Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 1. С. 141–150

УДК 511.3
MSC2020 11B37+11A63+11K16

© А. В. Шутов[1]

О числах с заданными последними цифрами разложения по линейной рекуррентной последовательности

В работе изучаются числа с заданным окончанием разложения по линейной рекуррентной последовательности. С использованием теории фракталов Рози получено описание возможных плотностей таких чисел, а также возможных первых разностей между ними.

Ключевые слова: *разложения по линейной рекуррентной последовательности, последние цифры, плотности, первые разности, фракталы Рози.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202413

Введение

Пусть $a_1,\ldots,a_d$ — натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{d-1} \geqslant a_d = 1.$$

Определим последовательность $\{T_n\}$ при помощи линейного рекуррентного соотношения

$$T_n = a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_d T_{n-d}.$$

Начальные условия будут иметь вид

$$T_0 = 1,$$

и

$$T_n = 1 + a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0$$

для $n<d$. В этом случае любое натуральное число N допускает однозначное жадное разложение по последовательности $\{T_n\}$:

$$N = \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k. \tag{1}$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60. Электронная почта: a1981@mail.ru

Жадность разложения (1) означает, что для любого $m_1 < m(N)$ выполняются неравенства $0 \leqslant N - \sum\limits_{k=m_1}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k < T_{m_1}$.

Пусть $w = w_{m-1} \dots w_0$ — слово длиной m над алфавитом $\{0, \dots, a_1\}$. Пусть

$$\mathbb{N}(w) = \{N \in \mathbb{N} : \varepsilon_k(N) = w_k, 0 \leqslant k < m\}$$

— множество натуральных чисел, разложения которых по последовательности $\{T_n\}$ заканчиваются на слово w.

Вообще говоря, множество $\mathbb{N}(w)$ может оказаться пустым. Слово w будем называть допустимым, если множество $\mathbb{N}(w)$ непусто. Легко увидеть, что в этом случае $\mathbb{N}(w)$ будет содержать бесконечно много чисел. Обозначим через Adm множество всех допустимых слов, а через Adm_n — множество допустимых слов длиной n.

Для допустимого слова $w \in Adm$ определим плотность соответствующего множества $\mathbb{N}(w)$:

$$\rho(w) = \lim_{N \to \infty} \frac{\sharp\{k < N : k \in \mathbb{N}(w)\}}{N}.$$

Пусть также

$$Dens_n = \{\rho(w) : w \in Adm_n\}$$

— множество различных плотностей, достигаемых на допустимых словах длиной n. Можно показать, что число таких слов равно T_n и, следовательно, экспоненциально растет с ростом n. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого n множество $Dens_n$ содержит не более d элементов. При достаточно больших n это множество содержит в точности d элементов.*

Данная теорема в частности означает, что число возникающих плотностей фактически не зависит от длины окончания разложения по линейной рекуррентной последовательности.

Далее, пусть $n_1(w), n_2(w), \dots, n_k(w), \dots$ — все числа из $\mathbb{N}(w)$, расположенные в порядке возрастания. Рассмотрим множество первых разностей между этими числами

$$Diff(w) = \{n_{k+1}(w) - n_k(w) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 2. *Для любого допустимого слова $w \in Adm_n$ множество $Diff(w)$ содержит не более d элементов. При достаточно больших n это множество содержит в точности d элементов.*

Определим также множество

$$Diff_n = \bigcup_{w \in Adm_n} Diff(w).$$

Теорема 3. *Для любого n множество $Diff_n$ содержит не более $2d - 1$ элементов. При достаточно больших n это множество содержит в точности $2d - 1$ элемент.*

1. Предварительные сведения I: допустимые слова, разбиение Рози и теорема геометризации

Вначале дадим явное описание допустимых слов.

Рассмотрим граф, содержащий d вершин, помеченных числами $0,1,\dots,d-1$. Ребра графа имеют следующий вид:

1) a_1 ориентированных петель в вершине 0, помеченных числами от 0 до a_1-1;

2) ориентированные ребра из вершины i в вершину $i+1$, помеченные числами a_{i+1};

3) a_{i+1} ориентированных ребер из вершины i в вершину 0, помеченные числами от 0 до $a_{i+1}-1$.

