучения границы области,

$$B(\theta,\nu)=\frac{c_1\nu^3}{e^{\frac{c_2\nu}{\theta}}-1}\ \text{– функция Планка},$$
$$h(\theta)=\int\limits_0^{\nu_*}\kappa_a(\nu)B(\theta,\nu)\,d\nu,\quad \widehat{\varphi}(x)=\int\limits_0^{\nu_*}\kappa_a(\nu)\varphi(x,\nu)\,d\nu,$$
$$c_1=\frac{2\pi h_Pn^2}{c_e^2},\quad c_2=\frac{h_P}{k_B},$$

h_P — постоянная Планка, c_e — скорость света в среде, k_B — постоянная Больцмана.

Далее в работе будут использоваться следующие свойства функции Планка.

Свойство 1. [8, §33] *Функция* $B(\theta,\nu)$ *монотонно возрастает по* θ *при* $\nu>0$.

Свойство 2. [1, §14.1] *Для функции* $B(\theta,\nu)$ *справедливо равенство*

$$\int_0^{+\infty} B(\theta,\nu)\,d\nu = \tilde{c}\theta^4, \quad \tilde{c} = \text{const} > 0.$$

Будем считать функцию $B(\theta,\nu)$ доопределённой при $\theta\leqslant 0$ так, что для $\theta<0$ выполняется $B(\theta,\nu)=-B\big(|\theta|,\nu\big)$, и $B(\theta,\nu)=0$ при $\theta=0$.

Работа имеет следующую структуру: во втором параграфе приводится формализация краевой задачи (1), (2), дается определение слабого решения. Затем в третьем параграфе выводятся априорные оценки. В четвёртом параграфе рассматривается вопрос разрешимости рассматриваемой задачи.

2. Формализация задачи

Через L^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$ обозначим пространство Лебега, а через H^s — пространство Соболева W_2^s, $V=H^1(\Omega)$, $V_\nu=L^\infty\big(0,\ \nu_*;\ V\big)$, через $(\cdot,\cdot)$ обозначим скалярное произведение в $L^2(\Omega)$

$$(f,\mathrm{g}) = \int_\Omega f\mathrm{g}\,dx.$$

Пусть исходные данные задачи (1), (2) удовлетворяют условиям

(i) $a,\ b\in L^\infty(\Omega)$, $a\geqslant a_0$, $b\geqslant b_0$; $c,\ \theta_b\in L^\infty(\Gamma)$, $\beta\in L^\infty\big(\Gamma\times(0,\ \nu_*)\big)$, $c\geqslant c_0$, $\beta\geqslant\beta_0$, $0\leqslant\theta_b\leqslant M_1$; $\alpha,\ \kappa_a\in L^\infty(0,\ \nu_*)$, $\alpha\geqslant\alpha_0$, $k_0\leqslant\kappa_a\leqslant k_1$; $c_1>0$, $c_2>0$.

Здесь $a_0,\ b_0,\ c_0,\ \alpha_0,\ \beta_0,\ k_0,\ k_1=\text{const}>0$, $M_1=\|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$.

В дальнейшем предполагаем выполнение указанных условий (i). Сформулируем понятие слабого решения краевой задачи.

Определение. Пара $\{\theta,\varphi\}\in V\times V_\nu$ называется слабым решением задачи (1), если

$$\begin{aligned}
&(a\nabla\theta,\nabla u) + \int_\Gamma c(\theta-\theta_b)u\,d\Gamma + \Big(b\big(h(\theta)-\widehat{\varphi}\big),u\Big) = 0 \quad \forall u\in V,\\
&(\alpha\nabla\varphi,\nabla v) + \int_\Gamma \beta\big(\varphi - B(\theta_b,\nu)\big)v\,d\Gamma + \kappa_a\,(\varphi,v) = \kappa_a\big(B(\theta,\nu),v\big) \quad \forall v\in V_\nu,
\end{aligned} \tag{3}$$

причём второе равенство выполняется почти всюду для $\nu\in(0,\ \nu_*)$.

Уравнения (3) выводятся стандартным образом, путём умножения (1) на тестовые функции $u\in V$, $v\in V_\nu$ и интегрирования по частям в Ω с учётом краевых условий (2).

