Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 1. С. 107–119

УДК 512.57, 512.661
MSC2020 08A60, 18G05

© И. А. Сахаров[1]

Проективные и инъективные унары

В работе изучаются проективные и инъектиные унары, а также унары, удовлетворяющие условиям, являющимся ослаблениями понятий проективности и инъективности. А именно, приводится алгебраическое описание проективных, слабо-, квази- и псевдопроективных унаров; инъективных, слабо-, квази- и псевдоинъективных унаров.

Ключевые слова: *проективный объект, инъективный объект, унар.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202410

Введение

Унаром называется алгебра, сигнатура которой состоит из одного символа унарной операции f. Унар является частным случаем полигона над моноидом, т.е. множества, на котором действует моноид, причём единица действует тождественно. Инъективные и проективные полигоны изучались в [1–6].

Инъектинвые полигоны играют важную роль в теории полигонов. Это обусловлено тем, что любой полигон вкладывается в некоторый инъективный [1]. Для некоторых специальных случаев описание инъективных полигонов получено. Слабоинъективные полигоны — это полигоны, инъективные относительно вложений в циклические полигоны. В данной работе приводится описание инъективных и слабоинъективных унаров. Квазиинъективные полигоны (полигоны, инъективные относительно вложений в себя) изучались в [7, 8]. Описание квазипроективных унаров получено в [9]. Псевдоинъективные полигоны изучались в [10]. В этой статье приводится характеризация псевдоинъективнх унаров.

Понятие проективности является двойственным к понятию инъективности. Известно, что любой проективный полигон — это копроизведение циклических полигонов, порождённых идемпотентами [1]. Отсюда следует, что проективный унар является копроизведением полуцепей. Заметим, что любой проективный унар является свободным; это не верно для полигонов. Слабопроективные полигоны (полигоны, проективные относительно сюръекций из циклических полигонов) изучались

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: igorsaharov00@gmail.com

в [1, 11, 12]. Класс проективных полигонов является собственным подклассом слабопроективных полигонов. В данной работе доказано, что классы проективных и слабопроективных унаров совпадают. Квазипроективные полигоны (полигоны, проективные относительно сюръекций из себя) изучались в [13,14]. В [15] дано описание квазипроективных унаров без циклов. В данной работе приводится полное описание квазипроективных и псевдопроективных унаров.

1. Предварительные сведения

Алгебра называется *унаром*, если её сигнатура состоит из одного символа унарной операции f [16]. Пусть A — унар, $B \subseteq A$, $a \in A$. Введём обозначения: $f^0 a = a$,

$$f^{n+1}a = f(f^n a), \quad f^{-n}(a) = \{a' \in A \mid f^n(a') = a\}, \quad \langle a \rangle = \{f^n a \mid \exists n \in \omega\},$$

где ω — наименьший бесконечный ординал. Элемент $a' \in A$ называется *прообразом элемента* a, если $fa' = a$. Унар A называется *связным*, если для любых $a, b \in A$ существуют $n, m \in \omega$ такие, что $f^n a = f^m b$. Унар A называется *цепью*, если

$$A = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}, \quad a_i \neq a_j \ (i \neq j), \quad fa_i = a_{i+1} \ \forall\, i, j \in \mathbb{Z}.$$

Унар A называется *полуцепью*, если

$$A = \{a_i \mid i \in \omega\}, \quad a_i \neq a_j \ (i \neq j), \quad fa_i = a_{i+1} \ \forall\, i, j \in \omega.$$

Унар A называется *циклом длины* n, если

$$A = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}, \quad a_i \neq a_j \ (i \neq j \ \forall\, i, j \in \omega)$$

и $fa_i = a_{i+1}$ при $i < n-1$, $fa_{n-1} = a_0$. Унар A называется *петлёй*, если A — цикл длины 1. Элемент a называется *периодическим*, если $f^t a = f^{t+n} a$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых существует $n \geqslant 1$ такое, что $f^t a = f^{t+n} a$, называется *глубиной элемента* a и обозначается $t(a)$. *Копроизведением унаров* называется их дизъюнктное объединение. Копроизведение унаров A_i $(i \in I)$ обозначается $\coprod\limits_{i \in I} A_i$. Любой унар представим в виде копроизведения связных унаров. Тождественное отображение множества A на себя будем обозначать через id_A.

Унар P называется *проективным*, если для любого гомоморфизма $\varphi : P \to A$ и для любого эпиморфизма $\alpha : B \to A$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : P \to B$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & A \end{tikzcd}$$

Унар P называется *слабопроективным*, если для любой полуцепи B, любого гомоморфизма $\varphi : P \to A$ и любого эпиморфизма $\alpha : B \to A$ существует гомоморфизм

$\bar{\varphi}: P \to B$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Унар P называется *квазипроективным*, если для любого гомоморфизма $\varphi: P \to A$ и любого эпиморфизма $\alpha: P \to A$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi}: P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"'] \arrow[d, "\varphi"] \\
P \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

Унар P называется *псевдопроективным*, если для любых эпиморфизмов $\varphi, \alpha: P \to A$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi}: P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$.

