УДК 517.93, 517.937
MSC2020 34H05 + 49J15 + 93C15

© $\boxed{\text{А. В. Лакеев}}$[1], Ю. Э. Линке[2], В. А. Русанов[1]

К геометрической теории реализации нелинейных управляемых динамических процессов в классе билинейных моделей второго порядка

На базе геометрических конструкций тензорного произведения гильбертовых пространств строятся теоретико-системные основания для аналитического изучения необходимых и достаточных условий существования нелинейной дифференциальной реализации непрерывной бесконечномерной динамической системы (представленной пучком любой мощности управляемых траекторий) в классе билинейных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве. Билинейная восьмивариантная структура дифференциальных уравнений состояния исследуемой бесконечномерной динамической системы моделирует комбинированную нелинейность как от самой траектории, так и от скорости движения на этой траектории. В рамках геометрического решения данной задачи аналитически обосновываются тополого-метрические условия непрерывности проективизации нелинейного функционального оператора Релея – Ритца с вычислением фундаментальной группы его образа. Полученные результаты имеют потенциал для развития геометрической теории нелинейного анализа коэффициентно-операторных обратных задач неавтономных дифференциальных моделей полилинейных управляемых динамических систем высших порядков.

Ключевые слова: *обратные задачи нелинейного системного анализа, тензорный анализ в гильбертовых пространствах, функциональный оператор Релея – Ритца, билинейная неавтономная дифференциальная реализация второго порядка.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202419

[1] Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.
[2] Пенсионер, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 295-А, 17.
Электронная почта: lakeyev@icc.ru ($\boxed{\text{А. В. Лакеев}}$), linkeyurij@gmail.com (Ю. Э. Линке), v.rusanov@mail.ru (В. А. Русанов).

Главная моя работа касается новой трактовки известных законов природы — выражения этих законов с помощью других основных понятий, — благодаря чему экспериментальные данные о взаимодействии между теплотой, светом, магнетизмом и электричеством можно будет использовать для исследования взаимосвязи между этими явлениями.

Б. Риман [Труды, с. 507; см. также Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX веке. М: Наука, 1989, с. 275.]

1. Мотивации, терминология и формулировка задачи

1.1. Введение

Математическая теория абстрактной реализации динамических систем [1, сс. 21, 286] добилась в своем аналитическом развитии решающих результатов и сделала ряд теоретико-системных открытий, тем самым ускорив становление математических задач идентификации [1, с. 64] дифференциальных эволюционных уравнений [2] на стыке обратных задач нелинейного системного анализа[1] и методов теории дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах [3], по существу попутно развивая теорию аналитических представлений производящих отображений [3, с. 266] эволюционных (двупараметрических на интервале времени) семейств операторов, индуцированных квазилинейными дифференциальными уравнениями. При этом в тополого-алгебраическом анализе непрерывных бихевиористических систем до какого-то момента механический перенос результатов качественной теории реализации конечномерных динамических процессов на бесконечномерный случай проходил без особых геометрических осложнений. Этот анализ относился как к стационарным, так и к нестационарным, как к линейным, так и к нелинейным дифференциальным моделям *первого порядка* (параболическим уравнениям и системам диффузионного типа) в пространствах Гёльдера [4] или в сепарабельных гильбертовых пространствах, у которых полные ортогональные системы [5, 6], как известно, являются базисом[2], что активно использовалось, например, в работах [7, 8].

---

[1]В связи с тем, что для обратных задач нет единого строгого определения [16, 32], то для рассматриваемой ниже обратной задачи системного анализа можно сформулировать следующую компактную универсальную форму: пусть $\mathcal{F}$ — некоторый фиксированный класс операторов (в нашем положении — дифференциальных моделей), действующих из функционального пространства X в функциональное пространство Y, и пусть задано семейство $\{x_\gamma, y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в произведении $X\times Y$, где индексированное множество Γ может иметь как конечную, так и счетную и даже континуальную мощность. Нужно найти условия (желательно необходимые и достаточные) существования некоторого оператора $F\in\mathcal{F}$, такого, что $Fx_\gamma = y_\gamma$ для всех $\gamma\in\Gamma$.

[2]Последовательность $\{x_n\}$ банахова пространства X является базисом в X, если каждый элемент $x\in X$ *однозначно* раскладывается в ряд $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$, сходящийся по норме пространства X; существуют [6, с. 514] сепарабельные рефлексивные банаховы пространства без свойства аппроксимации (когда любой компактный оператор есть предел конечномерных операторов), а следовательно, и без базиса.

Аналитическая сложность возникает при переходе к представлению нелинейной дифференциальной реализации с динамическим порядком *выше первого* [9], при моделировании уравнений которой нельзя обойти влияние нелинейности от её производных, в том числе для гиперболических систем [10, 11]. В таком контексте важную роль играет учет *полилинейной* структуры некоторых членов модели реализации [12], на чем и акцентируется основное внимание в нашей статье; билинейность многих из наиболее важных дифференциальных систем второго порядка, встречающихся в математической физике, — непреложный факт. При этом покажем, что, перекидывая аналитический мост между проективной геометрией и дифференциальной реализацией конечных пучков моделируемых бесконечномерных динамических процессов, конструкцию проективизации нелинейного оператора Релея – Ритца [7, 8] и функционально-геометрический анализ условий его непрерывности (с вычислением фундаментальной группы его образа) удобно формулировать на языке компактных топологических n-многообразий тензорных произведений гильбертовых пространств в терминах CW-комплексов Уайтхеда [13, с. 136]; постановка означенной задачи обозначена в выводах [8, 12] и развивает геометрические результаты [14].

Далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (нормы удовлетворяют *условию параллелограмма* [15, с. 47]), $L(Y,X)$ — банахово пространство (с операторной нормой) линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Y в X (аналогично $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов для двух банаховых пространств $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$), $\mathcal{L}(X^2, X)$ — пространство всех непрерывных билинейных отображений из $X \times X$ в X; ниже активно используем линейную изометрию [6, с. 650] пространств $\mathcal{L}(X^2, X)$ и $L(X, L(X,X))$.

Обозначим через T отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ, через $\mathfrak{S}_\mu$ — σ-алгебру μ-измеримых подмножеств из T. Сверх того примем, что $AC^1(T,X)$ — множество всех функций $\varphi\colon T \to X$, первая производная которых является абсолютно-непрерывной на T функцией (относительно меры μ). Если $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — некоторое банахово пространство, то через $\mathrm{L}_p(T, \mathcal{B}), p \in [1, \infty)$ будем обозначать банахово пространство классов μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру отображений $f\colon T \to \mathcal{B}$ с нормой $\left(\int_T \|f(\tau)\|^p \mu(d\tau)\right)^{1/p} < \infty$, соответственно через $\mathrm{L}_\infty(T, \mathcal{B})$ — банахово пространство таких классов с нормой $\operatorname{ess\,sup}_T \|f\| < \infty$. В означенном контексте условимся, что

$$
\begin{gathered}
\mathbb{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(X,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(X,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Y,X)) \times \\
\times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2,X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2,X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2,X)), \\
\mathbb{L}^* := L(X,X) \times L(X,X) \times L(Y,X) \times \mathcal{L}(X^2,X) \times \mathcal{L}(X^2,X) \times \mathcal{L}(X^2,X).
\end{gathered}
$$

Отталкиваясь от первичного понятия динамической системы, определенной на её входном и выходном объектах (определение (1.8) [1, с. 20]), для формализации задачи математического моделирования динамической системы считаем, что на временном интервале T фиксировано (возможно *a posteriori*) некоторое поведение [16] исследуемой бихевиористической системы в виде нелинейного пучка[3] N управляемых динамических процессов типа *вход-выход*, т. е. формально:

$$N \subset \{(x,u) : x \in AC^1(T,X), u \in \mathrm{L}_2(T,Y)\}, \quad \mathrm{Card}\, N \leqslant \exp \aleph_0,$$

где (x,u) — пара (траектория, программное управление), $\aleph_0$ — алеф нуль, $\exp\aleph_0$ — континуум ($\mathrm{Card}\, N \leqslant \exp\aleph_0$, означает, что мощность пучка N не более чем континуум). Сверх того, пусть задан не обнуляющийся на T инерционно-массовый показатель движения бихевиористической N-системы в виде оператор-функции

$$\widehat{A} \in \mathrm{L}_\infty(T, L(X,X)), \quad \mu\{t \in T \colon \widehat{A}(t) = 0 \in L(X,X)\} = 0$$

при второй производной от траектории $t \mapsto x(t)$ в модели дифференциальной реализации пучка N, при этом нарушение условия $\mu\{t \in T \colon \mathrm{Ker}\widehat{A}(t) \neq \{0\} \subset X\} = 0$, выражающего *эквивалентность нормальной системе,* необременительно (см. замечание 1); здесь и далее символ 0 — нулевой элемент соответствующего нефункционального пространства.

