Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 1. С. 133–140

УДК 517.95
MSC2020 35J61, 35Q79

 А. Ю. Чеботарев[1]

Экстремальные задачи для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения

Рассмотрен анализ задач оптимального управления для нелинейной системы, моделирующей нестационарный сложный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Представлены оценки решения начально-краевой задачи, разрешимость задач управления и выведены условия оптимальности, приводящие к релейности оптимального управления.

Ключевые слова: *квазистационарные уравнения сложного теплообмена, френелевские условия сопряжения, задачи оптимального управления, система оптимальности, свойство «bang–bang».*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202412

1. Введение. Постановка задачи оптимального управления

Вывод модели сложного теплообмена с использованием P_1–приближения для уравнения переноса излучения в многокомпонентной области с учетом эффектов отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления и анализ краевых и обратных задач представлен в [1–7]. Отметим также интересные результаты анализа начально-краевых задач для полной модели сложного теплообмена [8, 9].

В данной заметке представлены результаты анализа задач оптимального управления для квазистационарной модели сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления [10], на основе которых получены системы оптимальности для новых задач управления с наблюдением на внутренней границе и финальным наблюдением.

Рассмотрим ограниченную липшицеву область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, содержащую конечное число липшицевых подобластей Ω_j, $j=1,\dots,p$, замыкания которых не пересекаются и

[1] ДВФУ, Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, 690922, Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10. Электронная почта: `chebotarev.ayu@dvfu.ru`

принадлежат Ω; $\Omega_0 = \Omega \setminus (\bigcup_{j=1}^{p} \bar{\Omega}_j)$, $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1,\ldots,p$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Пусть θ — нормализованная температура и φ — нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. В каждой из областей Ω_j, $j = 0,\ldots,p$, выполняются уравнения

$$r\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = u, \quad -\alpha\Delta\varphi + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{1}$$

Положительные кусочно-постоянные параметры r, a, b, α и β, описывающие свойства среды, определены в [1, 6]. Функция u моделирует тепловые источники.

На $\Gamma = \partial\Omega$ задаются краевые условия (через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе)

$$a\partial_n\theta + c(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где θ_b заданная граничная температура, $c > 0$ — коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \leqslant 1/2$ — параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности Γ. На внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1,\ldots,p$, для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$ выполняются условия сопряжения [1],

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0\partial_n\theta_0 = a_j\partial_n\theta_j, \tag{3}$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_n\varphi_0 = n_j^2\alpha_j\partial_n\varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0\partial_n\varphi_0. \tag{4}$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ — заданные параметры. Кроме того,

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{5}$$

Через L^s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ обозначаем пространства Лебега s-интегрируемых функций, $H^s = W_2^s$ — пространства Соболева; $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$,

$$W = \{w \in H,\ w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j),\ j = 0,\ldots,p\}.$$

При этом $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$; (f,v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H, если $f, v \in H$;

$$\|v\|^2 = (v,v); \quad (v,w)_j = (v,w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v,v)_j; \quad (v,w)_W = \sum_{j=0}^{p}(v,w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через $L^p(0,T;X)$ (соотв. $C([0,T],X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соотв. непрерывных), определенных на $[0,T]$, со значениями со значениями в банаховом пространстве X.

Пусть исходные данные удовлетворяют условиям:

(*i*) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \geqslant c_0 > 0$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \mathrm{const}$;

(*ii*) $\{a, b, r, \alpha, \beta, n|\}_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = Const > 0$;

(*iii*) $0 \leqslant \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$; $0 \leqslant \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$; $u \in L^2(0,T;H)$.

Определим операторы $A_1: V \to V'$, $A_2: W \to W'$ и функции $f_b \in L^2(0,T;V')$, $\mathrm{g}_b \in L^2(0,T;W')$, используя равенства справедливые для $\theta,\eta \in V$, $\varphi, w \in W$:

$$(A_1\theta,\eta) = (a\nabla\theta,\nabla\eta) + \int\limits_\Gamma c\theta\eta\,d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma}(A_2\varphi,w) = \sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2(\nabla\varphi,\nabla w)_j + n_0^2\int\limits_\Gamma \gamma\varphi w\,d\Gamma + n_0^2\sum_{j=1}^{p} h_j \int\limits_{\Gamma_j}(\varphi_0-\varphi_j)(w_0-w_j)\,d\Gamma,$$

$$(f_b,\eta) = \int\limits_\Gamma c\theta_b\eta\,d\Gamma, \quad (\mathrm{g}_b,w) = \sigma n_0^2\int\limits_\Gamma \gamma\theta_b^4 w\,d\Gamma.$$

Здесь $\{\varphi_j,w_j\} = \{\varphi,w\}|_{\Omega_j}$.