Замечание 1.

1) Любой проективный унар является слабо-, квази- и псевдопроективным;

2) любой квазипроективный унар является псевдопроективным.

Унар Q называется *инъективным*, если для любого гомоморфизма $\varphi: A \to Q$ и для любого мономорфизма $\alpha: A \to B$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi}: B \to Q$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi}\alpha$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Унар P называется *слабоинъективным*, если для любой полуцепи B, любого гомоморфизма $\varphi: A \to Q$ и для любого мономорфизма $\alpha: A \to B$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi}: B \to Q$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Унар Q называется *квазиинъективным*, если для любого гомоморфизма $\varphi: A \to Q$ и для любого мономорфизма $\alpha: A \to Q$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi}: Q \to Q$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi}\alpha$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & Q \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Унар Q называется *псевдоинъективным*, если для любых мономорфизмов $\varphi, \alpha: A \to Q$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi}: Q \to Q$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi}\alpha$.

Замечание 2.

1) Любой инъективный унар является слабо-, квази- и псевдоинъективным;

2) любой квазиинъективный унар является псевдоинъективным.

2. Проективные унары

Теорема 1 следует из теоремы 3.17.8 [1], дающей описание проективных полигонов.

Теорема 1 [1]. *Унар проективен тогда и только тогда, когда он является копроизведением полуцепей.*

Теорема 2. *Пусть P — унар. Следующие условия эквивалентны:*
1) P проективен;
2) P слабопроективен;
3) P является копроизведением полуцепей.

Доказательство. 1)⇒2) следует из замечания 1.

2)⇒3). Пусть унар P слабопроективен.

Покажем, что P не содержит элемента p такого, что $f^{-n}(p) \neq \varnothing$ для любого $n \in \omega$. Пусть $A = \{a\}$ — петля, $B = \{b_i \mid i \in \omega\}$ — полуцепь, где $fb_i = b_{i+1}$ для всех $i \in \omega$, $\varphi : P \to A$ — гомоморфизм, $\alpha : B \to A$ — эпиморфизм. Так как P слабопроективен, существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : P \to B$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Пусть $\bar{\varphi}(p) = b_j, j \in \omega$. Так как $f^{-(j+1)}(p) \neq \varnothing$, а $f^{-(j+1)}(b_j) = \varnothing$, получаем противоречие. Следовательно, P не содержит, в частности, цепей и циклов.

Покажем, что P не содержит элементов с двумя различными прообразами. Предположим, $p_0 \in P$ имеет два различных прообраза. Для любого $p \in P$ через κ_p обозначим ординал $\kappa_p \in \omega \cup \{\omega\}$ такой, что $\kappa_p = k$, если $f^{-k}(p) \neq \varnothing$ и $f^{-k-1}(p) = \varnothing$, и $\kappa_p = \omega$, если $f^{-n}(p) \neq \varnothing$ для любого $n \in \omega$. Пусть

$$\kappa_0 = \inf\{\kappa_p \mid p \in f^{-1}(p_0)\}, \quad \kappa_1 = \sup\{\kappa_p \mid p \in f^{-1}(p_0)\}.$$

По доказанному выше $\kappa_1 \in \omega$. Зафиксируем $p_1 \in f^{-1}(p_0)$ такой, что $\kappa_{p_1} = \kappa_0$. Введём обозначения:

$$P_0 = \bigcup_{i\in\omega} f^{-i}(p_0), \quad P_1 = \bigcup_{i\in\omega} f^{-i}(p_1), \quad P_2 = P_0 \backslash (P_1 \cup \{p_0\}).$$

Поскольку p_0 имеет два различных прообраза, то $P_2 \neq \varnothing$. Пусть $A = \{a_i \mid i \in \kappa_1 + 1\}$, $fa_i = a_{i-1}$ при $i \neq 0, fa_0 = a_0$, $B = \{b_i \mid i \in \omega\}$ — полуцепь, где $fb_i = b_{i+1}$ для всех $i \in \omega$. Зададим гомоморфизм $\varphi\colon P \to A$ и эпиморфизм $\alpha\colon B \to A$ следующим образом: $\varphi(p) = a_n$ для любых $p \in f^{-n}(p_0) \cap P_1, \varphi(p) = a_0$ для остальных $p \in P$, $\alpha(f^n b_0) = f^n a_{\kappa_1+1}$ $(n \in \omega)$. Так как P слабопроективен, существует гомоморфизм $\bar{\varphi}\colon P \to B$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Рассмотрим элемент $p \in f^{-1}(p_0) \cap P_1$. По определению гомоморфизма φ имеем $\varphi(p) = a_1$. Откуда $\alpha\bar{\varphi}(p) = a_1$ и $\bar{\varphi}(p) \in \alpha^{-1}(a_1) = \{b_{\kappa_1}\}$, т.е. $\bar{\varphi}(p) = b_{\kappa_1}$. Тогда $\bar{\varphi}(p_0) = \bar{\varphi}(fp) = f\bar{\varphi}(p) = b_{\kappa_1+1}$. Следовательно, для элемента $p' \in f^{-1}(p_0) \cap P_2$ получим $\bar{\varphi}(p') \in f^{-1}(\bar{\varphi}(p_0)) = f^{-1}(b_{\kappa_1+1}) = \{b_{\kappa_1}\}$, т.е. $\bar{\varphi}(p') = b_{\kappa_1}$. Откуда $\alpha\bar{\varphi}(p') = a_1$, что противоречит определению φ. Следовательно, P не содержит элементов с двумя различными прообразами.