3. Вывод априорных оценок в L^∞

Получим априорные оценки слабого решения в пространствах $L^\infty(\Omega)$ и $L^\infty\big(\Omega\times(0,\ \nu_*)\big)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i). Тогда слабое решение $\{\theta,\varphi\}\in V\times V_\nu$ задачи* (1), (2) *удовлетворяет априорным оценкам*

$$0\leqslant\theta\leqslant M_1,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant M_2(\nu),$$

где $M_2=B(M_1,\nu)$.

Доказательство. Сначала получим оценки снизу. Пусть в (3) во втором уравнении $v=\min\{\varphi,0\}\leqslant 0$. Тогда получим

$$(\alpha\nabla v,\nabla v)+\int\limits_{\Gamma,\ \varphi<0}\beta\big(\varphi-B(\theta_b,\nu)\big)\varphi\,d\Gamma+\kappa_a\,(v,v)-\kappa_a\big(B(\theta,\nu),v\big)=0.$$

В данном выражении в силу условий (i) и монотонности функции Планка по θ все слагаемые неотрицательны, а их сумма равна нулю, что говорит о том, что $v=0$ и $\varphi\geqslant 0$. Таким же образом, подставляя $u=\min\{\theta,0\}\leqslant 0$, в первом уравнении (3) получим

$$(a\nabla u,\nabla u)+\int\limits_{\Gamma,\ \theta<0}c(\theta-\theta_b)\theta\,d\Gamma+\int\limits_{\Omega,\ \theta<0}b\big(h(\theta)-\widehat{\varphi}\big)\theta\,dx=0.$$

Аналогично выводу оценки для φ, с учётом (i), свойств функции Планка и доказанного ранее неравенства $\varphi\geqslant 0$ получаем, что $\theta\geqslant 0$.

Теперь получим оценки сверху. Положив $v=\max\{\varphi-M_2,0\}\geqslant 0$ во втором уравнении (3), получим

$$(\alpha\nabla v,\nabla v)+\int\limits_{\Gamma,\ \varphi>M_2}\beta\big(\varphi-B(\theta_b,\nu)\big)(\varphi-M_2)\,d\Gamma+\kappa_a\int\limits_{\Omega,\ \varphi>M_2}\big(\varphi-B(\theta,\nu)\big)(\varphi-M_2)\,dx=0.$$

В силу неотрицательности всех слагаемых и равенства их суммы нулю получаем, что $v=\max\{\varphi-M_2,0\}=0$. Отсюда следует оценка $\varphi\leqslant M_2$.

Также получим оценку для θ. Полагая $u=\max\{\theta-M_1,0\}\geqslant 0$, получим

$$(a\nabla u,\nabla u)+\int\limits_{\Gamma,\ \theta>M_1}c(\theta-\theta_b)(\theta-M_1)\,d\Gamma+\int\limits_{\Omega,\ \theta>M_1}b\big(h(\theta)-\widehat{\varphi}\big)(\theta-M_1)\,dx=0.$$

Учитывая доказанные ранее оценки для φ, получаем, что все слагаемые неотрицательны, а их сумма равна нулю, откуда следует оценка $\theta\leqslant M_1$. □

4. Теорема существования

Для доказательства существования решения воспользуемся методом простой итерации [6]. Определим нелинейные операторы

$$F_1: L^\infty(\Omega)\to L^\infty\big(\Omega\times(0,\ \nu_*)\big)\cap V_\nu,\quad F_2: L^\infty\big(\Omega\times(0,\ \nu_*)\big)\to L^\infty(\Omega)\cap V$$

таким образом, что $F_1(\theta)=\varphi$, если

$$(\alpha\nabla\varphi,\nabla v)+\int\limits_\Gamma\beta\big(\varphi-B(\theta_b,\nu)\big)v\,d\Gamma+\kappa_a\,(\varphi,v)=\kappa_a\big(B(\theta,\nu),v\big)\quad\forall v\in V_\nu,\qquad(4)$$

и, соответственно, $F_2(\varphi)=\theta$, если

$$(a\nabla\theta,\nabla u)+\int\limits_\Gamma c(\theta-\theta_b)u\,d\Gamma+\Big(b\big(h(\theta)-\widehat{\varphi}\big),u\Big)=0\quad\forall u\in V. \tag{5}$$

Однозначная разрешимость линейной эллиптической задачи (4) хорошо известна. Существование и единственность решения эллиптической задачи (5) с монотонной нелинейностью следует из классических результатов для монотонных операторов [9, гл. 2, теорема 2.1].