Обозначим построенный граф через Gr.

Каждому конечному пути $v_0 \xrightarrow{c_0} v_1 \xrightarrow{c_1} \dots \xrightarrow{c_{m-1}} v_m$ в графе Gr можно сопоставить слово $c_0c_1\dots c_{m-1}$, составленное из меток ребер пути. Справедливо следующее утверждение [1].

Предложение 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) слово w допустимо;

2) слово w получено из некоторого пути графа Gr, начинающегося в вершине 0;

3) каждое подслово слова w лексикографически меньше слова $a_1\dots a_d$.

Наша следующая цель — дать геометрическое описание множества $\mathbb{N}(w)$. Данное описание основано на теории фракталов Рози.

Из условий на коэффициенты линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$ вытекает [2], что наибольший по модулю корень β уравнения

$$x^d - a_1x^{d-1} - a_2x^{d-2} - \dots - a_d = 0 \tag{2}$$

действительный, причем $\beta>1$. Все остальные корни уравнения (2) по модулю меньше 1. Другими словами, β является числом Пизо.

Пусть $\beta^{(1)},\dots,\beta^{(r_1)}$ — действительные сопряженные к β и $\beta^{(r_1+1)}$, $\overline{\beta^{(r_1+1)}}$, ..., $\beta^{(r_1+r_2)}$, $\overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ — комплексные сопряженные к β. Определим отображение $\Phi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{d-1}$ равенством

$$\Phi(N) = \left(\sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\left(\beta^{(1)}\right)^k, \dots, \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\left(\beta^{(r_1)}\right)^k, \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\left(\operatorname{Re}\beta^{(r_1+1)}\right)^k, \right.$$
$$\left.\sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\left(\operatorname{Im}\beta^{(r_1+1)}\right)^k, \dots, \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\left(\operatorname{Re}\beta^{(r_1+r_2)}\right)^k, \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\left(\operatorname{Im}\beta^{(r_1+r_2)}\right)^k\right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathbb{N})}$$

называется фракталом Рози (черта сверху обозначает замыкание) (см. например [3, 4] и указанную там литературу).

Далее мы опишем семейство разбиений фрактала Рози на меньшие фракталы. Подробное описание данной конструкции и доказательства сформулированных утверждений можно найти в [5, 6].

Пусть $Adm_n(j)$ — множество допустимых слов длиной n, для которых соответствующие пути в графе Gr заканчиваются в вершине j. Для любого слова $u \in Adm_{d-1}(j)$ обозначим через $\widetilde{A}_n(j)$ множество слов w длиной n, для которых слово uw допустимо. Легко увидеть, что $\widetilde{A}_n(j)$ не зависит от выбора u и представляет собой множество допустимых слов длиной n, для которых существует соответствующий им путь с началом в j. Для каждого $w \in \widetilde{A}_n(j)$ определим множество

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \overline{\Phi\left(\bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} \mathbb{N}(uw)\right)}.$$

Предложение 2. *Для любого n имеет место разбиение*

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{w \in \widetilde{A}_n(j)} \mathcal{R}_{n,j}(w)$$

фрактала Рози $\mathcal{T}$ на множества $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ без общих внутренних точек. Мера границы каждого из множеств $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ равна нулю.

Доказательство можно найти в [5]. Построенное разбиение называется разбиением Рози порядка n.

Предложение 3. *Пусть $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Тогда для любого n и любого слова $w \in \widetilde{A}_n(j)$ справедливо равенство*

$$mes\mathcal{R}_{n,j}(w) = \frac{\beta^{d-1-j-n}}{\sum\limits_{l=0}^{d-1} \beta^l} mes\mathcal{T}.$$

Доказательство можно найти в [6].