Пусть $Y = \big\{y \in L^2(0,T;V),\, ry' \in L^2(0,T;V')\big\}$, где $ry' = d(ry)/dt$. Отметим, что Y непрерывно вложено в $C([0,T;H])$.

Пара $\{\theta,\varphi\} \in Y \times L^2(0,T;W)$ называется *слабым решением задачи* (1)–(5), если

$$r\theta' + A_1\theta + b\left([\theta]^4 - \varphi\right) = f_b + u, \quad A_2\varphi + b\left(\varphi - [\theta]^4\right) = \mathrm{g}_b, \;\; t \in (0,T); \;\; \theta(0) = \theta_0. \quad (6)$$

$[s]^q = |s|^q \operatorname{sign} s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим пространство управлений $U = L^2(Q)$, множество допустимых управлений U_{ad}, пространство состояний $Z = Y \times L^2(0,T;W)$ и целевой функционал $J: Y \times L^2(0,T;W) \times U_{ad} \to \mathbb{R}$ такие, что

(j) $U_{ad} \subset U$ непустое, выпуклое и замкнутое множество; $\exists C_0 > 0 \forall v \in U_{ad}: 0 \leqslant v \leqslant C_0$,

(jj) J слабо полунепрерывен снизу.

Пусть $F: Y \times L^2(0,T;W) \times U \to L^2(0,T;V') \times L^2(0,T;W') \times H$,

$$F(\theta,\varphi,u) = \Big\{r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - u,\; A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) - \mathrm{g}_b, \theta(0) - \theta_0\Big\}.$$

Задача (OC). Найти $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\} \in Y \times L^2(0,T;W) \times U_{ad}$ такие, что $F(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u) = 0$,

$$J(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u) = \inf\Big\{J(\theta,\varphi,u) : u \in U_{ad},\, F(\theta,\varphi,u) = 0\Big\}.$$

Существование и единственность решения задачи (6) такого, что $\theta \in L^2(0,T;V)$, $\theta' \in L^2(0,T;V') + L^{5/4}(0,T;L^{5/4}(\Omega))$, $\varphi \in L^{5/4}(0,T;W)$, доказаны в [7]. В том случае, если $u \in U_{ad} \subset L^\infty(Q)$, решение начально-краевой задачи также ограничено, и поэтому $\{\theta,\varphi\} \in Y \times L^2(0,T;W)$. Справедливо следующее утверждение [10].

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iii), $u \in U_{ad}$. Тогда существует единственное решение $\{\theta,\varphi\}$ задачи (6) такое, что*

$$0 \leqslant \theta \leqslant w(t), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant w^4(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (7)$$

Здесь $w(t) = M_0 + M_1 t$, $M_0 = \max\{\|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}\}$, $M_1 = C_0/\min r$.

2. Разрешимость экстремальной задачи

Рассмотрим последовательность $\{\theta_j,\varphi_j,u_j\}\in Y\times L^2(0,T;W)\times U_{ad}$,

$$J(\theta_j,\varphi_j,u_j)\to\hat J=\inf\Big\{J(\theta,\varphi,u):\,u\in U_{ad},\,F(\theta,\varphi,u)=0\Big\},$$

$$r\theta_j'+A_1\theta_j+b\left([\theta_j]^4-\varphi_j\right)=f_b+u_j,\;\; A_2\varphi_j+b\left(\varphi_j-[\theta_j]^4\right)=\mathrm{g}_b,\;\; t\in(0,T);\; \theta_j(0)=\theta_0. \quad (8)$$

Из условия (j) следует, что последовательность $\{u_j\}$ ограничена в $L^\infty(Q)$, и поэтому, в силу оценок (7) решения задачи (8) заключаем, что последовательность $\{\theta_j\}$ ограничена в Y, $\{\varphi_j\}$ ограничена в $L^2(0,T;W)$. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, получаем сходимости

$$u_j\to\hat u\ \text{ слабо в } L^2(Q),\ \theta_j\to\hat\theta\ \text{ слабо в } L^2(0,T;V),\ \text{сильно в } L^2(0,T;H), \quad (9)$$

$$\varphi_j\to\hat\varphi\ \text{ слабо в } L^2(0,T;W),\ \varphi_j|_{\Sigma_k}\to\hat\varphi|_{\Sigma_k}\ \ k=0,1,\ldots p.\ \Sigma_k=\Gamma_k\times(0,T). \quad (10)$$

Результатов о сходимости (9), (10) достаточно для предельного перехода в (8). Учитывая (jj), заключаем, что $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$ — решение задачи (OC).