Отметим, что если θ, φ — слабое решение задачи (1), (2), то

$$\theta=F_2\big(F_1(\theta)\big),\qquad \varphi=F_1\big(F_2(\varphi)\big).$$

Рассмотрим для данных операторов некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.

$$0\leqslant F_1(\theta)\leqslant M_2 \text{ п.в. в } \Omega\times(0,\ \nu_*), \text{ если } 0\leqslant\theta\leqslant M_1 \text{ п.в. в } \Omega;$$
$$0\leqslant F_2(\varphi)\leqslant M_1 \text{ п.в. в } \Omega, \text{ если } 0\leqslant\varphi\leqslant M_2 \text{ п.в. в } \Omega\times(0,\ \nu_*).$$

Доказательство. Указанные неравенства выводятся аналогично получению оценок в теореме 1. Достаточно выбрать в (4), (5) в качестве тестовых функций $v=\min\{F_1(\theta),0\}$, $u=\min\{F_2(\varphi),0\}$ для оценок снизу и $v=\max\{F_1(\theta)-M_2,0\}$, $u=\max\{F_2(\varphi)-M_1,0\}$ для оценок сверху.

□

Лемма 2. *Пусть $\theta_1\leqslant\theta_2$, $\varphi_1\leqslant\varphi_2$ почти всюду в Ω и $\Omega\times(0,\ \nu_*)$. Тогда $F_1(\theta_1)\leqslant F_1(\theta_2)$, $F_2(\varphi_1)\leqslant F_2(\varphi_2)$ почти всюду в $\Omega\times(0,\ \nu_*)$ и Ω.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{1,2}=F_1(\theta_{1,2})$. Обозначим $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$, поочерёдно подставим φ_1 и φ_2 в (4) и вычтем равенства

$$(\alpha\nabla\varphi,\nabla v)+\int\limits_\Gamma\beta\varphi v\,d\Gamma+\kappa_a\,(\varphi,v)=\kappa_a\big(B(\theta_1,\nu)-B(\theta_2,\nu),v\big).$$

Теперь в качестве тестовой функции выберем $v=\max\{\varphi,0\}\geqslant 0$ и подставим в полученное равенство. Тогда

$$(\alpha\nabla v,\nabla v)+\int\limits_\Gamma\beta v^2\,d\Gamma+\kappa_a\,(v,v)-\kappa_a\big(B(\theta_1,\nu)-B(\theta_2,\nu),v\big)=0.$$

В силу неотрицательности каждого слагаемого, получаем, что $v=0$. Тогда $\varphi\leqslant 0$ и $F_2(\theta_1)\leqslant F_2(\theta_2)$.

Аналогично докажем для θ. Пусть $\theta_{1,2}=F_2(\varphi_{1,2})$. Обозначая $\theta=\theta_1-\theta_2$ и подставляя θ_1, θ_2 в (5), получим

$$(a\nabla\theta,\nabla u)+\int\limits_\Gamma c\theta u\,d\Gamma+\Big(b\big(h(\theta_1)-h(\theta_2)\big),u\Big)=\big(b(\widehat{\varphi}_1-\widehat{\varphi}_2),u\big).$$

Подставляя $u = \max\{\theta, 0\} \geqslant 0$, получим

$$(a\nabla u, \nabla u) + \int\limits_{\Gamma} cu^2\, d\Gamma + \Big(b\big(h(\theta_1) - h(\theta_2)\big), u\Big) - \big(b(\widehat{\varphi}_1 - \widehat{\varphi}_2), u\big) = 0.$$

В данном выражении каждое слагаемое неотрицательно, а их сумма равна нулю. Отдельно стоит отметить, что неотрицательность третьего слагаемого следует из того, что, в силу монотонности функции Планка, $\operatorname{sign}\big(h(\theta_1) - h(\theta_2)\big) = \operatorname{sign}(\theta_1 - \theta_2)$. В результате получаем, что $u = 0$. Отсюда получим $\theta \leqslant 0$ и $F_1(\varphi_1) \leqslant F_1(\varphi_2)$.