Пусть $Adm(j) = \bigcup\limits_n Adm_n(j)$ — множество слов, которым соответствуют пути графа Gr, начинающиеся вершине 0 и заканчивающиеся в вершине j, $\mathbb{N}(j) = \{n \in \mathbb{N} : w(n) \in Adm(j)\}$ и $\mathcal{T}(j) = \overline{\Phi(\mathbb{N}(j))}$. Разбиение $\mathcal{T} = \bigsqcup\limits_{j=0}^{d-1} \mathcal{T}(j)$ совпадает с ранее определенным разбиением Рози порядка 0. При этом на нем можно определить отображение перекладывания областей S условием $S(x) = x + v_j$, если $x \in \mathcal{T}(j)$, где вектор $v_j = \Phi(n+1) - \Phi(n)$ при $n \in \mathbb{N}(j)$. Обоснование корректности приведенного определения изложено, например, в [4]. Можно показать [4], что отображение S на самом деле является топологически полусопряженным к некоторому иррациональному сдвигу тора. Отсюда вытекает, что точки орбиты отображения S равномерно распределены на $\mathcal{T}$.

Пусть $w \in Adm_n$ — допустимое слово длиной n. Пусть $J(w)$ — множество вершин графа Gr, для которых существует путь в Gr, начинающийся в вершине j и помеченный словом w. Пусть

$$\mathcal{T}(w) = \bigsqcup_{j \in J(w)} \mathcal{R}_{n,j}.$$

В [6] доказана следующая теорема геометризации для разложений по линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$.

Теорема 4. *Для любого допустимого слова* w $n \in \mathbb{N}(w)$ *тогда и только тогда, когда* $S^n(0) \in \mathcal{T}(w)$.

2. Доказательство теоремы 1

Из теоремы 4, предложения 3 и равномерной распределенности орбиты отображения S вытекает, что

$$\rho(w) = \frac{\sum\limits_{j\in J(w)} \beta^{d-1-j-n}}{\sum\limits_{l=0}^{d-1} \beta^l}.$$

Таким образом, при фиксированном n $\rho(w)$ зависит только от $J(w)$, и мощность множества $Dens_n$ равна мощности множества $\{J(w) : w \in Adm_n\}$. При этом, поскольку $J(w) \subseteq \{0,1,\dots,d-1\}$, мы немедленно получаем, что мощность множества $Dens_n$ не превосходит 2^d.

Заметим, что, по определению допустимого слова, всегда $0 \in J(w)$.

Для доказательства первой части теоремы 1 достаточно показать, что $J(w) = \{0,\dots,k\}$ для некоторого $k \in \{0,\dots,d-1\}$. Это утверждение эквивалентно тому, что из условия $k \in J(w)$ вытекает, что $k-1 \in J(w)$. Докажем данный факт.

Пусть $k = d-1$. Тогда из рассмотрения графа Gr вытекает, что $w = 0w'$, где w' – некоторое допустимое слово. При этом из любой вершины графа Gr выходит ориентированное ребро в вершину 0, помеченное меткой 0, а из вершины 0 существует путь, помеченный метками, соответствующими любому допустимому слову. Поэтому в этом случае $J(w) = \{0,1,\dots,d-1\}$ и, в частности, $k-1 \in J(w)$.

Пусть теперь $k < d-1$. Тогда возможно два случая.

1) $w = lw'$, где $l \in \{0,\dots,a_{k+1}-1\}$ и w' — некоторое допустимое слово. Так как $a_k \geqslant a_{k+1}$, получаем $l \in \{0,\dots,a_k - 1\}$ и из рассмотрения графа Gr вновь видим, что существует ребро из вершины k в вершину 0, помеченное меткой l и, следовательно, $k-1 \in J(w)$.

2) $w = a_{k+1}w'$. Тогда $w = a_{k+1}\dots a_m l w''$, где $l < a_{m+1}$ (или $l = 0$ при $m = d-1$) и слово w'' допустимо. Тогда из неравенств $a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant \dots \geqslant a_l$ вытекает, что существует путь $k-1 \to k \to \dots \to l-1 \to 0$ в графе Gr, помеченный словом $w = a_{k+1}\dots a_m l$, и вновь $k-1 \in J(w)$.

Для доказательства второй части теоремы 1 заметим, что если w' — непустое допустимое слово, то для слова $w = a_k a_{k+1} \dots a_{d-1} 0 w'$ выполняется равенство $J(w) = \{0,\dots,k-1\}$.

Заметим, что приведенное доказательство дает нам также явные значения всех элементов их $Dens_n$ при достаточно больших n.