Таким образом, P является копроизведением полуцепей.

3)⇒1) следует из теоремы 1. □

Лемма 1. *Если связный унар без цикла псевдопроективен, то он является цепью или полуцепью.*

Доказательство. Пусть P — псевдопроектиный связный унар без цикла. Предположим, $p_0 \in P$ имеет два различных прообраза. Будем пользоваться обозначениями элементов p_0, p_1, ординалов κ_0, κ_1 и множеств P_0, P_1, P_2, введенными в доказательстве теоремы 2. Поскольку p_0 имеет два различных прообраза, то $P_2 \neq \varnothing$. Пусть $A = \{a_i \mid i \in \kappa_1 + 1\}, fa_i = a_{i-1}$ при $i \neq 0, fa_0 = a_0$. Зададим эпиморфизмы $\varphi, \alpha\colon P \to A$ следующим образом: $\varphi(p) = a_n$ для любых $p \in f^{-n}(p_0) \cap P_2$, $\varphi(p) = a_0$ для остальных $p \in P$, $\alpha(p) = a_n$ для любых $p \in f^{-n}(p_0)$, $n \in \omega$, и $\alpha(p) = a_0$ для остальных $p \in P$. Так как P псевдопроективен, существует эндоморфизм $\bar{\varphi}\colon P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Зафиксируем элемент $p_2 \in f^{-1}(p_0) \cap P_2$. По определению гомоморфизма φ имеем $\varphi(p_2) = a_1$, откуда $\alpha\bar{\varphi}(p_2) = a_1$ и $\bar{\varphi}(p_2) \in \alpha^{-1}(a_1) = f^{-1}(p_0)$. Следовательно, $\bar{\varphi}(p_0) = \bar{\varphi}(fp_2) = p_0$. Тогда $\bar{\varphi}(p_1) \in f^{-1}(\bar{\varphi}(p_0)) = f^{-1}(p_0)$. Так как $\alpha(p) = a_1$ для любого $p \in f^{-1}(p_0)$, то $\alpha\bar{\varphi}(p_1) = a_1$, что противоречит определению φ. □

Лемма 2 [15]. *Унар без циклов является квазипроективным тогда и только тогда, когда он является копроизведением полуцепей.*

Лемма 3. *Если P — псевдопроективный связный унар с циклом, то выполняются следующие условия:*

1) существует $n \in \omega$ такое, что для любого $p \in P$ верно $n \geqslant t(p)$;

2) все элементы без прообразов имеют одинаковую глубину;

3) вне цикла нет элементов с двумя различными прообразами;

4) если унар содержит два различных элемента без прообразов p_1 и p_2, то

$$f^{t(p_1)}p_1 = f^{t(p_2)}p_2.$$

Доказательство. Пусть P — связный унар, содержащий цикл C.

Покажем 1). Предположим, что условие 1) не выполняется. Пусть

$$A = \{a_i \mid i \in \omega\}, \quad fa_i = a_{i-1} \text{ при } i > 0, \quad fa_0 = a_0.$$

Зададим эпиморфизмы $\varphi, \alpha\colon P \to A$ следующим образом: $\varphi(p) = a_i$, если $t(p) = i$, для всех $p \in P$ и $\alpha(p) = a_0$ для всех $p \in C$; $\alpha(p) = a_i$, если $t(p) = i + 1$, для всех $p \in P \backslash C$. Так как P псевдопроективен, существует эндоморфизм $\bar{\varphi}\colon P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Зафиксируем $p \in P$ такой, что $t(p) = 1$. По определению гомоморфизма φ имеем $\varphi(p) = a_1$, откуда $\alpha\bar{\varphi}(p) = a_1$ и $\bar{\varphi}(p) \in \alpha^{-1}(a_1) = \{p' \in P \mid t(p') = 2\}$. Так как $\bar{\varphi}$ является гомоморфизмом, то для любого $c \in C$ верно $\bar{\varphi}(c) \in C$. Следовательно, с одной стороны, $\bar{\varphi}(fp) \in C$, а с другой — $\bar{\varphi}(fp) = f\bar{\varphi}(p) \notin C$. Противоречие.