Так как во многих задачах нелинейной реализации дифференциального представления моделируемых динамических процессов необходимо учитывать нелинейность как от самой траектории [16, 17], так и от скорости движения на этой траектории (см. пример 1 [18]), то ниже основное внимание будет сосредоточено на исследовании существования или несуществования модели дифференциальной реализации уравнений моделируемой динамики, зависящей от трех нестационарных билинейных структур, когда одна из них задана на самой траектории, второй билинейный оператор зависит от траектории и скорости движения по ней, и третий билинейный оператор зависит только от скорости движения по этой траектории. Ниже индикатором целенаправленных комбинаций данных билинейных операторов будут служить точки множества

$$I_3 := \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \subset R \times R \times R, \quad \mathrm{Card}\, I_3 = 2^3.$$

1.2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу: для пары $(N, \widehat{A})$ и тройки $q := (b_1, b_2, b_3) \in I_3$ (т. е. $b_i, i = 1,2,3$ равны 0 либо 1) определить необходимые и достаточные условия, выраженные в функциональных конструкциях пучка N и оператор-функции $\widehat{A}$, существования упорядоченного набора оператор-функций

$$(A_1, A_0, B, b_1\mathbb{D}_1, b_2\mathbb{D}_2, b_3\mathbb{D}_3) \in \mathbb{L}_2,$$

для которого осуществима билинейная дифференциальная реализация (сокращенно БДР-q-модель/система/задача) вида[4]

$$\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2} + A_1\frac{dx}{dt} + A_0 x = Bu + b_1\mathbb{D}_1(x,x) + b_2\mathbb{D}_2\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + b_3\mathbb{D}_3\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right), \qquad (1)$$
$$\forall (x,u) \in N;$$

[3] Здесь термин *нелинейный пучок* означает, что *a priori* для управляемых траекторных кривых данного пучка не рассматривается наличие *принципа суперпозиции,* означающего, что зависимость выходных величин от входных воздействий суть линейная [1, с. 18].

[4] Равенство в (1) рассматривается как тождество в $\mathrm{L}_1(T, X)$.

если моделируемые операторы БДР-q-системы (1) предполагается искать в классе *стационарных*, то будем их строить в классе *непрерывных,* и при этом писать

$$(A_1, A_0, B, b_1\mathbb{D}_1, b_2\mathbb{D}_2, b_3\mathbb{D}_3) \in \mathbb{L}^*;$$

ясно, что $(b_1,b_2,b_3)=(0,0,0)$ отвечает *линейной* дифференциальной реализации пары $(N,\widehat{A})$ некоторой системой второго порядка (1) с $\mathbb{D}_1=\mathbb{D}_2=\mathbb{D}_3=0$ (см. ниже сноску 10).

Эта математическая постановка также уместна, когда пучку траекторных кривых N от *неявного* дифференциального уравнения второго порядка, не прибегая к теореме о неявной функции [6, с. 662], требуется сопоставить *явную* нестационарную билинейную дифференциальную систему второго порядка с тем же пучком траекторных кривых N. В частности, можно ли разрешимую для пары $(N,\widehat{A}_1)$ БДР-задачу редуцировать к разрешимой БДР-задаче для пары $(N,\widehat{A}_2)$ в положении, когда $\mu\{t\in T\colon \operatorname{Ker}\widehat{A}_2(t)\neq 0, \in X\}\neq 0$, $\widehat{A}_2$ — оператор гомотетии с коэффициентом 1? Ответ на этот вопрос и характер сопутствующих при этом вычислений проиллюстрирован ниже в примере 2.

2. Разрешимость задачи существования БДР-q-модели

Рассмотрим тензорное произведение $X\otimes X$ [15, с. 39] и пусть $(Z,\|\cdot\|_Z)$ — пополнение [15, с. 54] предгильбертова пространства $X\otimes X$ по кросс-норме $\|\cdot\|_Z$, порождаемой скалярным произведением в $X\otimes X$; уточняющие детали, касающиеся структуры ортонормированного базиса в $(Z,\|\cdot\|_Z)$), см. в предложении 2 [5, с. 65]. Сверх того, примем символьные обозначения:

$$U := X \times X \times Y \times Z \times Z \times Z,$$
$$\|(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\|_U := \big(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2\big)^{1/2};$$
$$\mathbf{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(X,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(X,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Y,X))\times$$
$$\times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X));$$

ясно, что пространство $\mathbf{L}_2$ линейно гомеоморфно $\mathrm{L}_2(T,L(U,X))$, если в U рассматривать топологию произведения. Далее, обозначим через π — универсальное билинейное отображение $\pi\colon X\times X\to X\otimes X$; на языке категорий морфизм π определяет тензорное произведение $X\otimes X$ как универсальный отталкивающий объект [15, с. 40]. Тогда для любого разложимого тензора $\mathrm{x}_1\otimes\mathrm{x}_2\in X\otimes X$ имеем

$$(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\mapsto \pi(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1\otimes\mathrm{x}_2, \quad \|\mathrm{x}_1\otimes\mathrm{x}_2\|_Z = \|\mathrm{x}_1\|_X\|\mathrm{x}_2\|_X,$$

— данные соотношения важны для конкретизации в формуле (2) конструкции нормы $\|\cdot\|_U$; см., например, ниже формулу (6).

Пусть декартов квадрат $X^2=X\times X$ наделен нормой $\big(\|\cdot\|_X^2+\|\cdot\|_X^2\big)^{1/2}$. Тогда $\pi\in\mathcal{L}(X^2,X)$ и, с учетом теоремы 2 [6, с. 245], для любого билинейного отображения

$\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X^2, X)$ найдется[5] линейный непрерывный оператор $D \in L(Z, X)$ такой, что $\mathcal{D}{=}D{\circ}\pi$, при этом для каждой N-траектории $t{\mapsto}x(t)$ (т. е. для всякой пары $(x,u){\in}N$) будет

$$\pi(x,x), \quad \pi\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad \pi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) \in \mathrm{L}_\infty(T, Z).$$

2.1. Ключевые леммы

Нам понадобятся несколько вспомогательных базовых утверждений, которые сформулируем в виде лемм, имеющих самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Для любого набора* $(A_1,\, A_0,\, B,\, b_1\mathbb{D}_1,\, b_2\mathbb{D}_2,\, b_3\mathbb{D}_3) \in \mathbb{L}_2$ *и отображения* $F\colon \mathrm{L}_2(T,X)\times \mathrm{L}_2(T,X)\times \mathrm{L}_2(T,Y)\times \mathrm{L}_2(T,X^2)\times \mathrm{L}_2(T,X^2)\times \mathrm{L}_2(T,X^2) \to \mathrm{L}_1(T,X)$ *вида*

$$(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6) \mapsto F(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6) :=$$
$$:= A_1y_1 + A_0y_2 + By_3 + b_1\mathbb{D}_1y_4 + b_2\mathbb{D}_2y_5 + b_3\mathbb{D}_3y_6$$

существуют единственный кортеж $(C_1,C_2,C_3,b_1D_1,b_2D_2,b_3D_3)\in\mathbf{L}_2$ *и соответствующее ему единственное линейное отображение* $M\colon \mathrm{L}_2(T,U)\to \mathrm{L}_1(T,X)$, *имеющее аналитическое представление*

$$(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6) \mapsto M(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6) :=$$
$$:= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3 + b_1D_1z_4 + b_2D_2z_5 + b_3D_3z_6,$$

такое, что выполняется функциональное равенство

$$(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6) \mapsto F(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6) = M(y_1,y_2,y_3,\pi(y_4),\pi(y_5),\pi(y_6)),$$

которое, в свою очередь, индуцирует для оператор-функций из F *и* M *соотношения*

$$A_1 = C_1, \quad A_0 = C_2, \quad B = C_3, \quad \mathbb{D}_1 = D_1\circ\pi, \quad \mathbb{D}_2 = D_2\circ\pi, \quad \mathbb{D}_3 = D_3\circ\pi.$$

Доказательство. Ограничимся установлением равенств $\mathbb{D}_i = D_i\circ\pi$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Для некоторого множества $T^* = T(\operatorname{mod}\mu)$ [6, с. 58] и любого момента $t\in T^*$ найдется (как отмечалось выше) такой линейный непрерывный оператор $D_i(t) \in L(Z,X)$, что будет $\mathbb{D}_i(t,\cdot,\cdot) = D_i(t)\circ\pi(\cdot,\cdot)$. Теперь остаётся применить соотношение (13) [6, с. 650]. □