Теорема 1 [10]. *Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j)–(jj). Тогда существует решение задачи (OC).*

3. Система оптимальности

Получение условий оптимальности основано на оценках производной отображения «управление $\mapsto$ состояние» . Пусть $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$ — оптимальная тройка. Для $u\in U_{ad}$, $\varepsilon\in(0,1)$ положим

$$u_\varepsilon=\hat u+\varepsilon(u-\hat u),\;\; \mathrm{g}_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}(\theta_\varepsilon-\hat\theta),\;\; \eta_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_\varepsilon-\hat\varphi),\;\; z_\varepsilon=\frac{\theta_\varepsilon^4-\hat\theta^4}{\theta_\varepsilon-\hat\theta}=(\theta_\varepsilon^2+\hat\theta^2)(\theta_\varepsilon+\hat\theta).$$

Здесь $\{\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon\}$ — решение задачи (6), соответствующее управлению $u_\varepsilon\in U_{ad}$. В силу леммы 1 справедливы оценки

$$0\leqslant\hat\theta,\theta_\varepsilon\leqslant M_2,\ 0\leqslant\hat\varphi,\varphi_\varepsilon\leqslant M_2^4,\ 0\leqslant z_\varepsilon\leqslant 4M_2^3.\ \ M_2=M_0+M_1T.$$

Функции $\mathrm{g}_\varepsilon,\eta_\varepsilon$ удовлетворяют равенствам

$$r\mathrm{g}_\varepsilon'+A_1\mathrm{g}_\varepsilon+b(z_\varepsilon\mathrm{g}_\varepsilon-\eta_\varepsilon)=u-\hat u,\quad A_2\eta_\varepsilon+b(\eta_\varepsilon-z_\varepsilon\mathrm{g}_\varepsilon)=0,\;\; t\in(0,T);\;\; \mathrm{g}_\varepsilon(0)=0. \quad (11)$$

Из (11) выводится оценка

$$\|\mathrm{g}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)}+\|\mathrm{g}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)}+\|\mathrm{g}_\varepsilon'\|_{L^2(0,T;W')}+\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;W)}\leqslant C, \quad (12)$$

где постоянная $C>0$ не зависит от ε.

Следующие условия достаточны для вывода системы оптимальности.

(jjj) $\forall u\in U_{ad}$ *отображение* $\{\theta,\varphi\}\to J(\theta,\varphi,u)$ *дифференцируемо по Фреше в точке* $\{\hat\theta,\hat\varphi,u\}$, *и при этом отображения* $U_{ad}\ni u\to J_\theta'(\hat\theta,\hat\varphi,u)\in Y'$, $U_{ad}\ni u\to$

$J'_\varphi(\hat\theta,\hat\varphi,u)\in L^2(0,T;W')$ *непрерывны в точке* $\hat u$; *существует дифференциал Гато* $\langle J'_u(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),u-\hat u\rangle$ *отображения* $U_{ad}\ni u\to J(\hat\theta,\hat\varphi,u)$ *в точке* $\hat u$ *в направлении* $u-\hat u$.

Оценка (12) позволяет сделать предельный переход в (11) при $\varepsilon\to+0$ и получить соотношения

$$r\mathrm{g}' + A_1\mathrm{g} + b(4\hat\theta^3\mathrm{g}-\eta) = u-\hat u, \quad A_2\eta + b(\eta - 4\hat\theta^3\mathrm{g}) = 0, \ \ t\in(0,T); \ \ \mathrm{g}(0)=0, \quad (13)$$

при этом

$$\langle J'_\theta(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),\mathrm{g}\rangle + \langle J'_\varphi(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),\eta\rangle + \langle J'_u(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),u-\hat u\rangle \geqslant 0. \quad (14)$$