Покажем 2). Пусть $p_1, p_2 \in P$ — различные элементы без прообразов такие, что

$$t(p_2) = m = \max\{t(p) \mid p \in P\}, \quad t(p_1) = k = \max\{t(p) \mid t(p) < m, p \in P\},$$
$$l = |(\langle p_1 \rangle) \cap \langle p_2 \rangle \backslash C|, \quad A = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant k - l\}, \quad fa_i = fa_{i-1} \text{ при } i > 0, \quad fa_0 = a_0.$$

Зададим эпиморфизмы $\varphi, \alpha\colon P \to A$ следующим образом: $\varphi(p) = a_i$, если $t(p) = i + l$ и элемент $p \in P$ такой, что $\langle p_1 \rangle \cap \langle p \rangle \backslash \langle f^{k-l}p_1 \rangle \neq \varnothing$, и $\varphi(p) = a_0$ для остальных $p \in P$; $\alpha(p) = a_i$, если $t(p) = i + m + l - k$ и элемент $p \in P$ такой, что $\langle p_2 \rangle \cap \langle p \rangle \backslash \langle f^{m-l}p_2 \rangle \neq \varnothing$, и $\alpha(p) = a_0$ для остальных $p \in P$. Так как P псевдопроективен, существует эндоморфизм $\bar{\varphi}\colon P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Из определения φ следует $\varphi(p_1) = a_{k-l}$. Тогда $\alpha\bar{\varphi}(p_1) = a_{k-l}$, откуда $\bar{\varphi}(p_1) = p' \in \alpha^{-1}(a_{k-l})$, причем $t(p') = m$. Следовательно,

$\bar\varphi(f^{k-l}p_1)=f^{k-l}p'$. При этом $f^{k-l}p_1\in C$, а $f^{k-l}p'\notin C$, т.к. $t(f^{k-l}p')= =m-(k-l)>0$. Тогда $\bar\varphi$ не является гомоморфизмом. Противоречие.

Покажем 3). Пусть P содержит различные элементы без прообразов p_1,p_2 такие, что $t(p_1)=t(p_2)=m, f^kp_1=f^kp_2, m>k$,

$$A=\{a_i\mid 0\leqslant i\leqslant k\},\quad fa_i=a_{i-1} \text{ при } i>0,\quad fa_0=a_0.$$

Зададим эпиморфизмы $\varphi,\alpha\colon P\to A$ следующим образом: $\varphi(f^np)=f^na_k$ $(n\in\omega)$, если $p\in f^{-(k-1)}(f^{k-1}p_1)$ и $\varphi(p)=a_0$ при $p\notin\langle p_1\rangle$, $\alpha(f^np)=f^na_k$ $(n\in\omega)$ для любого $p\in f^{-k}(f^kp_1)$ и $\varphi(p)=a_0$ для любого $p\notin\langle f^{-k}(f^kp_1)\rangle$. Так как P псевдопроективен, существует эндоморфизм $\bar\varphi\colon P\to P$ такой, что $\varphi=\alpha\bar\varphi$. По определению гомоморфизма φ имеем $\varphi(p_1)=a_k$, откуда $\alpha\bar\varphi(p_1)=a_k$ и

$$\bar\varphi(p_1)\in\alpha^{-1}(a_k)=f^{-k}(f^kp_1).$$

Следовательно, $\bar\varphi(f^kp_1)=f^kp_1=f^kp_2$. Тогда

$$\bar\varphi(p_2)\in f^{-k}(\bar\varphi(f^kp_2))=f^{-k}(f^kp_2).$$

Но $\alpha(p)=a_k$ для любого $p\in f^{-k}(f^kp_2)$, т.е. $\alpha\bar\varphi(p_2)=a_k$, что противоречит определению φ.

Покажем 4). Пусть P содержит различные элементы без прообразов p_1,p_2 такие, что $t(p_1)=k$,

$$f^kp_1\neq f^kp_2,\quad f^lf^kp_1=f^kp_2,\quad A=\{a_i\mid 0\leqslant i\leqslant k\},\quad fa_i=a_{i-1} \text{ при } i>0,\quad fa_0=a_0.$$

Зададим эпиморфизмы $\varphi,\alpha\colon P\to A$ следующим образом: $\varphi(f^np_1)=\varphi(f^np_2)=f^na_k$ и $\varphi(p)=a_0$ $(n\in\omega)$ при $p\notin\langle p_1\rangle\cup\langle p_2\rangle$, $\alpha(f^np_1)=f^na_k$ $(n\in\omega)$ и $\alpha(p)=a_0$ для любого $p\notin\langle p_1\rangle$. Корректность определения эпиморфизмов φ и α следует из 2). Так как P псевдопроективен, существует эндоморфизим $\bar\varphi\colon P\to P$ такой, что $\varphi=\alpha\bar\varphi$. По определению гомоморфизма φ имеем $\varphi(p_1)=a_k$, откуда $\alpha\bar\varphi(p_1)=a_k$ и $\bar\varphi(p_1)\in\alpha^{-1}(a_k)=\{p_1\}$, т.е. $\bar\varphi(p_1)=p_1$. Аналогично $\bar\varphi(p_2)=p_1$. Тогда, с одной стороны, $\bar\varphi(f^kp_1)=f^k\bar\varphi(p_1)=f^kp_1$ и $\bar\varphi(f^kp_2)=\bar\varphi(f^lf^kp_1)=f^l\bar\varphi(f^kp_1)=f^lf^kp_1=f^kp_2$, а с другой — $\bar\varphi(f^kp_2)=f^k\bar\varphi(p_2)=f^kp_1$. Противоречие. □

Замечание 3. Так как квазипроективные унары псевдопроективны, то лемма 3 также верна для квазипроективных унаров.