3. Предварительные сведения II: разбиения Рози и действие перекладывания S

Для доказательства теорем 2 и 3 нам потребуются дополнительные сведения о разбиениях Рози, такие как числа тайлов в них, взаимоотношение между разбиениями различных порядков и описание действия отображения S на разбиении. Приведем здесь формулировки необходимых нам утверждений. Доказательства можно найти в [5, 6].

Пусть $R_{n,j}$ — число тайлов вида $\mathcal{R}_{n,j}(w)$. Данные числа могут быть выражены в терминах последовательности $\{T_n\}$.

Предложение 4. *Справедливы равенства*

$$R_{n,0} = T_n$$

и

$$R_{n,j} = \sum_{r=0}^{d-j-1} a_{r+j+1} T_{n-r-1}$$

для $1 \leqslant j \leqslant d-1$.

Тайлы разбиений Рози порядков n и $n+1$ связаны между собой следующим образом.

Предложение 5. *При* $j > 0$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \mathcal{R}_{n+1,j-1}(a_j w).$$

Кроме того,

$$\mathcal{R}_{n,0}(w) = \bigsqcup_{j'=0}^{d-1} \bigsqcup_{v=0}^{a_{j'+1}-1} \mathcal{R}_{n+1,j'}(vw).$$

Опишем действие отображения S на разбиениях Рози.

Предложение 6. *Пусть* $w_{max}(n,j)$ *— лексикографически максимальное слово из* $\widetilde{A}_n(j)$. *Тогда для любого слова* $w \in \widetilde{A}_n(j)$, $w \neq w_{max}(n,j)$ *найдется слово* $w' \in \widetilde{A}_n(j)$, *такое, что*

$$S(\mathcal{R}_{n,j}(w)) = \mathcal{R}_{n,j}(w').$$

Более того, w' *представляет собой лексикографически следующее за* w *слово из* $\widetilde{A}_n(j)$.

Предложение 7. *Справедливо равенство*

$$\bigsqcup_{j=0}^{d-1} S(\mathcal{R}_{n,j}(w_{max}(n,j))) = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

4. Доказательства теорем 2 и 3

Пусть $w \in Adm_n$ — допустимое слово длиной n. Для $X \subseteq \mathcal{T}$ и $x \in X$ рассмотрим время первого возвращения точки x в X под действием отображения S:

$$ret_X(x) = \min\{k > 0 : S^k(x) \in X\}.$$

Тогда, в силу теоремы 4,

$$Diff(w) = \{ret_{\mathcal{T}(w)}(x) : x \in \mathcal{T}(w)\}.$$

Пусть $J(w) = \{0, 1, \ldots, k\}$ и

$$\mathcal{T}_{n,k} = \bigsqcup_{j=0}^{k} \mathcal{R}_{n,j}(0^n), \tag{3}$$

где 0^n означает слово из n нулей. Из предложения 6 вытекает, что существует $s = s(w)$ такое, что

$$S^s(\mathcal{T}_{n,k}) = \mathcal{T}(w).$$

Поэтому

$$Diff(w) = \{ret_{\mathcal{T}(w)}(x) : x \in \mathcal{T}(w)\} = \{ret_{\mathcal{T}_{n,k}}(x) : x \in \mathcal{T}_{n,k}\}.$$

Предложение 5 позволяет переписать (3) в виде

$$\mathcal{T}_{n,k} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{v=0}^{a_{j+1} - [j \geqslant k]} \mathcal{R}_{n+1,j}(v0^n),$$

где

$$[j \geqslant k] = \begin{cases} 1, & j \geqslant k \\ 0, & j < k. \end{cases}$$

Пусть также

$$\mathcal{T}^0_{n,k} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n+1,j}(0^{n+1}).$$

Ясно, что $\mathcal{T}^0_{n,k} \subset \mathcal{T}_{n,k}$.

Найдем времена первого возвращения для точек из $\mathcal{T}_{n,k}$. Рассмотрим три случая.