Лемма 2. *Пусть* $q := (b_1,b_2,b_3) \in I_3$, $(S,Q) \in \mathfrak{S}_\mu\times\mathfrak{S}_\mu$, *тогда* $\mu(S\backslash Q) = 0$, *если*

$$S := \{t\in T\colon (\mathrm{g}(t), w(t), v(t), f(t), s(t), h(t)) = 0 \in U\},$$

[5]Это сильное условие, поскольку на его базе для моделей (1) применима вся теория расширений M_2-операторов [14], позволяя существенно расширить методы апостериорного моделирования физических систем [31]. Сошлемся также на работу [18], в которой предложена конструктивная процедура построения конечномерных билинейных дифференциальных реализаций, позволившая показать, как рассматривать уравнения Эйлера в качестве *эмпирической экстраполяции* модели реализации наблюдаемого пространственного вращательного движения твердого тела в аспекте математической постановки задачи структурной идентификации (не путать с постановкой параметрической идентификации [2]) автономных уравнений нелинейной динамики.

$$Q := \{t \in T \colon \dot{\mathrm{g}}(t) = 0 \in X\}, \quad \dot{\mathrm{g}} = \frac{d\mathrm{g}}{dt}, \quad (\mathrm{g}, w, v, f, s, h) \in V_N^q,$$

$$V_N^q := \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{dx}{dt}, x, u, b_1\pi(x,x), b_2\pi\left(x, \frac{dx}{dt}\right), b_3\pi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right)\right) \in \mathrm{L}_2(T,U) \colon (x,u) \in N\right\}.$$

Доказательство. Поскольку отображение $\mathrm{g}\colon T \to X$ по построению пространства V_N^q есть абсолютно непрерывная функция, то остается применить лемму 3 [16]. □

Далее, пусть $\mathrm{L}_+(T,R)$ — выпуклый конус [5, с. 127] классов μ-эквивалентности всех вещественных неотрицательных μ-измеримых на T функций и $\leqslant_{\mathrm{L}}$ — такое квазиупорядочение в $\mathrm{L}_+(T,R)$, что $\xi' \leqslant_{\mathrm{L}} \xi''$ в том и только в том случае, если $\xi'(t) \leqslant \xi''(t)$ μ-почти всюду в T. При этом для заданного $W \subset \mathrm{L}_+(T,R)$ через $\sup_{\mathrm{L}} W$ обозначим наименьшую верхнюю грань подмножества W, если эта грань существует в конусе $\mathrm{L}_+(T,R)$ в структуре квазиупорядочения $\leqslant_{\mathrm{L}}$, в частности, $\sup_{\mathrm{L}}\{\xi', \xi''\} = \xi' \vee \xi'' := \dfrac{\xi' + \xi'' + |\xi' - \xi''|}{2}$. В данном контексте рассмотрим

$$\Re(W) := \{\xi \in \mathrm{L}_+(T,R) \colon \xi \leqslant_{\mathrm{L}} \sup\nolimits_{\mathrm{L}} W\}.$$

Тогда $\Re(W)$ образует решетку с ортодополнением [5, с. 339] и универсальными нижней $\chi_\emptyset$ и верхней $\sup_{\mathrm{L}} W$ границами (ясно, что характеристическая функция пустого множества $\chi_\emptyset$ — нулевой элемент конуса $\mathrm{L}_+(T,R)$). Из теоремы 17 [6, с. 68] и следствия 1 [6, с. 69] несложно извлечь следующее более общее утверждение (ниже $\inf_{\mathrm{L}}$ — наибольшая нижняя $\leqslant_{\mathrm{L}}$-грань):

Лемма 3. *Решетка $\Re(W)$ — полная, т. е. $\inf_{\mathrm{L}} V$, $\sup_{\mathrm{L}} V \in \Re(W)$ для каждого множества $V \subseteq \Re(W)$.*

2.2. Итоговые соотношения БДР-q-моделирования

Геометрия M_2-продолжимости [17] приводит к $\Psi\colon V_N^q \to \mathrm{L}_+(T,R)$ — функциональному оператору Релея–Ритца [14]

$$\Psi(\phi) := \frac{\|\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}\|_X}{\|\phi\|_U + \chi_{S_\phi}} \tag{2}$$

где $\phi := (\mathrm{g}, w, v, f, s, h) \in V_N^q$, χ_{S_ϕ} — характеристическая функция множества $S_\phi := T \backslash \mathrm{supp}\,\phi$, при этом в силу действия леммы 2 на интервале времени T имеем

$$\mathrm{supp}\,\Psi(\phi) = \mathrm{supp}\,\|\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}\|_X \;(\mathrm{mod}\,\mu);$$

здесь в определении supp-конструкции носителя функции следуем [6, с. 137].

Оператор (2) удовлетворяет простым, но геометрически важным соотношениям

$$\chi_\emptyset \leqslant_{\mathrm{L}} \Psi(\phi) = \Psi(r\phi), \quad r \in R^* := R \backslash \{0\}, \quad \phi \in V_N^q; \tag{3}$$

ниже будем различать в обозначениях образ точки $\Psi(\phi)$ и образ множества $\Psi[\{\phi\}]$, при этом символ $\mathbf{0}$ будет означать нулевой элемент линейного многообразия V_N^q;

используя стандартные обозначения, множество R^* будем также рассматривать как мультипликативную группу [19, с. 19].

Теория оператора Релея – Ритца нуждается в функционально-геометрическом языке, что заставляет нас уделить этому языку особое внимание. Поэтому прежде чем идти дальше, нам будет удобно ввести дополнительные конструкции и терминологию.

В силу действия (3) оператор Ψ индуцирует отображение $P\Psi\colon P_N^q \to \mathrm{L}_+(T,R)$, которое, по сложившейся в геометрической теории представлений традиции [15, с. 239] назовем *проективизацией* оператора Релея – Ритца:

$$P\Psi(\gamma) := \Psi[\gamma], \quad \gamma \in P_N^q \quad (\gamma \subset V_N^q \backslash \{\mathbf{0}\}),$$

где P_N^q — вещественное проективное пространство, ассоциированное с линейным многообразием V_N^q (с топологией, индуцированной из $\mathrm{L}_2(T,U)$). Т. е. P_N^q есть множество орбит мультипликативной группы R^*, действующей на $V_N^q \backslash \{\mathbf{0}\}$. В этой геометрической трактовке ключевым моментом являются топологические свойства пространства P_N^q, $\dim P_N^q < \aleph_0$, разумеется, в первую очередь (в контексте теоремы 2), его компактность, в частности, если $\dim V_N^q = 3$, то 2-многообразие P_N^q устроено как лист Мёбиуса, к которому по его границе приклеен круг [13, с. 162]. Попутно отметим: на P_N^q можно ввести структуру CW-комплекса [13, с. 140], что, в свою очередь, упрощает рассмотрение вопроса о геометрической реализации многообразия P_N^q, привлекая теорему 9.7 [13, с. 149].

Изложенных правил вполне достаточно для формирования характеристического критерия существования БДР-q-модели, что делает следующая теорема.

Теорема 1. *БДР-q-задача* (1) *разрешима относительно существования оператор-функций* $(A_1,\ A_0,\ B,\ b_1\mathbb{D}_1,\ b_2\mathbb{D}_2,\ b_3\mathbb{D}_3) \in \mathbb{L}_2$ *в том и только в том случае, когда выполняется какое-нибудь (и тогда любое) из следующих двух условий:*

$$\exists\varphi \in \mathrm{L}_2(T,R)\colon\ \Psi(\phi) \leqslant_{\mathrm{L}} \varphi, \quad \forall\phi \in V_N^q;$$
$$\exists \sup\nolimits_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q]\colon\ \sup\nolimits_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q] \in \mathrm{L}_2(T,R),$$

при этом, если $(A_1,A_0,B,b_1\mathbb{D}_1,b_2\mathbb{D}_2,b_3\mathbb{D}_3) \in \mathbb{L}^*$, *то необходимо, чтобы*

$$\mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q]) \subset \mathrm{L}_\infty(T,R).$$

Доказательство. Развивая геометрическую теорию M_2-продолжимости в редакции для билинейных бесконечномерных динамических систем второго порядка [14] (в [14] задача моделирования непосредственно билинейной структуры, в отличие от постановки (1), не ставилась), и следуя определению 2 [14], введем в рассмотрение линейный оператор $M^{\#}\colon V_N^q \to \mathrm{L}_1(T,X)$ вида:

$$(\mathrm{g},w,v,f,s,h) \mapsto M^{\#}(\mathrm{g},w,v,f,s,h) := \widehat{A}\dot{\mathrm{g}} \quad \forall(\mathrm{g},w,v,f,s,h) \in V_N^q.$$