□

Теперь определим следующие функциональные последовательности

$$\theta_0 = 0, \quad \varphi_k = F_1(\theta_k), \quad \theta_{k+1} = F_2(\varphi_k).$$

Лемма 3. *Последовательности $\theta_k,\ \varphi_k$ монотонны и ограниченны:*

$$0 \leqslant \theta_k \leqslant \theta_{k+1} \leqslant M_1 \text{ п.в. в } \Omega,$$
$$0 \leqslant \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} \leqslant M_2 \text{ п.в. в } \Omega \times (0,\ \nu_*).$$

Доказательство. В силу леммы 2 и неравенства $\theta_0 \leqslant \theta_1$, получаем, что $\theta_1 = F_2\big(F_1(\theta_0)\big) \leqslant F_2\big(F_1(\theta_1)\big) = \theta_2$. Продолжая рассуждения, получаем, что $\theta_k \leqslant \theta_{k+1}$. Аналогично, $\varphi_0 = F_1(\theta_0) \leqslant F_1(\theta_1) = \varphi_1$, и далее $\varphi_k \leqslant \varphi_{k+1}$.

Ограниченность данных последовательностей покажем похожим образом. Поскольку $\theta_0 = 0 \leqslant M_1$, то по лемме 1 получаем, что $0 \leqslant \varphi_0 = F_1(\theta_0) \leqslant M_2$. Затем аналогично $0 \leqslant \theta_1 = F_2(\varphi_0) \leqslant M_1$ и далее $0 \leqslant \varphi_k = F_1(\theta_k) \leqslant M_2$ и $0 \leqslant \theta_{k+1} = F_2(\varphi_k) \leqslant M_1$.

□

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i). Тогда существует слабое решение задачи* (1), (2).

Доказательство. Поскольку функциональные последовательности θ_k, φ_k монотонны и ограниченны, то из теоремы Леви следует, что существуют функции θ_*, φ_* такие, что

$$\theta_k \to \theta_*,\ \varphi_k \to \varphi_* \text{ п.в. в } \Omega \text{ и } \Omega \times (0,\ \nu_*).$$

Из определений операторов F_1 и F_2 следует, что $\theta_k,\ \varphi_k$ удовлетворяют равенствам

$$(a\nabla\theta_k, \nabla u) + \int\limits_{\Gamma} c(\theta_k - \theta_b)u\, d\Gamma + \Big(b\big(h(\theta_k) - \widehat{\varphi}_k\big), u\Big) = 0 \quad \forall u \in V,$$

$$(\alpha\nabla\varphi_k, \nabla v) + \int\limits_{\Gamma} \beta\big(\varphi_k - B(\theta_b, \nu)\big)v\, d\Gamma + \kappa_a\,(\varphi_k, v) = \kappa_a\big(B(\theta_k, \nu), v\big) \quad \forall v \in V_\nu.$$

Сходимость $\theta_k,\ \varphi_k$ даёт возможность совершить предельный переход в этих уравнениях. При этом стоит отметить, что для функции $h(\theta)$, в силу свойства 2 функции Планка, справедлива оценка $h(\theta) \leqslant k_1\tilde{c}\theta^4$. Таким образом получаем, что $\theta_*,\ \varphi_*$ — слабое решение задачи (1), (2). □

Список литературы

[1] Modest M. F., *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2013.

[2] Clever D., Lang J., “Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient”, *Optimal Control Applications and Methods*, **33**:2, (2012), 157–175.

[3] Lang J., “Adaptive computation for boundary control of radiative heat transfer in glass”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **183**:2, (2005), 312–326.

[4] Paquet L., El Cheikh R., Lochegnies D., Siedow N., “Radiative Heating of a Glass Plate”, *MathematicS in Action*, **5**:1, (2012), 1–30.

[5] Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю., “Стационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:4, (2014), 191–199.

[6] Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю., “Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:5, (2016), 816–823.

[7] Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., “Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer”, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6, (2017), 2511–2519.

[8] Зисман Г. А., Тодес О. М., *Курс общей физики*, т. III, Наука, М., 1970.

[9] Лионс Ж.-Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию
4 октября 2024 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00087.

Pishchikov A. A.[1] Solvability of frequency-dependent model of the complex heat transfer. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 2. P. 252–258.

[1] Far Eastern Federal University, Far Eastern Center for Research and Education in Mathematics, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

A stationary frequency-dependent model of the complex heat transfer is considered. Sufficient conditions for the existence of a weak solution to the posed boundary value problem are found.

Key words: *stationary diffusion-reaction models, weak solution, radiative heat transfer equations, non-local solvability.*