Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 2. С. 187–192

УДК 517.535
MSC2020 30C15

© В. Н. Дубинин[1]

Неравенства для производных рациональных функций с критическими значениями на отрезке

Доказываются многоточечные теоремы искажения для рациональных функций с ограничениями на их нули, полюсы и критические значения.

Ключевые слова: *полиномы, рациональные функции, критические значения, неравенства для производных.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202417

1. Введение и формулировки результатов

Неравенствам для производных рациональных функций посвящена обширная литература (см., например, [1–8]). В меньшей степени изучены многоточечные неравенства, т.е. неравенства, содержащие производные рациональных функций в конечном наборе точек [8]. В настоящей заметке выполняется частично указанный пробел в случае, когда критические значения рациональной функции расположены на заданном отрезке, а производные берутся в нулях либо полюсах этой функции.

Пусть f — мероморфная функция в точке z_0, $f(z_0)=w_0$. В случае $z_0=\infty$, $w_0\neq\infty$ под производной $f'(\infty)$ будем понимать производную функции $f(1/z)$ в начале координат. При $z_0\neq\infty$, $w_0=\infty$, $f'(z_0)$ есть производная функции $1/f(z)$ в точке z_0. И, наконец, в случае $z_0=w_0=\infty$ под производной $f'(\infty)$ понимается производная функции $1/f(1/z)$ в нуле. Точку z_0 называют критической точкой функции f, если $f'(z_0)=0$. Под критическим значением f понимаем значение этой функции в критической точке. Ограничения, наложенные на критические значения, естественным образом влияют на поведение функций. В частности, принадлежность конечных критических значений полинома заданному отрезку ведет к новым версиям неравенств марковского и бернштейновского типа [9].

Следующие четыре утверждения являются по существу проявлением одного и того же свойства рациональных функций.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru`

Теорема 1. *Пусть f — рациональная функция степени $n \geqslant 2$, все критические значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, а нули z_k, $k = 1, ..., n$, расположены на окружности $|z| = 1$. Тогда*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|} \geqslant \frac{\alpha\beta n}{\beta - \alpha}. \tag{1}$$

Равенство в (1) достигается, например, в случае

$$f(z) = \frac{\alpha\beta(z^n + 1)}{\alpha z^n + \beta}.$$

При $n = 3$ требование на нули функции f можно опустить.

Теорема 2. *Предположим, что критические значения рациональной функции f степени 3 принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sqrt[3]{\prod_{k=1}^{3} |f'(z_k)|} \geqslant \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{|(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|}},$$

где $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, 3$. Равенство достигается для экстремальной функции из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть f — рациональная функция степени $n \geqslant 2$ с критическими значениями на отрезке $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, и нулями $z_k \neq \infty$, $k = 1, ..., n$, на вещественной оси. Тогда*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (1 + z_k^2)|f'(z_k)|} \geqslant \frac{2\alpha\beta n}{\beta - \alpha}. \tag{2}$$

Равенство в (2) выполняется для функции

$$f(z) = \alpha\beta \frac{(z - i)^n + (z + i)^n}{\alpha(z - i)^n + \beta(z + i)^n}.$$

Аналогичные оценки имеют место для производных в полюсах функции f. Приведем аналог предыдущей теоремы.

Теорема 4. *Если все критические значения рациональной функции f степени $n \geqslant 2$ расположены на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\alpha \neq \beta$, α, $\beta \in \mathbb{C}$, а полюсы этой функции $a_k \neq \infty$, $k = 1, ..., n$, — на вещественной оси, то справедливо неравенство*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k^2)|f'(a_k)|} \geqslant \frac{2n}{|\beta - \alpha|}.$$

Равенство достигается для функции

$$f(z) = \frac{\alpha(z - i)^n + \beta(z + i)^n}{(z - i)^n + (z + i)^n}.$$

В случае вещественной рациональной функции f ограничение на критические значения в теоремах 1–3 можно заменить на требование вещественности критических точек и ограниченности критических значений, при этом $\alpha = \min\{f(x): f'(x)=0\}$, $\beta = \max\{f(x):\, f'(x)=0\}$.