Доказательство первых двух условий (с учетом лемм 1–3 при построении решетки $\mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q])$ содержит аналитическая схема M_2-продолжимости оператора

$M^{\#}$, развитая в лемме 3 и теореме 3 из [14], с учетом тензорного представления пространства $(Z, \|\cdot\|_Z)$. При этом третье условие для осуществления включения $(A_1, A_0, B, b_1D_1, b_2D_2, b_3D_3) \in \mathbb{L}^*$ устанавливается (с учетом (1), (2)) из следующего рассуждения: если семейство динамических процессов N удовлетворяет уравнению (1) в классе $\in \mathbb{L}^*$, то справедлива приводимая ниже цепочка отношений:

$$\widehat{A(t)}\frac{d^2x(t)}{dt^2} + A_1\frac{dx(t)}{dt} + A_0x(t) = Bu(t) + b_1\mathbb{D}_1(x(t), x(t)) +$$
$$+ b_2\mathbb{D}_2\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) + b_3\mathbb{D}_3\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt}\right), \forall (x,u) \in N \implies$$
$$\implies \left\|\widehat{A(t)}\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\|_X \leqslant \left\|A_1\frac{dx(t)}{dt}\right\|_X + \|A_0x(t)\|_X + \|Bu(t)\|_X + \|b_1\mathbb{D}_1(x(t), x(t))\|_X +$$
$$+ \left\|b_2\mathbb{D}_2\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)\right\|_X + \left\|b_3\mathbb{D}_3\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt}\right)\right\|_X, \quad \forall (x,u) \in N \implies$$
$$\implies \exists\, c \in (0, \infty)\colon \Psi(\psi) \leqslant_{\mathrm{L}} c, \forall \psi \in V_N^q \implies \mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q]) \subset \mathrm{L}_\infty(T, R).$$

$\square$

Существует один важный вопрос, относящийся к теореме 1, хотя он никоим образом не является её кульминационным пунктом. Это вопрос о том, что в БДР-q-моделировании важен также (в контексте теории сублинейных операторов) следующий аналитический анализ:

Следствие 1. *Если* $\dim V_N^q < \aleph_0$, $\Psi[V_N^q] \subset \mathrm{L}_2(T, R)$ *и найдется* $p \in [1, \infty)$, *при котором*

$$\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leqslant_L p\Psi(\phi_1) + p\Psi(\phi_2), (\phi_1, \phi_2) \in V_N^q \times V_N^q,$$

то БДР-q-задача (1) *разрешима.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — алгебраический базис в V_N^q и пусть $\xi_i := \Psi(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$; ясно, что $\{\xi_i\}_{i=1}^n \subset \mathrm{L}_2(T, R)$. Зафиксируем вектор-функцию $\phi \in V_N^q$. Тогда найдется система ненулевых коэффициентов $\{r_j\}_{j=1}^m \subset R$, $m \leqslant n$, для которой

$$\phi = r_1e_1 + \ldots + r_me_m.$$

Используя данное представление ϕ и соотношения (3), получаем достаточные условия для первого признака (когда $\varphi = p^{n-1}\xi_1 + \ldots + p^{n-1}\xi_n$) теоремы 1:

$$\Psi(\phi) = \Psi(r_1e_1 + \ldots + r_me_m) \leqslant_{\mathrm{L}}$$
$$\leqslant_{\mathrm{L}} p^{n-1}\Psi(r_1e_1) + \ldots + p^{n-1}\Psi(r_me_m) \leqslant_{\mathrm{L}} p^{n-1}\Psi(e_1) + \ldots + p_{n-1}\Psi(e_n) =$$
$$= (p^{n-1}\xi_1 + \ldots + p^{n-1}\xi_n) \in \mathrm{L}_2(T, R).$$

$\square$

Заметим, что из доказательства вытекает

$$\{\xi_i\}_{i=1}^n \subset \mathrm{L}_2(T, R) \Leftrightarrow \Psi[V_N^q] \subset \mathrm{L}_2(T, R);$$

это позволяет при желании переписать следствие 1 в более конструктивной форме.

3. Проективная интерпретация задачи БДР-q-моделирования

3.1. Фундаментальная группа пространства $P\Psi[P^q_N]$

Чтобы уточнить геометрию БДР-q-разрешимости, надо более подробно изучить функционально-геометрическую структуру пространства P^q_N, которая пока еще не была затронута. Так, в случае компактности P^q_N (что равносильно, [20, с. 145] условию $\dim P^q_N < +\infty$) естественно попытаться связать это свойство с задачей построения решетки $\mathfrak{R}(P\Psi[P^q_N])$. Ниже приведем облегченную формулировку условий непрерывности проективизации оператора Релея – Ритца с вычислением группы Пуанкаре его образа (см. также ниже пример 1); при выборе в теореме 2 метрической структуры пространства $\mathrm{L}_+(T,R)$, прибегли к теоремам 15, 16 [6, сс. 65, 67].

Теорема 2. *Пусть* $\dim P^q_N < +\infty$ *и конус* $\mathrm{L}_+(T,R)$ *наделен топологией, индуцированной сходимостью по мере* μ *или, что эквивалентно, инвариантной метрикой*

$$\rho_T(\xi,\zeta) := \int\limits_T \frac{|\xi(\tau)-\zeta(\tau)|}{1+|\xi(\tau)-\zeta(\tau)|}\,\mu(d\tau), \quad \xi,\zeta \in \mathrm{L}_+(T,R).$$

Тогда оператор $P\Psi\colon P^q_N \to \mathrm{L}_+(T,R)$ *будет непрерывным, если пучок* N *таков, что*

$$\forall\phi \in V^q_N\backslash\{\mathbf{0}\}\colon \operatorname{supp}\|\phi\|_U = T \ (\operatorname{mod}\mu), \tag{4}$$

в частности (как следствие), если

$$\forall\gamma \in P^q_N\colon \operatorname{supp} P\Psi(\gamma) = T \ (\operatorname{mod}\mu). \tag{5}$$

При этом, если оператор $P\Psi$ *взаимнооднозначный, то* $P\Psi$ *— гомеоморфизм, а фундаментальная группа метрического пространства* $(P\Psi[P^q_N],\rho_T)$*, есть* [6] $\mathbb{Z}$ *при* $\dim\operatorname{Span}N=2$ *и* $\mathbb{Z}_2$ *при* $\dim\operatorname{Span}N\geqslant 3$*, причем пространство* $(P\Psi[P^q_N],\rho_T)$ *ориентируемо, если размерность* $\dim\operatorname{Span}N$ *четная, и неориентируемо, если эта размерность нечетная.*

В данной постановке $(\mathrm{L}_+(T,R),\rho_T)$ — полное сепарабельное метрическое пространство; поскольку метрика ρ_T инвариантная, то $(\mathrm{L}_+(T,R),\rho_T)$ — топологическое векторное пространство. Отметим, что теорема 2 является развитием теоремы 3 [8].

Доказательство теоремы. Поскольку хаусдорфовы конечномерные локально выпуклые векторные топологические пространства одной и той же алгебраической размерности изоморфны между собой (теорема 2 [6, с. 127])[7], то далее считаем, что векторную топологию в V^q_N наравне с топологией, индуцированной из $\mathrm{L}_2(T,U)$, снабжает $\|\cdot\|_{V^q_N}$-норма:

$$\|(\mathrm{g},w,v,f,s,h)\|_{V^q_N} := \|(\mathrm{g},w,v,f,s,h)\|_2 + \|\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}\|_1, \quad (\mathrm{g},w,v,f,s,h) \in V^q_N,$$

$$\|(\mathrm{g},w,v,f,s,h)\|_2 := \left(\int\limits_T \|(\mathrm{g}(\tau),w(\tau),v(\tau),f(\tau),s(\tau),h(\tau))\|^2_U\,\mu(d\tau)\right)^{1/2},$$

[6]Здесь, как обычно, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, $\mathbb{Z}_2$ — группа вычетов по модулю 2

[7]Любое линейное вещественное локально выпуклое топологическое пространство может быть погружено в координатное пространство R^ω, где ω — достаточно высокая мощность [15, с. 46]

$$\|\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}\|_1 := \int\limits_T \|\widehat{A}(\tau)\dot{\mathrm{g}}(\tau)\|_X \,\mu(d\tau).$$

Пользуясь этим предварительным замечанием, по существу устанавливающим согласно лемме 2 при $\dim P_N^q < +\infty$ эквивалентность [6, с. 124] норм $\|\cdot\|_{V_N^q}$ и $\|\cdot\|_2$, введем в рассмотрение $S_{V_N^q} := \{(\mathrm{g},w,v,f,s,h) \in V_N^q : \|(\mathrm{g},w,v,f,s,h)\|_{V_N^q} = 1\}$ — сферу 1-радиуса в пространстве V_N^q с нормой $\|\cdot\|_{V_N^q}$. Ясно, что в силу действия функционального равенства $P\Psi(\gamma) = \Psi[\gamma \cap S_{V_N^q}]$, $\gamma \in P_N^q$ для доказательства теоремы 2 достаточно установить непрерывность оператора $\Psi\big| S_{V_N^q}$ для $\|\cdot\|_{V_N^q}$-топологии на сфере $S_{V_N^q}$.