1. $j = d-1$. Тогда единственным допустимым значением v является $v = 0$ и, следовательно, $x \in \mathcal{R}_{n+1,d-1}(0^{n+1})$. В силу предложений 6 и 7 S-орбита тайла $\mathcal{R}_{n+1,d-1}(0^{n+1})$ имеет вид

$$\mathcal{R}_{n+1,d-1}(0^{n+1}) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n+1,d-1}(w_{max}(n+1, d-1)) \to$$
$$\to S(\mathcal{R}_{n+1,d-1}(w_{max}(n+1, d-1))) \subset \mathcal{T}^0_{n,k} \subset \mathcal{T}_{n,k}.$$

При этом все промежуточные тайлы цепочки не принадлежат $\mathcal{T}_{n.k}$. Следовательно, в данном случае время первого возвращения равно длине цепочки, то есть $ret_{\mathcal{T}_{n,k}}(x) = R_{n+1,d-1}$. С учетом предложения 4, находим, что $ret_{\mathcal{T}_{n,k}}(x) = T_n$.

2. $0 \leqslant j \leqslant d-2$ и $0 \leqslant v < a_{j+1} - [j \geqslant k]$. Отметим, что множество подходящих v может быть пустым. В этом случае $x \in \mathcal{R}_{n+1,j}(v0^n)$ и можно рассмотреть следующий фрагмент S-орбиты тайла $\mathcal{R}_{n+1,j}(v0^n)$:

$$\mathcal{R}_{n+1,j}(v0^n) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n+1,j}\big((v+1)0^n\big) \subset \mathcal{T}_{n,k}$$

в которой все промежуточные тайлы не принадлежат $\mathcal{T}_{n,k}$. В силу предложения 5 каждый тайл вида $\mathcal{R}_{n+1,j}(v0^n)$ получается из тайла вида $\mathcal{R}_{n,0}(0^n)$. Поэтому длина рассматриваемой цепочки равна длине цепочки

$$\mathcal{R}_{n,0}(0^n) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n,0}\big(w_{max}(n,0)\big) \to S\big(\mathcal{R}_{n,0}\big(w_{max}(n,0)\big)\big).$$

Получаем $ret_{\mathcal{T}_{n,k}}(x) = R_{n,0}$. С учетом предложения 4 вновь $ret_{\mathcal{T}_{n,k}}(x) = T_n$.

3. $0 \leqslant j \leqslant d-2$ и $v = a_{j+1} - [j \geqslant k]$. В этом случае интересующий нас фрагмент S-орбиты тайла $\mathcal{R}_{n+1,j}(v0^n)$ имеет вид

$$\begin{gathered} \mathcal{R}_{n+1,j}\big(v0^n\big) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n+1,j}\big(w_{max}(n+1,j)\big) \to \\ \to S\big(\mathcal{R}_{n+1,j}\big(w_{max}(n+1,j)\big)\big) \subset \mathcal{T}^0_{n,k} \subset \mathcal{T}_{n,k} \end{gathered} \tag{4}$$

и все промежуточные тайлы не принадлежат $\mathcal{T}_{n,k}$. Рассмотрим фрагменты S-орбит

$$\begin{gathered} \mathcal{R}_{n+1,j}\big(0^{n+1}\big) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n+1,j}\big(v0^n\big) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n+1,j}\big(w_{max}(n+1,j)\big) \to \\ \to S\big(\mathcal{R}_{n+1,j}\big(w_{max}(n+1,j)\big)\big) \end{gathered} \tag{5}$$

и

$$\mathcal{R}_{n+1,j}(0^{n+1}) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n+1,j}(10^n) \to \ldots \to \mathcal{R}_{n+1,j}(v0^n). \tag{6}$$

Очевидно, что длина цепочки (4) равна разности длин цепочек (6) и (5). Поэтому $ret_{\mathcal{T}_{n,k}}(x) = R_{n+1,j} - vR_{n,0}$. Используя предложение 4, находим, что

$$ret_{\mathcal{T}_{n,k}}(x) = [j \geqslant k]T_n + \sum_{r=1}^{d-j-1} a_{r+j+1}T_{n-r}.$$

Таким образом, мы получили

$$Diff(w) = \{T_n\} \cup \bigcup_{j=0}^{d-2} \left\{ [j \geqslant k]T_n + \sum_{r=1}^{d-j-1} a_{r+j+1}T_{n-r} \right\},$$

откуда и следует теорема 2.