Все утверждения доказываются единым путем с привлечением методов [10]. Нетрудно увидеть, что наш подход приводит к серии, вообще говоря, неточных оценок. Однако мы ограничились примерами, в которых оценки достигаются рациональными функциями.

2. Доказательства

Пусть область B имеет функцию Грина $\mathrm{g}_B(z,z_0)$, $z_0 \in B$. Внутренним радиусом области B относительно точки z_0 называют величину

$$r(B,z_0) = \exp\left\{\lim_{z\to z_0}[\mathrm{g}_B(z,z_0) + \log|z-z_0|]\right\}, \quad \text{когда } z_0 \neq \infty,$$

$$r(B,\infty) = \exp\left\{\lim_{z\to \infty}[\mathrm{g}_B(z,\infty) + \log|z|]\right\}.$$

Из конформной инвариантности функции Грина следует, что если функция h конформно и однолистно отображает область B на область $h(B)$, то

$$r(B,z_0)|h'(z_0)| = r(h(B),h(z_0)) \tag{3}$$

для любой точки $z_0 \in B$.

Лемма 1. *Пусть $w = f(z)$ — рациональная функция степени $n \geqslant 2$, и пусть B — односвязная область на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}_w$, содержащая некоторую точку w_0 и не содержащая критических значений функции f. Тогда множество $f^{-1}(B)$ состоит из попарно непересекающихся односвязных областей D_k, каждая из которых содержит один и только один простой нуль z_k функции $f - w_0$ ($1/f$, если $w_0 = \infty$), $k = 1,\dots,n$, при этом выполняются равенства*

$$r(D_k,z_k)|f'(z_k)| = r(B,w_0), \quad k=1,\dots,n. \tag{4}$$

Доказательство. Так как область B не содержит критических значений функции f, но содержит точку w_0, то все нули $z_1,\dots,z_n$ функции $f - w_0$ ($1/f$) простые. Обратная функция f^{-1} является аналитической в $\overline{\mathbb{C}}_w$ и распадается в односвязной области B на однозначные ветви h_k, определяемые условиями $h_k(w_0) = z_k$, $k = 1,\dots,n$. Отсюда следует, что области $D_k := h_k(B)$, $k = 1,\dots,n$, односвязные и попарно непересекающиеся. Осталось воспользоваться равенством (3). Лемма 1 доказана. □

Равенства (4) в сочетании с теоремами об экстремальном разбиении [10, гл. 6] ведут к серии многоточечных неравенств для производной рациональной функции.

Доказательство теоремы 1. Положим $B = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [\alpha,\beta]$. Функция

$$\omega = F(w) = \frac{\beta}{4\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha - w}{w-\beta}\right)$$

отображает конформно и однолистно область B на плоскость с разрезом

$$\Omega = \Big\{\overline{\mathbb{C}}_\omega \setminus \{\omega:\ \operatorname{Im}\omega = 0,\ 1/4 \leqslant \operatorname{Re}\omega \leqslant \infty\}\Big\},$$

причем $F(0)=0$. Равенство (3) дает

$$r(B,0)|F'(0)| = r(\Omega,0) = r\big(\{z:\ |z|<1\},0\big) = 1.$$

Мы воспользовались тем фактом, что функция Кёбе $k(z)=z(1+z)^{-2}$ однолистно отображает круг $|z|<1$ на Ω так, что $k(0)=0$, $k'(0)=1$. Отсюда

$$r(B,0) = \frac{4\alpha\beta}{\beta-\alpha}.$$

По лемме 1

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k,z_k)|f'(z_k)| = (r(B,0))^n = \left(\frac{4\alpha\beta}{\beta-\alpha}\right)^n,$$

где $f(D_k)=B$, $z_k\in D_k$. Согласно [10, теорема 6. 11]

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k,z_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n. \tag{5}$$

Таким образом, выполняется неравенство (1). Проверка случая равенства осуществляется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 вытекает из доказательства теоремы 1, где вместо теоремы 6.11 [10] необходимо применить теорему Г.М. Голузина [11, гл. IV, §5, теорема 6] (см. также [10, неравенство (6. 10)]).