Лемма 4. *Если* $\coprod\limits_{i\in I}P_i$ *— псевдопроективный (квазипроективный) унар, то каждый* P_i *псевдопроективен (квазипроективен).*

Доказательство. Пусть $P=\coprod\limits_{i\in I}P_i$ псевдопроективен (квазипроективен) и $|I|>1$. Покажем, что P_i $(i\in I)$ псевдопроективен (квазипроективен). Предположим, что $\varphi_i:P_i\to A_i$ — эпиморфизм (гомоморфизм), $\alpha_i:P_i\to A_i$ — эпиморфизм и $A=A_i\coprod\{a\}$, где $fa=a$. Тогда существуют эпиморфизм (гомоморфизм) $\varphi\colon P\to A$ и эпиморфизм $\alpha\colon P\to A$ такие, что $\varphi(p_i)=\varphi_i(p_i),\alpha(p_i)=\alpha_i(p_i)$ для всех $p_i\in P_i$ и $\varphi(p)=\alpha(p)=a$ для всех $p\in P\backslash P_i$. Так как P псевдопроективен (квазипроективен), то существует эндоморфизм $\bar{\varphi}\colon P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Ясно, что $\bar{\varphi}(p) \in P_i$ для любого $p \in P_i$. Тогда существует эндоморфизм $\bar{\varphi}_i\colon P_i \to P_i$ такой, что $\bar{\varphi}_i = \bar{\varphi} \restriction P_i$, причём $\varphi_i = \alpha_i\bar{\varphi}_i$. Следовательно, P_i псевдопроективен (квазипроективен). $\square$

Лемма 5. *Если унар $P = \coprod\limits_{i\in I} P_i$ псевдопроективен (квазипроективен), $|I| > 1$, то для любых $i, j \in I$, $i \neq j$, существует гомоморфизм $\bar{\varphi}_{i,j} : P_i \to P_j$.*

Доказательство. Пусть унар $P = \coprod\limits_{i\in I} P_i$ псевдопроективен (квазипроективен), $i, j \in I$ и $A = \{a_1\}\coprod\{a_2\}$, где $fa_1 = a_1, fa_2 = a_2$. Эпиморфизм (гомоморфизм) $\varphi\colon P \to A$ и эпиморфизм $\alpha\colon P \to A$ определим следующим образом:

$$\varphi(p_i) = a_1 \ \forall\ p_i \in P_i, \quad \varphi(p) = a_2 \ \forall\ p \in P\backslash P_i,$$
$$\alpha(p_j) = a_1 \ \forall\ p_j \in P_j, \quad \alpha(p) = a_2 \ \forall\ p \in P\backslash P_j.$$

Так как P псевдопроективен (квазипроективен), то существует эндоморфизм $\bar{\varphi}\colon P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Из $\varphi(P_i) = \{a_1\}$ и $\alpha^{-1}(a_1) = P_j$ следует $\bar{\varphi}(P_i) \subseteq P_j$. Тогда существует гомоморфизм $\bar{\varphi}_{i,j} : P_i \to P_j$ такой, что $\bar{\varphi} \restriction P_i = \bar{\varphi}_{i,j}$. $\square$

Лемма 6. *Если унар P псевдопроективен, то выполняется одно из условий 1–3; если унар P квазипроективен, то выполняется условие 1 или 3, где*

1) все компоненты связности — полуцепи;

2) все компоненты связности — цепи;

3) выполняются следующие условия:

3.1) все компоненты связности содержат циклы одинаковой длины;

3.2) вне циклов нет элементов с двумя различными прообразами;

3.3) существует $n \in \omega$ такое, что для любого $p \in P$ верно $n \geqslant t(p)$;

3.4) глубины всех элементов без прообразов равны;

3.5) если существует компонента связности с двумя различными элементами без прообразов p_1 и p_2, то $f^{t(p_1)}p_1 = f^{t(p_2)}p_2$ и все остальные компоненты связности являются циклами.

Доказательство. Пусть унар $P = \coprod\limits_{i\in I} P_i$, где все P_i связны, псевдопроективен (квазипроективен), $i, j \in I$. Заметим, что в случае псевдопроективности P по леммам 4 и 1 все компоненты связности P, не содержащие циклов, являются цепями или полуцепями; в случае квазипроективности P по леммам 4 и 2 все компоненты связности P, не содержащие циклов, являются полуцепями. Также по лемме 4 все компоненты связности P, содержащие циклы, удовлетворяют условиям леммы 3.

Пусть P_i — полуцепь. Если P_j является цепью или содержит цикл, то не существует гомоморфизма из P_j в P_i. Тогда по лемме 5 унар P не псевдопроективен и не квазипроективен. Противоречие. Следовательно, P_j является полуцепью, и все компоненты связности унара P являются полуцепями, т.е. выполняется условие 1).

