*Дальневосточный математический журнал.* 2024. Т. 24. № 2. С. 178–186

УДК 531.36
MSC2020 74A05 + 74B05

© М. А. Гузев[1], О. Н. Любимова[2], К. Н. Пестов[3]

# Уравнения Бельтрами – Митчелла в неевклидовой модели сплошной среды

Данная работа содержит обобщение в ковариантной форме классических уравнений Бельтрами – Митчелла для случая несовместных деформаций. Показано, что в соответствующих соотношениях появляется дополнительная сила, характеризующая внутреннюю неевклидову геометрию материала, описание которой дано в терминах тензора Риччи.

**Ключевые слова:** *условия совместности Сен-Венана, уравнения Бельтрами – Митчелла, неевклидова модель сплошной среды, тензор Риччи.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202416

## 1. Введение

В классической теории упругости хорошо известны условия совместности Сен-Венана для малых деформаций $\varepsilon_{ij}$ [1]:

$$C_{jk}(\varepsilon) \equiv \Delta\varepsilon_{jk} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^k \partial x^i} = 0; \quad j,k = 1,2,3, \tag{1}$$

где по индексу $i = 1,2,3$ производится суммирование. Выполнение (1) гарантирует существование функций $u_i = u_i(x_1,x_2,x_3)$ таких, что $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$, и для малых деформаций $\varepsilon_{ij}$ совпадает с тензором полной деформации Альманси: $\varepsilon_{ij} = A_{ij}$.

Постановка задачи механики сплошной среды в терминах напряжений $\sigma_{ij}$ приводит к системе дифференциальных уравнений, предложенных Бельтрами для случая отсутствия массовых сил и полученных Митчеллом при учете массовых сил. Они следуют из (1). Действительно, предположим, что справедливы уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \tag{2}$$

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
[3] Владивостокский филиал Российской таможенной академии, Владивосток, 690034, г. Владивосток, ул. Стрелковая, 16в.
Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru (М. А. Гузев), lyubimova@dvfu.ru (О. Н. Любимова), kopestov@yandex.ru (К. Н. Пестов).

где $F_i$ — компоненты объемных сил, и выполняется закона Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right), \tag{3}$$

в котором $\lambda, \mu$ обозначают постоянные Ламе. Подставляя (3) в (1) и используя (2), получаем уравнения Бельтрами – Митчелла

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}\Delta\sigma_{kk} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0. \tag{4}$$

Условия (1) связаны с выполнением основной кинематической гипотезы классической теории упругости: совпадение внешней евклидовой геометрии пространства наблюдателя с внутренней геометрией рассматриваемого материала. С геометрической точки зрения эти означает, что тензор Римана – Кристоффеля, вычисленный для материала, равен нулю [2]. Однако С. К. Годуновым [1] было замечено, что классические компоненты деформаций не совпадают в общем случае с деформациями, определяемыми через реологическое соотношение (3) (в [1] такие поля деформаций называются эффективными). Поэтому тензор Римана – Кристоффеля, вычисленный для метрического тензора, порожденного эффективной деформацией, в общем случае, не равен нулю, то есть пространство для описания таких деформаций становится неевклидовым, а условия совместности (1) не выполняются.

Любопытно, что необходимость введения неевклидовых объектов в механику сплошных сред была неявно подчеркнута в процессе анализа инженерных проблем [3] при создании аппаратуры для измерения уровня внутренних напряжений в сварных конструкциях. Использованные в [3] предположения о несовместности деформаций явно связаны с предположением об отличии от нуля тензора кривизны в пространстве внутри материала.

В физической литературе на необходимость введения неевклидовых характеристик было указано еще в [4,5]. Авторы показали, что введение “кристалла сравнения” для описания таких дефектов, как линейные дислокации, приводит к появлению в теории объектов несимметричной связности, запрещенных евклидовой геометрической структурой классической теории.

Варианты обобщения классической теории упругости в рамках различных неевклидовых моделей сплошной среды были предложены многими исследователями, см. [6–10] и ссылки в них. Общим для всех подходов является использование геометрических объектов неевклидовости: тензора кривизны, кручения и неметричности — в качестве переменных, характеризующих геометрическую структуру внутренних взаимодействий частиц сплошной среды между собой. Заметим, что в классической теории упругости эти тензоры равны нулю, что связано с гипотезой о совпадении внутренней геометрии материала с геометрией евклидова пространства наблюдателя. Любое малое шевеление этой структуры, то есть введение этих функций в классическую теорию, ведет к неевклидовой модели, которая имеет геометрическую структуру аффинно-метрического пространства.