Доказательство теоремы 3. Дробно-линейная функция

$$\zeta = \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

отображает вещественную ось на окружность $|\zeta|=1$. Применяя теорему 1 к рациональной функции $f(\varphi^{-1}(\zeta))$, приходим к неравенству

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f'(z_k)}{\varphi'(z_k)}\right|} \geqslant \frac{\alpha\beta n}{\beta-\alpha}.$$

Отсюда вытекает неравенство (2). Равенство достигается для функции

$$f(\varphi^{-1}(\zeta)) = \frac{\alpha\beta(\zeta^n+1)}{\alpha\zeta^n+\beta} = \alpha\beta\frac{(z-i)^n+(z+i)^n}{\alpha(z-i)^n+\beta(z+i)^n}.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. В случае положительных α,β теорема 4 вытекает из теоремы 3. Проведем независимое и полное доказательство этой теоремы. Функция $\eta=\Phi(w)$, заданная соотношением

$$\frac{1}{2}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right) = \frac{2w}{\beta-\alpha} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},$$

конформно и однолистно отображает область $B=\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[\alpha,\beta]$ на внешность круга $|\eta|>1$ так, что $\Phi(\infty)=\infty$. Применяя правило (3), с учетом равенства $r(\{\eta\colon |\eta|>1\},\infty)=1$ получаем

$$r(B,\infty)=\frac{4}{|\alpha-\beta|}.$$

Согласно лемме 1 прообраз области B при отображении $f(\varphi^{-1}(\zeta))$ представляет собой объединение попарно непересекающихся областей $D_k, k=1,...,n$. Здесь $\zeta=\varphi(z)=$ $=(z-i)/(z+i)$ из доказательства теоремы 3. Теорема 6.11 из [10] дает неравенство (5), где z_k необходимо заменить на $\zeta_k=\varphi(a_k)$, $k=1,...,n$. Учитывая (4), приходим к требуемому неравенству:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \frac{1}{|\alpha-\beta|^n}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\varphi'(a_k)}{f'(a_k)}\right| = \frac{1}{|\alpha-\beta|^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{|(1+a_k^2)f'(a_k)|}.$$

Равенство достигается в случае, когда выполняется равенство в (5). Согласно теореме 6.11 [10] это равенство реализуется для областей D_k, ограниченных лучами $\arg\zeta^n=0$, и точек $\zeta_k=\exp(i(\pi/n+2\pi k/n))$, $k=1,...,n$. Рациональная функция f, для которой достигается равенство, является суперпозицией отображений

$$w=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\zeta^n+1} \quad \text{и} \quad \zeta=\varphi(z).$$

Теорема 4 доказана.

Список литературы

[1] Русак В. Н., *Рациональные функции как аппарат приближения*, БГУ, Минск, 1979.

[2] Borwein P., Erdèlyi T., “Sharp extensions of Bernstein’s inequality to rational spaces”, *Mathematika*, **43**, (1996), 413–423.

[3] Min G., “Inequalities for rational functions with prescribed poles”, *Can. J. Math.*, **50**:1, (1998), 152–166.

[4] Дубинин В. Н., “О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2, (2002), 67–80.

[5] Лукашов А. Л., “Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3, (2004), 115–138.

[6] Kalmykov S., Nagy B., Totik V., “Bernstein and Markov type inequalities for rational functions”, *Acta Math.*, **219**, (2017), 21–63.

[7] Wali S. L., Shah W. M., “Some applications of Dubinin’s lemma to rational functions with prescribed poles”, *J. Math. Anal. Appl.*, **450**:1, (2017), 769–779.

[8] Калмыков С. И., “О многоточечных теоремах искажения для рациональных функций”, *Сиб. матем. журн.*, **61**:1, (2020), 107–119.

[9] Дубинин В. Н., “О полиномах с критическими значениями на отрезке”, *Матем. заметки*, **78**:6, (2005), 827–832.

[10] Dubinin V. N., *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhauser/ Springer, Basel, 2014.

[11] Голузин Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

Поступила в редакцию
23 июня 2024 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

Dubinin V. N.[1] Inequalities for derivatives of rational functions with critical values on an interval. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2024. V. 24. No 2. P. 187–192.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

Multipoint distortion theorems are proved for rational functions with restrictions on their zeros, poles and critical values.

Key words: *polynomials, rational functions, critical values, inequalities for derivatives.*