Пусть P псевдопроективен, P_i — цепь. Если P_j является полуцепью, то не существует гомоморфизма из P_i в P_j. Если P_j содержит цикл, то не существует гомоморфизма из P_j в P_i. Тогда по лемме 5 унар P не псевдопроективен. Противоречие. Следовательно, P_j является цепью, и все компоненты связности унара P являются цепями, т.е. выполняется условие 2).

Пусть P_i содержит цикл. Если P_j является цепью или полуцепью, то не существует гомоморфизма из P_i в P_j. Тогда по лемме 5 унар P не псевдопроективен и не квазипроективен. Противоречие. Следовательно, P_j содержит цикл и все компоненты связности унара P содержат циклы. Если P_i содержит цикл длины n, то для существования гомоморфизма из P_i в P_j необходимо, чтобы P_j содержал цикл длины m, где $m|n$. Аналогично $n|m$. Следовательно $n = m$, т.е. выполняется условие 3.1).

Выполнение условия 3.2) следует из лемм 4 и 3.

Покажем 3.3) и 3.4). Согласно леммам 4 и 3 для каждого $i \in I$ глубины элементов P_i ограничены. Предположим, что для какого-либо элемента без прообразов $p_1 \in P_i$ существует элемент без прообразов $p_2 \in P_j$ $(i, j \in I)$ такой, что $t(p_1) = k < m = t(p_2)$, P_i и P_j содержат циклы C_i и C_j соответственно. Пусть унар $A = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant k\}$, где $fa_i = fa_{i-1}$ при $i > 0$, $fa_0 = a_0$. Зададим эпиморфизмы $\varphi, \alpha\colon P \to A$ следующим образом: $\varphi(f^n p_1) = f^n a_k$ $(n \in \omega)$ и $\varphi(p) = a_0$ при $p \notin \langle p_1\rangle$, $\alpha(f^n p_2) = f^n a_k$ $(n \in \omega)$ и $\alpha(p) = a_0$ при $p \notin \langle p_2\rangle$. Так как P псевдопроективен (квазипроективен), существует эндоморфизм $\bar\varphi\colon P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar\varphi$. По определению гомоморфизма φ имеем $\varphi(p_1) = a_k$, откуда $\alpha\bar\varphi(p_1) = a_k$ и $\bar\varphi(p_1) \in \alpha^{-1}(a_k) = \{p_2\}$, т.е. $\bar\varphi(p_1) = p_2$. Так как $\bar\varphi$ является гомоморфизмом, то для любого $c \in C_i \cup C_j$ верно $\bar\varphi(c) \in C_i \cup C_j$. Следовательно, с одной стороны $\bar\varphi(f^k p_1) \in C_i \cup C_j$, а с другой — $\bar\varphi(f^k p_1) = f^k\bar\varphi(p_1) = f^k p_2 \notin C_i \cup C_j$. Противоречие.

Покажем 3.5). Пусть $p_1, p_2 \in P_i$ — различные элементы без прообразов. Тогда равенство $f^{t(p_1)}p_1 = f^{t(p_2)}p_2$ выполняется по лемме 3 п.3). Покажем, что все компоненты связности P, кроме P_i, являются циклами. Предположим, что $p_3 \in P_j$, $(i \neq j)$ — элемент без прообраза. Заметим, что по 3.4) верно $t(p_1) = t(p_2) = k$. Пусть

$$A = \{a_i^1 \mid 0 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{a_i^2 \mid 0 \leqslant i \leqslant k\}, \quad fa_i^1 = fa_{i-1}^1, \quad fa_i^2 = fa_{i-1}^2,$$

где $i > 0, a_0^1 = a_0^2, fa_0^1 = a_0^1$. Зададим эпиморфизмы $\varphi, \alpha\colon P \to A$ следующим образом: $\varphi(f^n p_1) = f^n a_k^1$, $\varphi(f^n p_2) = \varphi(f^n p_3) = f^n a_k^2$ для любого $n \in \omega$ и $\varphi(p) = a_0$ при $p \notin \langle p_1\rangle \cup \langle p_2\rangle \cup \langle p_3\rangle$, $\alpha(f^n p_1) = \alpha(f^n p_2) = f^n a_k^1$, $\alpha(f^n p_3) = f^n a_k^2$ для любого $n \in \omega$ и $\alpha(p) = a_0$ при $p \notin \langle p_1\rangle \cup \langle p_2\rangle \cup \langle p_3\rangle$. Так как P псевдопроективен (квазипроективен), существует эндоморфизм $\bar\varphi\colon P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar\varphi$. По определению гомоморфизма φ имеем $\varphi(p_1) = a_k^1$, откуда $\alpha\bar\varphi(p_1) = a_k^1$ и $\bar\varphi(p_1) \in \alpha^{-1}(a_k^1) = f^{-k}(f^k p_1)$. Также $\varphi(p_2) = a_k^2$, откуда $\alpha\bar\varphi(p_2) = a_k^2$ и $\bar\varphi(p_1) \in \alpha^{-1}(a_k^2) = f^{-k}(f^k p_3)$. Тогда, с одной стороны, $\bar\varphi(f^k p_1) = f^k p_1 \in P_i$, а с другой — $\bar\varphi(f^k p_2) = f^k p_3 \in P_j$. Противоречие. □