С физической точки зрения геометрические характеристики аффинно-метрических пространств являются внутренними переменными и не могут быть измерены непосредственно. В частности, при решении инженерных проблем измерения уровня остаточных напряжений [3] микроскопическая детализация дефектной структуры количественно не используется. Оказывается, что достаточно построить более грубую неевклидову модель, модифицируя теорию упругости путем введения в нее дополнительного параметра, характеризующего несовместность деформаций. При этом на данном — макроскопическом — масштабном уровне рассмотрения поведения материалов неважно, какие физические дефекты определяют возникающую несовместность деформаций. Следует отметить, что авторы [3] на основе анализа экспериментальных данных указали аналитическое представление параметра несовместности деформаций для различных материалов.

Таким образом, точность измерений влияет на выбор неевклидовой модели, которой следует воспользоваться при интерпретации результатов экспериментальных исследований. Следовательно, с точки зрения механики сплошной среды возникает естественная необходимость анализа основных соотношений классической теории при отказе от условий совместности (1). В прямоугольных декартовых координатах ответ был получен для сплошной среды, находящейся в состоянии равновесия при отсутствии объемных сил [11] (формула (46)). Показано, что объект $C_{jk}(\varepsilon)$ (1) становится отличным от нуля, и в соотношениях (3) появляется дополнительная сила, характеризующая внутреннюю неевклидову геометрию материала. В настоящей работе ставится задача, во-первых, обобщить результат для случая наличия объемных сил и, во-вторых, записать полученные соотношения неевклидовой модели в ковариантной форме. Решение первой части не вызывает особых технических трудностей. Решение второй половины можно реализовать двумя путями.

Прямой путь заключается в том, чтобы, используя результат [11], применить методы тензорного анализа, позволяющие при замене переменных в системе отсчета получить соотношения неевклидовой модели в ковариантной форме. Эти преобразования не изменяют физического состояния материала и называются пассивными преобразованиями. Такой подход был реализован в [12] для ковариантной записи уравнений равновесия градиентной теории. Такой путь надежно приведет к правильному результату, но является трудоемким. В связи с этим следует указать на другой тип преобразований, зависящих от эволюции материала, в процессе которой сплошная среда переходит из одного состояния в другое. В соответствии с терминологией [13], такие преобразования следует отнести к типу активных преобразований систем отсчета наблюдателя. Подход настоящей работы состоит в том, чтобы рассмотреть активные преобразования, порожденные деформацией материала, и получить в результате их применения ковариантную форму обобщения классических условий несовместности и уравнений Бельтрами – Митчелла. Ковариантная форма записи не зависит от выбора системы отсчета, что позволяет использовать полученное представление для произвольных криволинейных координат. Кратко изложим содержание работы.

В разделе 2 дано представление внутренней метрики материала и коэффициентов неевклидовой связности, ассоциированной с ней. Получено соотношение между ними и евклидовыми коэффициентами связности, которое определяется через характеристики деформации материала. В разделе 3 представлено условие несовместности в ковариантной форме (28). Оно связывает деформации и тензор Риччи, который характеризует внутреннюю неевклидову геометрию материала. В разделе 4, используя результаты разделов 2, 3, записаны уравнения Бельтрами – Митчелла для неевклидовой модели сплошной среды, и в качестве справочной информации они представлены в декартовой прямоугольной и цилиндрической системе координат.