Выделим функцию $\phi^* := (\mathrm{g}^*, w^*, v^*, f^*, s^*, h^*) \in S_{V_N^q}$, и пусть $\{\phi_j := (\mathrm{g}_j, w_j, v_j, f_j, s_j, h_j)\}$ — последовательность в сфере $S_{V_N^q}$, сходящаяся к ϕ^*. Покажем, что имеет место

$$\rho_T(\Psi(\phi_j), \Psi(\phi^*)) \to 0 \quad (j \to \infty),$$

рассуждая от противного; т. е. допустив наличие подпоследовательности $\{\phi_k\} \subset \{\phi_j\}$, для которой $\rho_T(\Psi(\phi_k), \Psi(\phi^*)) \geqslant \sigma$ при некотором действительном $\sigma > 0$. Для этого (с целью получить противоречие в силу условия 1.7.18.(L3) [21] достаточно (теорема 4 [6, с. 58] и теорема 14 [6, с. 64]) для некоторой подпоследовательности $\{\phi_i\} \subset \{\phi_k\}$ установить сходимость $\Psi(\phi_i) \to \Psi(\phi^*)$ μ-почти всюду в интервале T, поскольку сходимость по мере μ равносильна сходимости в метрике ρ_T.

Сходимость последовательности $\{\phi_k\}$ в норме $\|\cdot\|_{V_N}$ приводит к тому, что она $\|\cdot\|_2$-сходится в среднем квадратичном, при этом последовательность $\{\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}_k\}$ будет $\|\cdot\|_1$-сходится к $\{\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}^*\}$ в среднем, и значит существует такое $T_\mu = T \pmod{\mu}$, что некоторые $\{\phi_i\} \subset \{\phi_k\}$ и $\{\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}_i\} \subset \{\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}_k\}$ поточечно сходятся всюду в T_μ; ясно, что $(\mathrm{L}_+(T,R), \rho_T) = (\mathrm{L}_+(T,R), \rho_{T_\mu})$. Зафиксируем в T_μ точку t', тогда для значений ϕ^* и $\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}^*$ в момент t' возможны варианты: $\phi^*(t') \neq 0$, $\phi^*(t') = 0$, $\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t') \neq 0$, $\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t') = 0$; случай $\phi^*(t') = 0$ можно исключить в силу действия условия (4) или (5) совместно с леммой 2.

Рассмотрим вариант $\phi^*(t') \neq 0$, $\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t') \neq 0$. В этой связи для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется (в силу поточечной сходимости $\{\phi_i\}$) такой индекс i', что при $i \geqslant i'$ выполняется

$$|\Psi(\phi^*)(t') - \Psi(\phi_i)(t')| = \left| \frac{\|\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t')\|_X}{\|\phi^*(t')\|_U} - \frac{\|\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}_i(t')\|_X}{\|\phi_i(t')\|_U} \right| =$$
$$= \left| \frac{(1 \pm \delta'(i))\|\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t')\|_X - \widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}_i(t')\|_X}{\|\phi^*(t')\|_U (1 \pm \delta'(i))} \right|,$$

где $0 \leqslant \delta'(i) \leqslant \varepsilon < 1$. Рассуждая аналогично, заключаем, что для числа ε найдется (согласно поточечной сходимости $\{\widehat{A}\dot{\mathrm{g}}_i\}$) такой индекс $i'' \geqslant i'$ и $0 \leqslant \delta''(i) \leqslant \varepsilon$, что при $i \geqslant i''$ очевиден результат:

$$|\Psi(\phi^*)(t') - \Psi(\phi_i)(t')| = \left| \frac{(1 \pm \delta'(i))\|\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t')\|_X - (1 \pm \delta''(i))\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}_i(t')\|_X}{\|\phi^*(t')\|_U (1 \pm \delta'(i))} \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon \frac{\|\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t')\|_X}{\|\phi^*(t')\|_U (1 - \varepsilon)} =: f(\phi^*(t'), \widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t'), \varepsilon) \;\Rightarrow\; \lim_{\varepsilon \to +0} f(\phi^*(t'), \widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t'), \varepsilon) = 0,$$

что устанавливает (при произвольности $t' \in T_\mu$) поточечную сходимость $\Psi(\phi_i) \to \Psi(\phi^*)$ μ-почти всюду в $T_\mu \backslash T_{\phi^*}$, где $T_{\phi^*} := \{t \in T\colon \phi^*(t) = 0 \in U\} \in \mathfrak{S}_\mu$. Согласно (4) $\mu(T_{\phi^*} = 0$ для любой функции $\phi^* \in S_{V_N^q}$, и таким образом, теорема для (4) доказана, поэтому в завершении подтвердим вариант (5).

Действительно, т. к. для любой точки $\gamma \in P_N^q$ имеет место $\operatorname{supp} P\Psi(\gamma) = (\operatorname{mod} \mu)$, то установление утверждения, что для всех $\phi^* \in S_{V_N^q}$ справедливо $\mu(\{t \in T\colon \phi^*(t) = 0 \in U\}) = 0$ представляет собой прямое следствие леммы 2 с учетом (2). Случай $\phi^*(t') \neq 0$, $\widehat{A}(t')\dot{\mathrm{g}}^*(t') = 0$ рассматривается аналогично.

Гомеоморфизм $P\Psi$ следует из теоремы 7.2 [13, с. 104], что позволяет вычислить (см. теорему 2.3 [13, с. 47] и доказательство теоремы 12.1 [13, с. 174]) фундаментальную группу пространства $(P\Psi[P_N^q], \rho_T)$, т. к. гомеоморфные пространства суть пространства одного и того же гомотопического типа; ориентируемость пространства $(P\Psi[P_N^q], \rho_T)$ и размерность $\dim \operatorname{Span} N$ связаны следствием 5.3 [20, с. 137]. □

Замечание 1. Ход доказательства показал, что теорема 2 останется справедливой, если пространство $\mathrm{L}_+(T, R)$ наделить топологией поточечной сходимости; в этом положении нетрудно установить (см. [5, с. 137]), что компактное хаусдорфово топологическое пространство $(P\Psi[P_N^q], \mathfrak{T})$, где $\mathfrak{T}$ — индуцированная топология, метризуемо.

Формулу (4) можно переписать в другой редакции с уточнением геометрии пространства $P\Psi[P_N^q]$.

Следствие 2. *Конечномерная проективизация* $P\Psi\colon P_N^q \to \mathrm{L}_+(T, R)$ *непрерывна, если при произвольном выборе вектор-функции* $\phi \in V_N^q \backslash \{\mathbf{0}\}$ *и точки* $t \in T_\phi := \{t \in T\colon \phi(t) = 0 \in U\}$ *для них найдется такое действительное число* $\delta_{\phi,t} > 0$, *что* $\mu((t - \delta_{\phi,t}, t + \delta_{\phi,t}) \cap T_\phi) = 0$, *при этом* $P\Psi[P_N^q] = f[F]$, *где* $F \subset [0, 1]$ *— канторово множество,* $f\colon F \to \mathrm{L}_+(T, R)$ *— некоторое непрерывное отображение.*

Доказательство. Установим $\mu(T_\phi) = 0$, что эквивалентно условию (4). Для этого выберем каждому моменту $t \in T_\phi$ действительное число $\delta_t > 0$ так, что $\mu((t - \delta_t, t + \delta_t) \cap T_\phi) = 0$. Далее, найдём такие рациональные числа r_{t_-}, r_{t_+}, что $r_{t_-} \in (t - \delta_t, t)$, $r_{t_+} \in (t, t + \delta_t)$, и пусть $I_t := (r_{t_-}, r_{t_+})$. Тогда семейство интервалов $\{I_t\}_{t \in T_\phi}$ покрывает множество T_ϕ, а т. к. каждый интервал I_t является открытым с рациональными концами, то семейство $\{I_t\}_{t \in T_\phi}$ содержит некоторое счётное подсемейство $\{I_{t_i}\}_{i=1,2,\ldots}$ также являющееся покрытием T_ϕ. Теперь заметим, что поскольку для любого индекса $i = 1, 2, \ldots$ выполняется включение $I_{t_i} \subset (t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i})$, то имеет место равенство $\mu(I_{t_i} \cap T_\phi) = 0$, и значит, справедлива следующая цепочка μ-отношений, подводящая итог вспомогательных вычислений:

$$\mu(T_\phi) = \mu\left(T_\phi \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{t_i}\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_\phi \cap I_{t_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_\phi \cap I_{t_i}) = 0 \ \Rightarrow\ \mu(T_\phi) = 0.$$