Теорема 3. *Унар P псевдопроективен тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий 1–3; унар P квазипроективен тогда и только тогда, когда выполняется условие 1 или 3, где*

1) все компоненты связности — полуцепи;

2) все компоненты связности — цепи;

3) выполняются следующие условия:

3.1) все компоненты связности содержат циклы одинаковой длины;

3.2) вне циклов нет элементов с двумя различными прообразами;

3.3) существует $n \in \omega$ такое, что для любого $p \in P$ верно $n \geqslant t(p)$;

3.4) глубины всех элементов без прообразов равны;

3.5) если существует компонента связности P' с двумя различными элементами без прообразов, то $f^{t(p_1)}p_1 = f^{t(p_2)}p_2$ для любых $p_1, p_2 \in P'$ без прообразов и все остальные компоненты связности являются циклами.

Доказательство. Пусть $P = \coprod\limits_{i \in I} P_i$, где P_i связный для любого $i \in I$.

Необходимость следует из леммы 6.

Достаточность. Пусть P — унар, для которого выполнятся одно из 1)–3), A — унар, $\varphi : P \to A$ — эпиморфизм (гомоморфизм), $\alpha : P \to A$ — эпиморфизм. Построим эндоморфизм $\bar{\varphi} : P \to P$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Для любого $i \in I$ через R_i обозначим множество элементов $p \in P_i$ без прообразов.

Пусть унар P удовлетворяет условию 3). Предположим, в P есть компонента связности P_i такая, что $|R_i| \geqslant 2$, т.е. рассмотрим случай, когда выполняется посылка условия 3.5). По 3.5) унары P_j являются циклами для всех $j \neq i$. Поскольку α является эпиморфизмом, то $\alpha(P_i) = B$, где B — компонента связности A. Определим гомоморфизм $\bar{\varphi} \restriction P_i$. Если в A есть элементы без прообразов, то для любого $p \in R_i$ полагаем $\bar{\varphi}(f^n p) = f^n p'$ $(n \in \omega)$, где p' — произвольный элемент из $\alpha^{-1}(\varphi(p))$. Если в A нет элементов без прообразов, т.е. A — копроизведение циклов, то выбираем любой $j \in I$ такой, что $\varphi(P_i) = \alpha(P_j)$, и для любого $p \in P_i$ полагаем $\bar{\varphi}(f^n p) = f^n p'$ $(n \in \omega)$, где p' — произвольный элемент из $\alpha^{-1}(\varphi(p)) \cap P_j$. Таким образом, $\bar{\varphi} \restriction P_i$ определено. На всех остальных компонентах связности (циклах) $\bar{\varphi}$ определяется естественным образом.

Предположим, что в P есть компонента связности P_i такая, что $|R_i| = 1$. Пусть P_i — произвольная компонента связности такая, что $|R_i| = 1$, и $p \in R_i$. Тогда $P_i = \langle p \rangle$. Определим $\bar{\varphi}$ на P_i следующим образом: $\bar{\varphi}(f^n p) = f^n p'$ $(n \in \omega)$, где p' — произвольный элемент из $\alpha^{-1}(\varphi(p))$. Таким образом, $\bar{\varphi} \restriction P_i$ определено. На всех остальных компонентах связности (циклах) $\bar{\varphi}$ определяется естественным образом.

Предположим, что $R_i = \varnothing$ для всех компонент связности P. Тогда либо все компоненты связности являются циклами, либо — цепями. Тогда $\bar{\varphi}$ определяется естественным образом. □

Введём обозначения: **Proj**,**WProj**,**QProj**,**PProj** — классы проективных, слабопроективных, квазипроективных и псевдопроективных унаров соответственно. Из замечания 1 и теорем 2, 3 получаем

$$\mathbf{Proj} = \mathbf{WProj} \subset \mathbf{QProj} \subset \mathbf{PProj}.$$

3. Инъективные унары

Лемма 7. *Если унар Q слабоинъективен, то для любого элемента Q есть прообраз.*

Доказательство. Пусть Q — слабоинъективный унар. Предположим, что $q \in Q$ не имеет прообразов. Пусть B — полуцепь,

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}, \quad fb_i = b_{i+1} \quad (i \in \omega).$$

Зададим $\varphi : B \to Q$ и $\alpha : B \to B$ следующим образом:

$$\varphi(f^n b_0) = f^n q, \quad \alpha(f^n b_0) = f^{n+1} b_0 \quad \forall\ n \in \omega.$$

Так как Q слабоинъективен, существует гомоморфизм $\bar\varphi : B \to Q$ такой, что $\varphi = \bar\varphi\alpha$. Тогда $\bar\varphi\alpha(b_0) = \bar\varphi(b_1) = \varphi(b_0) = q$, откуда $f\bar\varphi(b_0) = \bar\varphi(b_1) = q$ и $\bar\varphi(b_0) \in f^{-1}(q)$, но $f^{-1}(q) = \varnothing$. Противоречие. □

Теорема 4. *Унар Q инъективен тогда и только тогда, когда он содержит петлю и для каждого элемента Q есть прообраз.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть Q — инъективный унар. По лемме 7 у любого элемента Q есть прообраз. Покажем, что Q содержит петлю. Пусть $\varphi = id_Q$, $\alpha : Q \to Q \coprod \{q\}$, где $fq = q, \alpha(p) = p$ для любого $p \in Q$. Так как Q инъективен, то существует гомоморфизм $\bar\varphi : Q \coprod \{q\} \to Q$ такой, что $\varphi = \bar\varphi\alpha$. Ясно, что $\bar\varphi(q)$ — петля в Q.