## 2. Метрический тензор и коэффициенты связности

Для трехмерного пространства тензор Римана – Кристоффеля полностью определяется тензором Риччи [2]:

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}^i_{km}\tilde{\Gamma}^m_{ji} - \tilde{\Gamma}^i_{im}\tilde{\Gamma}^m_{jk}, \tag{5}$$

в котором $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — коэффициенты симметрической связности, согласованной с внутренней метрикой $G_{ij}$:

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}G^{im}\left(\frac{\partial G_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial G_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{kl}}{\partial x^m}\right), \quad G^{ik}G_{kj} = \delta^i_j. \tag{6}$$

При этом внутренняя метрика определяется по полю эффективных деформаций следующим образом:

$$G_{ij} \equiv \delta_{ij} - 2\pi_{ij}. \tag{7}$$

В дальнейшем рассматриваются малые деформации $|\pi_{ij}| << 1$, тогда в линейном приближении формула (6) запишется в виде

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G^i_k}{\partial x^l} + \frac{\partial G^i_l}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{kl}}{\partial x^i}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial G_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial G_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{8}$$

Подстановка (8) в (5) дает в этом приближении

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G_{ik}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 G_{ii}}{\partial x^j \partial x^k} - \Delta G_{jk}\right) \equiv$$
$$= \tilde{R}_{jk}(\pi) \equiv \Delta\pi_{jk} + \frac{\partial^2 \pi_{ii}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \pi_{ik}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \pi_{ij}}{\partial x^k \partial x^i} \equiv C_{jk}(\pi).$$

Отсюда и из (1) следует, что выполнение условий совместности Сен-Венана эквивалентно обращению в нуль тензора Риччи $\tilde{R}_{ij} = 0$, то есть свойству евклидовости внутренней геометрии материала

Тензор Альманси $A_{ij}$ принадлежит к классу тензоров, порождаемых в трехмерном евклидовом пространстве векторным полем $u_i(x_1, x_2, x_3)$, и связан с внешней метрикой $\mathrm{g}_{ij}$ наблюдателя соотношением

$$\mathrm{g}_{ij} \equiv \delta_{ij} - 2A_{ij}. \tag{9}$$

Коэффициенты связности $\Gamma^i_{kl}$, ассоциированные с метрикой $\mathrm{g}_{ij}$, равны

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathrm{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathrm{g}_{kl}}{\partial x^m}\right), \mathrm{g}^{ik}\mathrm{g}_{kj} = \delta^i_j. \tag{10}$$

Они определяют тензор Риччи $R_{jk}$, который тождественно равен нулю, поскольку метрика $\mathrm{g}_{ij}$ является евклидовой:

$$R_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{ji} - \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{jk} \equiv 0. \tag{11}$$

В линейном приближении для $A_{ij}$ всегда справедливо тождество

$$C_{jk}(A) = 0. \tag{12}$$

Однако деформация реальных твердых тел сопровождается уже при умеренных нагрузках диссипативными эффектами, обусловленными появлением необратимой составляющей полной деформации. Для количественного описания таких процессов при малых деформациях обычно используется предположение об аддитивности обратимых $\varepsilon_{ij}$ и необратимых деформаций $\pi_{ij}$ [3]:

$$A_{ij} = \varepsilon_{ij} + \pi_{ij}. \tag{13}$$

Для конечных деформаций общепринятой связи между указанными тремя тензорами нет. Обсуждение более сложных, чем (13), нелинейных связей между ними дано, например, в [14].

Подставляя (13) в (12), получаем, что $C_{jk}(A){=}C_{jk}(\varepsilon){+}C_{jk}(\pi){=}0$. Отсюда и из (5) следует представление для тензора Риччи в виде

$$\tilde{R}_{ij}(\varepsilon) = -\tilde{R}_{ij}(\pi), \tag{14}$$

где $\tilde{R}_{ij}(\varepsilon)$ — тензор Риччи, построенный на обратимых деформациях, $\tilde{R}_{ij}(\pi)$ — тензор Риччи, построенный на необратимых деформациях.

Теперь установим связь между коэффициентами связности (6), (10). Из (7), (9), (13) следует линейное соотношение между компонентами метрического тензора внутренней и внешней метрик

$$G_{ij} = \mathrm{g}_{ij} + 2\varepsilon_{ij}. \tag{15}$$

Для обратных метрических тензоров $\hat{G}^{-1}$, $\hat{\mathrm{g}}^{-1}$ при малых обратимых деформациях из (15) также получаем линейное соотношение

$$\left(\hat{G}^{-1}\right)_{ij} \equiv G^{ij} \cong \left(\hat{\mathrm{g}}^{-1} - 2\hat{\mathrm{g}}^{-1}\hat{\varepsilon}\hat{\mathrm{g}}^{-1}\right)_{ij} = \mathrm{g}^{ij} - 2\mathrm{g}^{im}\varepsilon_{mp}\mathrm{g}^{pj}. \tag{16}$$