Поскольку компактное многообразие P_N^q локально устроено как конечномерное евклидово пространство, то $P\Psi[P_N^q] = f[F]$ можно установить с помощью теоремы 4.11 [13] и теоремы 9.7 [13]. □

3.2. Существование БДР-q-модели при $\dim P_N^q < +\infty$

В силу действия теоремы 6 [6, с. 28] справедлива

Теорема 3. *При* $1 \leqslant \dim P_N^q < +\infty$ *и наличии* $\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q]$ *найдутся такие точки* $\gamma', \gamma'' \in P_N^q$, *что будут верны соотношения*

$$\rho_T\big(P\Psi(\gamma'), 0\big) = \sup_{\gamma \in P_N^q} \rho_T\big(P\Psi(\gamma), 0\big) \leqslant \rho_T\big(\sup\nolimits_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q], 0\big) < \mu(T),$$

$$\rho_T\big(P\Psi(\gamma''), \sup\nolimits_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q]\big) = \inf_{\gamma \in P_N^q} \rho_T\big(P\Psi(\gamma), \sup\nolimits_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q]\big) \geqslant 0.$$

Замечание 2. Включение $P\Psi(\gamma') \in \mathrm{L}_2(T, R)$ не гарантирует

$$\rho_T\big(P\Psi(\gamma'), \sup\nolimits_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q]\big) = 0,$$

а значит не обеспечивает вложения $\mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q]) \subset \mathrm{L}_2(T, R)$ (см. пример 1 из [8]). Тем не менее потенциальная возможность варианта $P\Psi(\gamma') = \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q])$ актуализирует задачу вычисления γ'. В конкретных рассуждениях важен частный случай $\dim P_N^q = 0$, приводящий к означенному варианту:

$$P\Psi(\gamma') = \sup\nolimits_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q]) = P\Psi[P_N^q]) =$$
$$= \frac{\left\| \widehat{A} \frac{d^2 x}{dt^2} \right\|_X}{\left(\left\| \frac{dx}{dt} \right\|_X^2 + \|x\|_X^2 + \|u\|_Y^2 + b_1 \|x\|_X^4 + b_2 \|x\|_X^2 \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_X^2 + b_3 \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_X^4 \right)^{1/2}}. \tag{6}$$

В контексте теорем 1, 2 уточним условия существования решетки $\mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q])$, но вначале введем вспомогательную конструкцию: для натурального n обозначим через W_n некоторое конечное n^{-1}-плотное [21] подмножество в метрическом пространстве $(P\Psi[P_N^q], \rho_T)$; подмножество W_n найдется согласно теореме 2, теореме 3.1.10 [21] и теореме 4.3.27 [21]; ниже $\mathrm{Lim}_{\rho_T}\{\xi_n\}$ — предел фиксированной последовательности $\{\xi_n\} \subset \mathrm{L}_+(, R)$ в топологии, индуцированной метрикой ρ_T.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия следствия 2 и пусть*

$$\{W_i \colon i = 1, 2 \ldots n\}, \quad W_i = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_{k_i}\} \subset P\Psi[P_N^q],$$
$$f_n := \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n, \quad \xi_i = \zeta_1 \vee \ldots \vee \zeta_{k_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда конус $\mathrm{L}_+(T, R)$ *содержит решетку* $\mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q])$, *если и только если*

$$\rho_T(f_n, f_m) \to 0, \quad (n, m \to \infty),$$

причём условие БДР-q-разрешимости приобретает вид: пара $(N, \widehat{A})$ *обладает дифференциальной реализацией* (1) *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lim}_{\rho_T}\{f_n\} \in \mathrm{L}_2(T, R)$, *что равносильно* $\mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q]) \subset \mathrm{L}_2(T, R)$.

Доказательство. В силу выше установленного следствия 2 и теоремы 5 [6] функциональное множество $P\Phi[P_N^q]$ компактно. И несложно показать, что утверждения

$$\exists\, \mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q]) \iff \rho_T(f_n, f_m) \to 0\, (n, m \to \infty),$$
$$\mathrm{Lim}\, \rho_T\{f_n\} \in \mathrm{L}_2(T, R) \iff \mathfrak{R}(P\Psi[P_N^q]) \subset \mathrm{L}_2(T, R)$$

вытекают из леммы 2 [6]. С другой стороны, установление БДР-q-разрешимости следует из теоремы 1 с заменой в формулировке этой теоремы условия

$$\exists\, \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q]\colon \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N^q] \in \mathrm{L}_2(T,R)$$

на его очевидный аналог — $\Re(P\Psi[P_N^q] \subset \mathrm{L}_2(T,R)$. □

Замечание 3. Отметим, что в теореме 1, а также в теореме 4 аподиктический факт БДР-q-разрешимости осуществляется для оператор-функций A_1, A_0, B, $b_1\mathbb{D}_1$, $b_2\mathbb{D}_2$, $b_3\mathbb{D}_3$ с точностью до линейного многообразия

$$\mathbb{L}^0 := \{(C_1, C_2, C_3, \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3) \in \mathbb{L}_2\colon$$
$$\mathbb{C}_1 = D_1 \circ \pi, \mathbb{C}_2 = D_2 \circ \pi, \mathbb{C}_3 = D_3 \circ \pi, \quad (C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) \in \mathbf{L}^0\},$$

где (в контексте структуры гильбертова пространства Z, содержащего универсальный отталкивающий объект [15, с. 40] для морфизма π) с учетом уравнения (1) приходим к

$$\mathbf{L}^0 := \{(C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3)) \in \mathbf{L}_2\colon$$
$$C_1 z_1 + C_2 z_2 - C_3 z_3 - D_1 z_4 - D_2 z_5 - D_3 z_6 = 0, \quad \forall (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in G_N^q\};$$

тут G_N^q — базис Гамеля в V_N^q. Случай $\mathbb{L}^0 = \{0\} \subset \mathbb{L}_2$ характеризует единственность БДР-q-модели. В данном контексте параметрического моделирования см. [22], а также алгоритм расчета модели дифференциальной реализации в форме уравнений Лагранжа второго рода (4.1) [23]; численная процедура прецизионной юстировки данной модели, индуцированной группами преобразований [20, с. 148] в рамках теории Морса [13, 20], рассмотрена в работе [24].

3.3. Иллюстрации

Приведем примеры, обозначающие возможные подходы в функциональном анализе пары $(N, \widehat{A})$, приводящем при БДР-q-моделировании к теоремам 1, 2; первый пример выражает стремление обобщить условия (4), (5) теоремы 2, другие примеры иллюстрируют связь теоремы 1 и формулы (6).

Пример 1. Пусть $\mathrm{L}_\times(T,R) := \{(f,\mathrm{g}) \in \mathrm{L}_+(T,R) \times \mathrm{L}_+(T,R)\colon \mu(\operatorname{supp} f \setminus \operatorname{supp} \mathrm{g}) = 0\}$; множество $\mathrm{L}_\times(T,R)$ не является линейным [6, с. 73], но таковые содержит, включая бесконечномерные. Рассмотрим функциональный оператор $\phi\colon \mathrm{L}_\times(T,R) \to \mathrm{L}_+(T,R)$ с конструкцией, индуцированной оператором (2):

$$\phi(f,\mathrm{g})(t) := \begin{cases} \frac{f(t)}{\mathrm{g}(t)}, & \text{если } \mathrm{g}(t) \neq 0; \\ 0, & \text{если } \mathrm{g}(t) = 0. \end{cases}$$

Далее введем последовательность $\{(f_n, \mathrm{g}_n)\} \subset \mathrm{L}_\times(T,R)$, для которой осуществляется

$$\rho_T(f_n, f_m) \to 0, \quad \rho_T(\mathrm{g}_n, \mathrm{g}_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

и, сверх того, с учетом полноты метрического пространства $(\mathrm{L}_+(T,R), \rho_T)$, потребуем

$$(\mathrm{Lim}_{\rho_T}\{f_n\}, \mathrm{Lim}_{\rho_T}\{\mathrm{g}_n\}) \in \mathrm{L}_\times(T,R);$$

обозначим $f := \mathrm{Lim}_{\rho_T}\{f_n\}$, $\mathrm{g} := \mathrm{Lim}_{\rho_T}\{\mathrm{g}_n\}$).