Для доказательства теоремы 3 остается заметить, что

$$Diff_n = \{T_n\} \cup \bigcup_{j=0}^{d-2} \left\{ \sum_{r=1}^{d-j-1} a_{r+j+1}T_{n-r} \right\} \cup \bigcup_{j=0}^{d-2} \left\{ T_n + \sum_{r=1}^{d-j-1} a_{r+j+1}T_{n-r} \right\}.$$

5. Геометризация первых разностей и одна нерешенная задача

Пусть $w \in Adm_n$ и $Diff(w) = \{\delta_0(w), \ldots, \delta_{d-1}(w)\}$. При доказательстве теоремы 2 нами фактически было показано, что существует разбиение $\mathcal{T}(w) = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} D_j(w)$ множества $\mathcal{T}(w)$ на множества $D_j(w)$, $0 \leqslant j \leqslant d-1$ без общих внутренних точек и с границей нулевой меры и такие, что $n_{k+1}(w) - n_k(w) = \delta_j(w)$ тогда и только тогда, когда $S^{n_k(w)} \in D_j(w)$.

Определим $v_j(w) = \Phi(\delta_j(w))$ и рассмотрим отображение $S_w : \mathcal{T}(w) \to \mathcal{T}(w)$ с условием $S_w(x) = x + v_j(w)$, если $x \in D_j(w)$. Это отображение является перекладыванием областей $D_j(w)$, и справедлив аналог теоремы 4.

Теорема 5. *Для любого допустимого слова* w $n_{k+1}(w) - n_k(w) = \delta_j(w)$ *тогда и только тогда, когда* $S_w^k(n_1(w)) \in D_j(w)$.

В случае $J(w) = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ из результатов работы [6] вытекает, что множество $\mathcal{T}(w)$ аффинно эквивалентно $\mathcal{T}$, а, следовательно, S_w топологически полусопряжено тому же сдвигу тора, что и отображение S.

В общем случае это неверно. Тем не менее остается нерешенной следующая задача: верно ли, что для любого допустимого слова w множество $\mathcal{T}(w)$ является фундаментальной областью некоторой решетки? Если да, верно ли, что перекладывание S_w топологически полусопряжено некоторому иррациональному сдвигу тора?

Положительный ответ будет означать, что множества $\mathbb{N}(w)$ являются квазирешетками в смысле работы [7], что, в частности, позволит оценивать тригонометрические суммы вида $\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i n_k(w)\lambda}$.

Список литературы

[1] Berthe V., Siegel A., “Tilings associated with beta-numeration and substitution”, *Integers: electronic journal of combinatorial number theory*, **5**, (2008), A02.

[2] Frougny C., Solomyak B., “Finite beta-expansions”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **12**:4, (1992), 713–723.

[3] Akiyama S., “Pisot number system and its dual tiling”, *Physics and Theoretical Computer Science*, IOS Press, 2007, 133–154.

[4] Berthe V., Siegel A., “Tilings associated with beta-numeration and substitution”, *Integers: electronic journal of combinatorial number theory*, **5**, (2008), A02.

[5] Шутов А. В., “Обобщенные разбиения Рози и множества ограниченного остатка”, *Чебышевский сборник*, **20**:3, (2019), 372–389.

[6] Шутов А. В., “Обобщенные разбиения Рози и линейные рекуррентные последовательности”, *Чебышевский сборник*, **22**:2, (2021), 313–333.

[7] Шутов А. В., “Тригонометрические суммы над одномерными квазирешетками произ-

вольной коразмерности", *Математические заметки*, **97**:5, (2015), 781–793.

Поступила в редакцию
4 сентября 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00065, https://rscf.ru/project/19-11-00065/.

Shutov A. V.[1] On numbers with fixed last digits of linear recurrent base expansion. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 1. P. 141–150.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

We study some properties of natural numbers with fixed last digits of linear recurrent base expansion. Using the theory of Rauzy fractals we describe possible densities of such numbers and possible first differences between them.

Key words: *linear recurrent base expansion, last digits, densities, first differences, Rauzy fractals.*