Подставим (15), (16) в (6) и учтем только линейные по обратимой деформации слагаемые $\varepsilon_{ij}$:

$$\begin{gathered}\tilde{\Gamma}^i_{kl} \cong \frac{1}{2}\mathrm{g}^{im}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathrm{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathrm{g}_{kl}}{\partial x^m}\right) - \mathrm{g}^{im}\left(\frac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^m}\right) - \\ - \mathrm{g}^{iq}\varepsilon_{qp}\mathrm{g}^{pm}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathrm{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathrm{g}_{kl}}{\partial x^m}\right).\end{gathered} \tag{17}$$

Отсюда и из (10) видно, что первое слагаемое в правой части (17) совпадает с $\Gamma^i_{kl}$, а выражение в последних скобках равно $2\mathrm{g}_{pm}\Gamma^p_{kl}$, тогда (17) редуцируется к

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} \cong \Gamma^i_{kl} - \mathrm{g}^{im}\left(\frac{\partial\varepsilon_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial\varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial x^m}\right) - 2\mathrm{g}^{iq}\varepsilon_{qp}\Gamma^p_{kl}. \tag{18}$$

Запишем соотношение (18) в тождественной форме:

$$\begin{gathered}\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + \mathrm{g}^{im}\left(\frac{\partial\varepsilon_{mk}}{\partial x^l} - \Gamma^p_{kl}\varepsilon_{mp} - \Gamma^p_{ml}\varepsilon_{pk} + \frac{\partial\varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kl}\varepsilon_{mp} - \Gamma^p_{km}\varepsilon_{pl}\right) \\ -\mathrm{g}^{im}\left(\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial x^m} - \Gamma^p_{km}\varepsilon_{pl} - \Gamma^p_{ml}\varepsilon_{pk}\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Слагаемые в скобках можно записать через ковариантную производную $\nabla_l\varepsilon_{mk}$ ковариантных компонент тензора второго ранга относительно евклидовой связности (10):

$$\nabla_l\varepsilon_{qp} = \frac{\partial\varepsilon_{qp}}{\partial x^l} - \Gamma^p_{kl}\varepsilon_{qp} - \Gamma^p_{ml}\varepsilon_{qp}. \tag{20}$$

Поскольку метрика согласована со связностью, то операция поднятия индекса коммутирует с операцией ковариантного дифференцирования [2]:

$$\mathrm{g}^{im}\nabla_l\varepsilon_{mk} = \nabla_l\mathrm{g}^{im}\varepsilon_{mk} \equiv \nabla_l\varepsilon^i_k, \varepsilon^i_k = \mathrm{g}^{im}\varepsilon_{mk}. \tag{21}$$

Используя (20), (21), получаем представление для коэффициентов связности (19) в виде

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + \nabla_l\varepsilon^i_k + \nabla_k\varepsilon^i_l - \mathrm{g}^{im}\nabla_m\varepsilon_{kl}. \tag{22}$$

Подняв индекс $m$, получим тензор

$$\nabla^i\varepsilon_{kl} = \mathrm{g}^{im}\nabla_m\varepsilon_{kl}. \tag{23}$$

Введем симметричный по нижним индексам тензор

$$E^i_{kl} = \nabla_l\varepsilon^i_k + \nabla_k\varepsilon^i_l - \nabla^i\varepsilon_{kl}, \tag{24}$$

тогда из (22)–(24) следует окончательное представление для коэффициентов связности

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + E^i_{kl}. \tag{25}$$

Соотношение (25) можно рассматривать как преобразование связности, и в научной литературе [15] объект $E^i_{kl}$ называется тензором аффинной деформации.