Для сходимости $\rho_T(\phi(f_n,\mathrm{g}_n),\phi(f,\mathrm{g})) \to 0$ $(n \to \infty)$ достаточно

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\mathrm{supp}\,\mathrm{g}_n \triangle \mathrm{supp}\,\mathrm{g}) = 0, \tag{7}$$

где $\triangle$ — симметрическая разность suppg_n и suppg (т.е. $\mathrm{suppg}_n \backslash \mathrm{suppg}) \cup (\mathrm{suppg} \backslash \mathrm{suppg}_n)$.

Заметим, что формула (7) не является необходимым условием, что указывает на избыточность условий (4), (5) теоремы 2; в действительности за формулой (4) стоит следствие 12.3 [25] в то время как (7) индуцировано теоремой 3 [26]. В данном контексте остается открытым вопрос: каков характеристический признак[8] для $\{(f_n,\mathrm{g}_n)\}$, (f,g), определяющий сходимость $\rho_T(\phi(f_n,\mathrm{g}_n),\phi(f,\mathrm{g})) \to 0$ $(n \to \infty)$?

Пример 2. Пусть на $T = [0,1]$ неявно заданы $N = \{(x,u)\}$ (т. о. $\dim P_N^q = 0$) и $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2 \in \mathrm{L}_\infty(T, L(X,X)))$, для которых существуют функции $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4 \in \mathrm{L}_\infty(T,R)$, удовлетворяющие условиям

$$t \mapsto \|x(t)\| = t\varphi_1(t), \quad t \mapsto \left\|\frac{dx}{dt}(t)\right\|_X = t\varphi_2(t), \quad t \mapsto \|u(t)\|_Y = t\varphi_3(t),$$
$$t \mapsto \left\|\widehat{A}_1(t)\frac{d^2x}{dt^2}(t)\right\|_X = t\varphi_4(t), \quad t \mapsto \left\|\widehat{A}_2(t)\frac{d^2x}{dt^2}(t)\right\|_X = \varphi_4(t),$$

при этом найдутся такие действительные числа $\delta, \varepsilon > 0$, для которых

$$\mu\{t \in T \colon \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) < \delta\} = \mu\{t \in T \colon \varphi_4(t) < \varepsilon\} = 0.$$

Тогда в силу теоремы 1 и соотношений (6) задача БДР-q-моделирования разрешима для пары $(N, \widehat{A}_1)$ и не разрешима для $(N, \widehat{A}_2)$; см. также пример 1 [8].

Пример 3. Пусть заданная пара $(x, \widehat{A}) \in AC^1(T,X) \times \mathrm{L}_\infty(T, L(X,X))$ обладает БДР-q-моделью (1) вида

$$\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2} + A_1\frac{dx}{dt} + A_0x = b_1\mathbb{D}_1(x,x) + b_2\mathbb{D}_2\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + b_3\mathbb{D}_3\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right),$$

где $(b_1,b_2,b_3) = (1,1,1)$ и хотя бы один, или любые два, или все три из билинейных операторов $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_3$ суть ненулевые. Тогда для данной пары $(x, \widehat{A})$ найдутся (не единственным образом) такие оператор-функции $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_0 \in \mathrm{L}_2(T, L(X,X))$, что осуществима формальная[9] линейная (т. е. $(b_1,b_2,b_3) = (0,0,0)$) нестационарная реализация

$$\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2} + \widetilde{A}_1\frac{dx}{dt} + \widetilde{A}_0x = 0.$$

[8]Например, условие (7) становится необходимым для $\rho_T(\phi(f_n,\mathrm{g}_n),\phi(f,\mathrm{g})) \to 0$ $(n \to \infty)$, если $\{f_n\}$ обременить дополнительным положением: найдется $\delta > 0$, для которого $f_n(t) \geqslant \delta$ при любом n и всех $t \in \mathrm{supp}\,\mathrm{g}$ (см. замечание 2 [26]).

[9]Термин *формальная* означает, что в целом эта реализация не эквивалентна исходной БДР-q-модели, поскольку пример 3 в своей основе по существу отражает факт, что любой билинейный оператор класса $\mathrm{L}_2(T, \Lambda(X^2,X))$ является линейным нестационарным (возможно класса $\mathrm{L}_2(T, L(X,X))$) по любому из своих функциональных аргументов (класса $AC^1(T,X)$ или $AC(T,X)$) при фиксированном другом. Очевидно, что конструкция данного примера позволяет для конечного семейства $\{(x_i, \widehat{A})\}_i^n \in AC^1(T,X) \times \mathrm{L}_2(T, L(X,X))$, каждый элемент которого обладает некоторой БДР-q-реализацией (1), говорить о наличии для этого семейства формальной линейной нестационарной дифференциальной реализации в гильбертовом пространстве, индуцированном декартовым произведением $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Действительно, согласно теореме 1 и формуле (6), пример 3 допускает интерпретацию

$$\frac{\left\|\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2}\right\|_X}{\left(\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2+\|x\|_X^4+\|x\|_X^2\left|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|\frac{dx}{dt}\|_X^4\right)^{1/2}}\in \mathrm{L}_2(T,R)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left\|\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2}\right\|_X}{\left(\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2\right)^{1/2}}\in \mathrm{L}_2(T,R).$$

С другой стороны, установление этого утверждения вытекает из

$$\frac{\left\|\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2}\right\|_X}{\left(\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2+\|x\|_X^4+\|x\|_X^2\left|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|\frac{dx}{dt}\|_X^4\right)^{1/2}}=$$

$$=\frac{\left\|\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2}\right\|_X}{\left(\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2\right)^{1/2}\times\left(1+\left|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2-\frac{\|x\|_X^2\left|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2}{\left|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2}\right)^{1/2}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\left\|\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2}\right\|_X}{\left(\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2\right)^{1/2}\cdot\left(1+\left|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2\right)^{1/2}}\geqslant\frac{1}{\alpha^{1/2}}\frac{\left\|\widehat{A}\frac{d^2x}{dt^2}\right\|_X}{\left(\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2\right)^{1/2}},$$

где с учетом, что T компакт, а функции $\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2$, $\|x\|_X^2$ непрерывны, можно принять

$$\alpha=\sup_{t\in T}\left(1+\left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\|_X^2+\|x(t)\|_X^2\right)<\infty.$$

Выше также учли, что для $t\mapsto\|x(t)\|_X$, $t\mapsto\left\|\frac{dx}{dt}(t)\right\|_X$ имеет место оценка

$$\frac{\|x\|_X^2\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2}{\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2}\leqslant 0,25\left(\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X^2+\|x\|_X^2\right).$$

Последнее неравенство устанавливается рассуждением, основанным на том утверждении, что функция двух переменных $(z,y)\mapsto\frac{zy}{(z+y)^2}$ в области $\{(z,y)\colon z\geqslant 0, y\geqslant 0,(z,y)\neq(0,0)\}$ достигает максимума, равного $1/4$, в точках диагонали $\{(z,y)\colon z=y, (z,y)\neq(0,0)\}$; технические детали этих рутинных вычислений опускаем. Развитие примера 3, содержащего управление, дано в работе [27], где изложен *принцип суперпозиции* [1, с. 18], который можно привлечь при обосновании расширения приема *квазилинеаризации* [1, с. 168] в решении задачи оптимального управления по технологии последовательных приближений, известной также как метод Пикара [1, с. 173]; конечно, есть исследования по идентификации систем, не содержащих управление [18, 22].

Представляется, что приведенные примеры дают основания для побудительных мотивов в дальнейшем изучении БДР-q-моделирования, включая вариант (см. пример 2) при скудных исходных знаниях о паре $(N, \widehat{A})$, в частности, в контексте теорем 1–4, для непрерывных управляемых бихевиористических систем, траектории которых суть аналитические вектор-функции [28], обеспечивающие выполнение теоремы 2 в силу действия принципа изолированности нулей [29, с. 228].

Дальнейшие шаги. В качественной теории реализации динамических систем изучаются вопросы существования динамического представления для надлежащим образом определенной временной системы [1, с. 21]. При этом выше нашей основной целью было изложить общие геометрические идеи разрешимости задачи БДР-q-моделирования для случая произвольного вектора $q \in I_3$. В целом, если определять перспективу дальнейшего развития геометрической теории нелинейной дифференциальной реализации высших порядков, то отметим, что распространение понятия БДР-q-модели на структуры *полилинейных*[10] связей методологически лежит в плоскости использования языка геометрических структур тензорных пространств Фока [5] и проективных представлений [15], предполагая при этом глубокое проникновение в математическое [8, 30] и физическое [31, 32] содержание предмета, и попутно развивая полилинейную теорию векторных полей [20] (включая энтропийную постановку [14, 33]) в бесконечномерной постановке[11]. Такая геометрическая теория для гильбертова пространства непрерывно вложенного в банахово пространство, образуя всюду плотное множество, привлекательна в контексте геометрического описания дифференциальной реализации нелинейных эволюционных моделей высших порядков [9] на пути развития качественной нелинейной теории в банаховом пространстве геометрических основ *адаптивного управления* [1, с. 64], поскольку Калман (основоположник алгебраической теории абстрактной реализации [1, с. 286]) полагал: “Машина, которая сможет обеспечить адаптивное управление произвольным объектом, сможет также *заменить человека* и в области научного экспериментирования и построения моделей” [1, с. 64] (курсив наш).