Далее предположим, что

$$\langle J'_\theta(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),z\rangle = (q_T,z(T)) + \int_0^T (q(t),z(t))\,dt \quad \forall z\in Y;$$

$$\langle J'_\varphi(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),z\rangle = \int_0^T (\psi(t),z(t))\,dt \quad \forall z\in L^2(0,T;W);$$

$$\langle J'_u(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),v\rangle = \int_0^T (\xi(t),v(t))\,dt \quad \forall v\in U_{ad}-\hat u.$$

Здесь $q_T\in H$, $q\in L^2(0,T;V')$, $\psi\in L^2(0,T;W')$, $\xi\in U$. Тогда нетрудно доказать существование единственного решения $\{p_1,p_2\}\in Y\times L^2(0,T;W)$ сопряженной системы

$$-rp_1' + A_1p_1 + 4b\hat\theta^3(p_1-p_2) = -q, \ \ A_2p_2 + b(p_2-p_1) = -\psi, \quad p_1(T) = -\frac{1}{r}q_T. \quad (15)$$

Умножим скалярно первое уравнение в (13) на p_1, первое уравнение в (15) на g, вычтем одно из другого и проинтегрируем по t на $(0,T)$. Аналогично умножим скалярно второе уравнение в (13) на p_2, второе уравнение в (15) на η, вычтем и проинтегрируем по t. Складывая полученные равенства, выводим из (14)

$$(q_T,\mathrm{g}(T)) + \int_0^T \Big((q,\mathrm{g}) + (\psi,\eta) + (\xi,u-\hat u)\Big)dt = \int_0^T (\xi - p_1, u-\hat u)\,dt \geqslant 0.$$

Теорема 2 [10]. *Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j)–(jv) и* $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$ *— оптимальная тройка. Тогда существует сопряженное состояние* $\{p_1,p_2\}\in Y\times L^2(0,T;W)$, *удовлетворяющее* (15), *и при этом*

$$\int_0^T (\xi(t)-p_1(t),u(t)-\hat u(t))\,dt \geqslant 0 \quad \forall u\in U_{ad}.$$

4. Приложения условий оптимальности

Рассмотрим процесс радиационного теплообмена в области Ω с одним включением $\bar\Omega_1\subset\Omega$. В качестве примера задачи (OC) изучим следующие задачи оптимального управления, для которых можно получить релейность оптимального управления (свойство «bang–bang»).

4.1. Наблюдение на внутренней границе

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}(\theta-\theta_d)^2 d\Gamma dt \ \to \inf, \tag{16}$$

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4-\varphi) = f_b + u, \quad A_2\varphi + b(\varphi-[\theta]^4) = \mathrm{g}_b, \ \ t\in(0,T); \ \ \theta(0)=\theta_0. \tag{17}$$

$$u\in U_{ad} = \{v\in L^\infty(Q):\ \mathrm{supp}\, v\subset \bar\Omega_1\times[0,T],\ 0\leqslant f_1(x,t)\leqslant v(x,t)\leqslant f_2(x,t)\}. \tag{18}$$

Здесь $\theta_d\in L^2(\Gamma_1)$, $f_1,f_2\in L^\infty(\Omega_1\times(0,T))$ — заданные функции.

Вычислив производные целевого функционала и применив теоремы 1, 2, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует* $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}\in Y\times L^2(0,T;W)\times U_{ad}$ *— решение задачи* (16)-(18), *а также сопряженное состояние* $\{p_1,p_2\}\in Y\times L^2(0,T;W)$ *такое, что*

$$-rp_1' + A_1p_1 + 4b\hat\theta^3(p_1-p_2) = -q,\ A_2p_2 + b(p_2-p_1)=0,\ \ p_1(T)=0, \tag{19}$$

и при этом

$$\int_0^T\int_{\Omega_1} p_1(u-\hat u)dt\leqslant 0 \quad \forall u\in U_{ad}. \tag{20}$$

Здесь функционал q *такой, что* $(q,z)=\int_{\Gamma_1}(\hat\theta-\theta_d)z d\Gamma\ \forall z\in V$.