## 3. Связь тензора Риччи с полями деформаций и напряжений

При вычислении тензора Риччи (5) следует учитывать только линейные по $\varepsilon_{ij}$ вклады, тогда из (5), (25) в линейном приближении получаем следующее представление для него:

$$\tilde{R}_{jk} \cong R_{jk} + \frac{\partial E^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial E^i_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{km}E^m_{ji} + \Gamma^m_{ji}E^i_{km} - \Gamma^m_{jk}E^i_{im} - \Gamma^i_{im}E^m_{jk} \tag{26}$$

Тензор $R_{jk}=0$ в силу условия (11), остальные слагаемые можно записать через ковариантную производную компонент тензора $E^s_{jk}$ относительно евклидовой связности (10):

$$\nabla_i E^s_{jk} = \frac{\partial E^s_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^m_{ji} E^s_{mk} - \Gamma^m_{ki} E^s_{jm} + \Gamma^s_{mi} E^m_{jk}. \tag{27}$$

Отсюда и из (26) следует

$$\tilde{R}_{jk} \cong \nabla_k E^i_{ji} - \nabla_i E^i_{jk}.$$

Переходя к деформациям $\varepsilon$ (24), получим

$$\tilde{R}_{jk} \equiv \tilde{R}_{jk}(\varepsilon) \cong \nabla_i \nabla^i \varepsilon_{jk} + \nabla_k \nabla_j \varepsilon^i_i - \nabla^i \nabla_j \varepsilon_{ik} - \nabla^i \nabla_k \varepsilon_{ij}. \tag{28}$$

По построению тензор Риччи обладает свойством симметрии. В представлении для него (28) первое, третье и четвертое слагаемые симметричны. Убедимся в том, что

$$\nabla_j \nabla_k \varepsilon^i_i = \nabla_k \nabla_j \varepsilon^i_i.$$

Действительно, используя (27), запишем последовательность вычислений

$$\nabla_j \nabla_k \varepsilon^i_i = \nabla_j \frac{\partial \varepsilon^i_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \varepsilon^i_i}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^m_{jk} \frac{\partial \varepsilon^i_i}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \varepsilon^i_i}{\partial x^k \partial x^j} - \Gamma^m_{kj} \frac{\partial \varepsilon^i_i}{\partial x^m} \equiv \nabla_k \nabla_j \varepsilon^i_i.$$

Закон Гука (3) позволяет представить тензор Риччи (28) в терминах напряжений:

$$\tilde{R}_{jk} \cong \frac{1}{2\mu}\left(\nabla_i \nabla^i \sigma_{jk} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \nabla_k \nabla_j \sigma^i_i - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \delta_{jk} \nabla_i \nabla^i \sigma^k_k - \nabla_j \nabla^i \sigma_{ik} - \nabla_k \nabla^i \sigma_{ij}\right). \tag{29}$$

## 4. Уравнения Бельтрами – Митчелла

В ковариантной форме уравнения равновесия (2) имеют вид [12]

$$\nabla_i \sigma^i_k + F_k = 0.$$

Комбинируя эти соотношения с (29), получаем уравнения Бельтрами – Митчелла неевклидовой модели сплошной среды

$$\tilde{R}_{jk} \cong \frac{1}{2\mu}\left(\nabla_i \nabla^i \sigma_{jk} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \nabla_k \nabla_j \sigma^i_i - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \delta_{jk} \nabla_i \nabla^i \sigma^n_n + \nabla_j F_k + \nabla_k F_j\right). \tag{30}$$

Учитывая (14), запишем (30) в виде

$$\nabla_i \nabla^i \sigma_{jk} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \nabla_k \nabla_j \sigma^i_i - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \delta_{jk} \nabla_i \nabla^i \sigma^n_n + \nabla_j F_k + \nabla_k F_j + 2\mu \tilde{R}_{jk}(\pi) = 0. \tag{31}$$

Приведем справочные формулы для системы (31) в разных системах координат.

В декартовой системе координат уравнения (31) записываются в виде

$$
\begin{gathered}
\Delta\sigma_{xx} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta\sigma + 2\frac{\partial F_x}{\partial x} + 2\mu R_{xx}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{yy} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta\sigma + 2\frac{\partial F_y}{\partial y} + 2\mu R_{yy}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{zz} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta\sigma + 2\frac{\partial F_z}{\partial z} + 2\mu R_{zz}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{xy} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} + \frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} + 2\mu R_{xy}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{xz} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial z} + \frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} + 2\mu R_{xz}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{yz} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial z} + \frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} + 2\mu R_{yz}(\pi) = 0,
\end{gathered}
$$

где $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$.