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7). Особая благодарность рецензенту и корректору за ценные замечания, которые позволили улучшить текст статьи.

[10] Очевидно, что БДР-q-моделирование обобщается на полилинейные системы высших размерностей. Например, для *трилинейной* дифференциальной реализации (ТДР) приходим к ТДР-(q, l)-моделям, когда система (1) аддитивно может дополнительно содержать (учитывать) функциональные члены

$$k_1\mathbb{T}_1(x,x,x), \quad k_2\mathbb{T}_2\left(x, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad k_3\mathbb{T}_3\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right), \quad k_4\mathbb{T}_4\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) \in \mathrm{L}_2(T, X),$$

$$\mathbb{T}_1 \ldots, \mathbb{T}_4 \in \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^3, X)),$$

$$l := (k_1, k_2, k_3, k_4) \in I_4 := \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \in R \times R \times R \times R, \quad \mathrm{Card}\, I_4 := 2^4;$$

ясно, что в данной постановке вектор $(q, l) \in I_3 \times I_4$ будет определять 2^7 представлений ТДР-(q,l)-моделей; для n-линейных $(n \geqslant 2)$ реализаций подобных комбинированных представлений будет $2^{(n-1)(n+4)/2}$.

[11] В том числе, для качественного анализа редукции точных многомерных решений диффузии со степенными нелинейностями [34] к задаче Коши в классе ОДУ с нестационарной полилинейной структурой.

Список литературы

[1] Калман Р., Фалб П., Арбиб М., *Очерки по математической теории систем*, М., 1971.

[2] Ahmed N. U., *Optimization and Identification of Systems Governed by Evolution Equations on Banach Space*, New York, 1988.

[3] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, М., 1983.

[4] Гольдман Н. Л., "Определение коэффициентов при производной по времени в квазилинейных параболических уравнениях в пространствах Гёльдера", *Дифференциальные уравнения*, **48**:12, (2012), 1597–1606.

[5] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, т. 1. Функциональный анализ: Пер. с англ., М., 1977.

[6] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, М., 1977.

[7] Rusanov V. A., Daneev A. V., Lakeyev A. V., Linke Yu. È., "On the differential realization theory of nonlinear dynamic processes in Hilbert space", *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **97**:4, (2015), 495–532.

[8] Русанов В. А., Данеев А. В., Линке Ю. Э., "К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве", *Кибернетика и системный анализ*, **53**:4, (2017), 71–83.

[9] Ван дер Шафт А., "К теории реализации нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка", *Теория систем. Математические методы и моделирование*, Сб. статей (ред. А.Н. Колмогоров, С.П. Новиков): Пер. с англ., М., 1989, 192–237.

[10] Лакеев А. В., Линке Ю. Э̇., Русанов В. А., "К структурной идентификации нелинейного регулятора нестационарной гиперболической системы", *Доклады РАН*, **468**:2, (2016), 143–148.

[11] Ramazanova A. T., Kuliyev H. F., Roesch A., "An inverse problem for determining right hand side of equations for hyperbolic equation of fourth order", *Advances in Differential Equations and Control Processes*, **20**:2, (2019), 143–161.

[12] Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А., "К реализации полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве", *Дифференциальные уравнения*, **53**:8, (2017), 1098–1109.

[13] Прасолов В. В., *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, М., 2014.

[14] Rusanov V. A., Lakeyev A. V., Banshchikov A. V., Daneev A. V., "On the bilinear second-order differential realization of a infinite-dimensional dynamical system: An approach based on extensions to M_2-operators", *Fractal and Fractional (Special Issues: Nonlinear Functional Analysis and Applications)*, **7**:4, (2023), 1–18.

[15] Кириллов А. А., *Элементы теории представлений*, М., 1978.

[16] Русанов В. А., Антонова Л. В., ДанеевВ. А., "К обратным задачам нелинейного системного анализа. Бихевиористический подход", *Проблемы управления*, **5**, (2011), 14–21.

[17] Kaiser E., Kutz J. N., Brunton S. L., "Sparse identification of nonlinear dynamics for model predictive control in the low-data limit", arXiv: 1711.05501v2 [math.OC] 30 Sep 2018.

[18] Русанов В. А., Шарпинский Д. Ю., "К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем", *Прикладная математика и механика*, **74**:1, (2010), 119–132.

[19] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп*, М., 1972.

[20] Новиков С. П., Тайманов И. А., *Современные геометрические структуры и поля*, М., 2014.

[21] Энгелькинг Р., *Общая топология*, М., 1986.

[22] Дмитриев А. В., Дружинин Э. И., *II. К теории прямых вычислительных алгоритмов параметрической идентификации линейных объектов*, Сборник статей: Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления, Наука, Новосибирск, 1985, 218–225.

[23] Дмитриев А. В., Дружинин Э. И., "Идентификация динамических характеристик непрерывных линейных моделей в условиях полной параметрической неопределенности", *Известия РАН. Теория и системы управления*, **3**, (1999), 44–52.

[24] Русанов В. А., Данеев А. В., Линке Ю. Э., "К оптимизации процесса юстировки модели дифференциальной реализации многомерной системы второго порядка", *Дифференциальные уравнения*, **55**:10, (2019), 1432–1438.

[25] Дьяченко М. И., Ульянов П. Л., *Мера и интеграл*, М., 1998.

[26] Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А., "Метрические свойства оператора Релея – Ритца", *Известия вузов. Математика*, **9**, (2022), 54–63.

[27] Lakeyev A. V., Rusanov V. A., Daneev A. V., Aksenov Yu. D., "On realization of the superposition principle for a finite bundle of integral curves of a second-order bilinear differential system", *Advances in Differential Equations and Control Processes*, **30**:2, (2023), 169–197.

[28] Громов В. П., "Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах", *Доклады РАН*, **394**:3, (2004), 305–308.

[29] Дьедонне Ж., *Основы современного анализа*, М., 1964.

[30] Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А., "Оператор Релея – Ритца в обратных задачах полилинейных неавтономных эволюционных уравнений высших порядков", *Математические труды*, **26**:2, (2023), 162–176.

[31] Willems J. C., "System theoretic models for the analysis of physical systems", *Ric. Aut.*, **10**, (1979), 71–106.

[32] Кабанихин С. И., *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск, 2009.

[33] Popkov Yu. S., "Controlled positive dynamic systems with an entropy operator: Fundamentals of the theory and applications", *Mathematics*, **9**, (2021), 2585, https://doi.org/10.3390/math9202585.

[34] Косов А. А., Семёнов Э. И., "О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции-диффузии", *Дифференциальные уравнения*, **54**:1, (2018), 108–122.

Поступила в редакцию
21 ноября 2023 г.

Работа первого и третьего автора выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7).

$\boxed{\textit{Lakeyev A. V.}}$[1], *Linke Yu. E.*[2], *Rusanov V. A.*[1] On a geometric theory of the realization of nonlinear controlled dynamic processes in the class of second-order bilinear models. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 2. P. 200–219.

[1] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia
[2] Pensioner, Irkutsk, Russia

ABSTRACT

In the development of the general theory of inverse problems of implementation of nonlinear dynamical systems on the basis of geometric constructions of the tensor product of Hilbert spaces, system-theoretic foundations are built for the analytical study of necessary and sufficient conditions for the existence of a differential implementation of a continuous infinite-dimensional dynamical system (represented by a beam of any power of controlled trajectories) in the class of bilinear nonstationary ordinary second order differential equations in a separable Hilbert space. The bilinear eight-variant structure of the differential equations of state of the infinite-dimensional dynamic system under study models the combined nonlinearity of both the trajectory itself and the speed of movement on this trajectory. Along the way, for this dynamic implementation, the topological-metric conditions for the continuity of the projectivization of the nonlinear Rayleigh - Ritz functional operator are analytically substantiated with the calculation of the fundamental group of its image. The results obtained have the potential for the development of geometric systems theory in substantiating the nonlinear analysis of coefficient-operator inverse problems of non-autonomous differential models of multilinear controllable dynamic systems of higher orders.

Key words: *inverse problems of nonlinear systems analysis, tensor analysis in Hilbert spaces, bilinear non-autonomous differential realization of the second order, Rayleigh - Ritz functional operator.*