Уравнения (17) вместе с сопряженной системой (19) и вариационным неравенством (20) образуют систему оптимальности задачи (16)–(18), которая может использоваться при анализе единственности и устойчивости ее решения. Кроме того, следствием неравенства (20) является релейность оптимального управления,

$$\hat u(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & \text{если } p_1(x,t)<0,\ x\in\Omega_1;\\ f_2(x,t), & \text{если } p_1(x,t)>0,\ x\in\Omega_1;\\ 0, & \text{если } x\in\Omega_0.\end{cases}$$

4.2. Финальное и граничное наблюдение

Рассмотрим задачу с комбинированным целевым функционалом

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}(\theta|_{t=T}-\theta_d)^2dx + \frac{1}{2}\int_0^T \|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)}dt \ \to \inf, \quad u\in U_{ad}, \tag{21}$$

$$r\theta' + A_1\theta + b\left([\theta]^4-\varphi\right) = f_b + u,\ \ A_2\varphi + b\left(\varphi-[\theta]^4\right) = \mathrm{g}_b,\ \ t\in(0,T);\ \theta(0)=\theta_0.$$

$$U_{ad} = \{u\in U\ :\ f_1\leqslant u\leqslant f_2\}. \tag{22}$$

Здесь $f_1,f_2\in L^\infty(Q)$ — неотрицательные функции, $\theta_d\in H$.

Из теорем 1, 2 следуют разрешимость задачи (21)–(22) и условия оптимальности первого порядка.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует* $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\} \in Y \times L^2(0,T;W) \times U_{ad}$ *— решение задачи* (21)–(22)*, а также сопряженное состояние* $\{p_1, p_2\} \in Y \times L^2(0,T;W)$ *такое, что*

$$-rp_1' + A_1 p_1 + 4b\hat{\theta}^3(p_1 - p_2) = 0, \; A_2 p_2 + b(p_2 - p_1) = -\psi,$$

$$p_1(T) = -\frac{1}{r}(\hat{\theta}(T) - \theta_d)\chi_{\Omega_0},$$

и при этом

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & \text{если } p_1(x,t) < 0; \\ f_2(x,t), & \text{если } p_1(x,t) > 0. \end{cases}$$

Здесь функционал ψ *такой, что* $(\psi, z) = \int\limits_\Gamma \hat{\varphi} z d\Gamma \;\; \forall z \in W$*. Функция* $\chi_{\Omega_0} : \Omega \to \mathbb{R}$ *равна* 1 *в* Ω_0 *и* 0 *вне этой подобласти.*

Список литературы

[1] Chebotarev Alexander Yu., Grenkin Gleb V., Kovtanyuk Andrey and Botkin Nikolai and Hoffmann Karl-Heinz E. D., "Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **57**, (2018), 290–298.

[2] Pinnau R., "Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system", *Commun. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.

[3] Chebotarev A. Yu., "Inhomogeneous Boundary Value Problem for Complex Heat Transfer Equations with Fresnel Matching Conditions", *Differential Equations*, **56**:12, (2020), 1613–1618.

[4] Чеботарев А. Ю., "Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:2, (2021), 303–311.

[5] Чеботарев А. Ю., "Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **62**:3, (2022), 381–390.

[6] Chebotarev A. Y., Kovtanyuk A. E., "Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions", *J. Math. Anal. Appl.*, **507**:125745, (2022).

[7] Чеботарев А. Ю., "Неоднородная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с условиями отражения и преломления", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **63**:3, (2023), 118–126.

[8] Amosov A. A., "Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies", *Russian J. of Math. Phys.*, **23**, (2016), 309–334.

[9] Amosov A. A., "Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation", *Journal of Mathematical Sciences*, **233**:6, (2018), 777–806.

[10] Чеботарев А. Ю., "Оптимальное управление квазистационарными уравнениями слож-

ного теплообмена с условиями отражения и преломления", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **63**:11, (2023), 1829–1838.

Поступила в редакцию
6 марта 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00087.

Chebotarev A. Yu.[1] Extremal problems for quasi-stationary equations of complex heat transfer with Fresnel coupling conditions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 1. P. 133–140.

[1] Far Eastern Federal University, Far Eastern Center for Research and Education in Mathematics, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

The analysis of optimal control problems for a nonlinear system simulating unsteady complex heat transfer with Fresnel coupling conditions on refractive index discontinuity surfaces is considered. Estimates for the solution of the initial-boundary value problem, the solvability of control problems are presented, and optimality conditions leading to the relay nature of optimal control are derived.

Key words: *quasi-stationary complex heat transfer equations, Fresnel conjugation conditions, optimal control problems, optimality system, property "bang–bang".*