В цилиндрической системе координат уравнения (31) примут вид

$$
\begin{gathered}
\Delta\sigma_{rr} - \frac{2}{r^2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta\sigma + 2\frac{\partial F_r}{\partial r} + 2\mu R_{rr}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r^2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\sigma - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta\sigma +\\
+2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{F_r}{r}\right) + 2\mu R_{\varphi\varphi}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{zz} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta\sigma + 2\frac{\partial F_z}{\partial z} + 2\mu R^u_{zz}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{r\varphi} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\sigma_{\varphi z}}{r^2} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{F_\varphi}{r} +\\
+2\mu R_{r\varphi}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{\varphi z} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\varphi\partial z} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\varphi} - \frac{\sigma_{\varphi z}}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} + 2\mu R_{\varphi z}(\pi) = 0,\\
\Delta\sigma_{rz} + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial r\partial z} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi} - \frac{\sigma_{rz}}{r^2} + \frac{\partial F_r}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial r} + 2\mu R_{rz}(\pi) = 0,
\end{gathered}
$$

здесь $\sigma = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}$, $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

## Список литературы


[1] Годунов С. К., *Элементы механики сплошной среды*, Наука, М., 1978, 304 с.

[2] Новиков С. П., Тайманов И. А., *Современные геометрические структуры и поля*, МЦНМО, М., 2005, 584 с.

[3] Чернышев Г. Н., Попов А. П., Козинцев В. М., Пономарев И. И., *Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах*, Наука, М., 1996, 240 с.

[4] Kondo K., “On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding”, *Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech. Tokyo*, **231**, (1953), 41–47.

[5] Bilby B. A., Bullough R., Smith E., “Continuos distributions of dislocations: a new application of the methods of non - Reimannian geometry”, *Proc. Roy. Soc. A.*, **231**, (1955), 263–273.

[6] Седов Л. И., “Математические методы построения новых моделей сплошных сред”, *УМН*, **20**:5(125), (1965), 121–180.

[7] Кадич А., Эделен Д., *Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций*, Мир, М., 1987, 168 с.

[8] Панин В. Е., Гриняев Ю. В., Данилов В. И., *Структурные уровни пластической деформации и разрушения*, Наука, Новосибирск, 1990, 225 с.

[9] Grachev A. V., Nesterov A. I., Ovchinikov S. G., “The Gauge Theory of Point Defects”, *Phys.Stat. Sol.(b)*, **156**, (1989), 403–410.

[10] Мясников В. П., Гузев М. А., “Аффинно-метрическая структура упругопластической модели сплошной среды”, *Современные методы механики сплошных сред*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Леонида Ивановича Седова, Труды МИАН, **223**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 1998, 30–37.

[11] Гузев М. А., Мясников В. П., “Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды”, *Дальневост. матем. журн.*, **2**:2, (2001), 29–44.

[12] Гузев М. А., Qi Ch., “Вывод уравнений градиентной теории в криволинейных координатах”, *Дальневост. матем. журн.*, **13**:1, (2013), 35–42.

[13] Ляховский В. Д., Болохов А. А., *Группы симметрии и элементарные частицы*, Изд-во Ленингр. ун-та., Л., 1983, 336 с.

[14] Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В., “Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях”, *ДАН*, **347**, (1996), 199–201.

[15] Норден А. П., *Пространства аффинной связности*, Наука, М., 1976, 584 с.

Поступила в редакцию
13 мая 2024 г.

Работа выполнена при поддержке гранта Фонда целевого капитала Дальневосточного федерального университета № Д-231-22.

---

*Guzev M. A.*[1], *Lyubimova O. N.*[2], *Pestov K. N.*[3] Beltrami-Mitchell equations in a non-Euclidean continuum model. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 2. P. 178–186.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
[2] Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
[3] Russian Customs Academy Vladivostok Branch, Vladivostok, Russia

## ABSTRACT

This work contains a generalization in covariant form of the classical Beltrami-Mitchell equations for the case of incompatible deformations. It is shown that in the corresponding relations an additional force appears, characterizing the internal non-Euclidean geometry of the material, the description of which is given in terms of the Ricci tensor.

Key words: *Saint-Venant consistency conditions, Beltrami-Mitchell equations, non-Euclidean continuum model, Ricci tensor.*