Достаточность. Пусть унар Q содержит петлю $\{q_0\}$, для каждого элемента Q есть прообраз, A, B — унары, $\varphi : A \to Q$ — гомоморфизм, $\alpha : A \to B$ — мономорфизм. Построим гомоморфизм $\bar\varphi : B \to Q$ такой, что $\varphi = \bar\varphi\alpha$.

Пусть $A' = \{b \in B \mid \exists n \in \omega : f^n b \in \alpha(A)\}, B' = B \backslash A'$. Заметим, что $A = A' \coprod B'$, если $B' \neq \varnothing$. Определим отображение $\bar\varphi$ на B' следующим образом: $\bar\varphi(b) = q_0$ для любого $b \in B'$. Определим $\bar\varphi$ на A'. Для этого индукцией по i определим $\bar\varphi(a)$ для всех $a \in f^{-i}(\alpha(A))$ так, что $\bar\varphi(fa) = f\bar\varphi(a)$. При $i = 0$ полагаем $\bar\varphi(\alpha(c)) = \varphi(c)$ для любого $c \in A$. Пусть при $i = k$ для любого $a \in f^{-k}(\alpha(A))$ отображение $\bar\varphi(a)$ определено. Предположим, $a \in f^{-(k+1)}(\alpha(A))$. Тогда $fa \in f^{-k}(\alpha(A))$ и $\bar\varphi(fa) \in Q$ определено. По условию $f^{-1}(\bar\varphi(fa)) \neq \varnothing$. Полагаем $\bar\varphi(a)$ равным произвольному элементу $f^{-1}(\bar\varphi(fa))$. Ясно, что $\bar\varphi(fa) = f\bar\varphi(a)$. □

Теорема 5. *Унар слабоинъективен тогда и только тогда, когда любой его элемент имеет прообраз.*

Доказательство. *Необходимость* следует из леммы 7.

Доказательство *достаточности* повторяет доказательство достаточности теоремы 4, если в качестве B взять полуцепь. Тогда $B' = \varnothing$. □

Переформулируем теорему, дающую описание квазиинъективных унаров из [9] в терминах статьи.

Теорема 6 [9]. *Унар $Q = \coprod\limits_{i\in I} Q_i$, где Q_i — компонента связности для любого $i \in I$, квазиинъективен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если Q содержит подунар, являющийся полуцепью, то любой элемент Q имеет прообраз;

2) если Q_i, Q_j содержат соответственно циклы C_i, C_j такие, что длина C_i делится на длину C_j, то глубина любого элемента из Q_i не превосходит глубины любого элемента без прообразов из Q_j.

Теорема 7. *Унар $Q = \coprod\limits_{i\in I} Q_i$, где Q_i — компонента связности для любого $i \in I$, псевдоинъективен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если Q_i содержит подунар, являющийся полуцепью, то любой элемент Q_i имеет прообраз;

2) если Q_i, Q_j содержат циклы равной длины, то глубина любого элемента из Q_i не превосходит глубины любого элемента без прообразов из Q_j.

Доказательство. Пусть $Q = \coprod\limits_{i \in I} Q_i$, где Q_i — компонента связности для любого $i \in I$.

Необходимость. Пусть унар Q псевдоинъективен.

Покажем 1). Предположим, что для некоторого $i \in I$ косомножитель Q_i содержит полуцепь $\{q_0, q_1, q_2, \ldots\}$, $fq_i = q_{i+1}$ $(i \in \omega)$, q_0 не имеет прообраза в Q_i, унар $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ — полуцепь, $fa_i = a_{i+1}$ $(i \in \omega)$. Определим мономорфизмы $\varphi, \alpha : A \to Q$ следующим образом: $\varphi(a_i) = q_i$, $\alpha(a_i) = q_{i+1}$. Так как Q псевдоинъективен, то существует эндоморфизм $\bar\varphi : Q \to Q$ такой, что $\varphi = \bar\varphi\alpha$. Тогда $\bar\varphi\alpha(a_0) = \varphi(a_0) = q_0$, откуда $f\bar\varphi(q_0) = \bar\varphi(fq_0) = \bar\varphi(q_1) = q_0$ и $\bar\varphi(q_0) \in f^{-1}(q_0)$, но $f^{-1}(q_0) = \varnothing$. Противоречие.

Покажем 2). Пусть для некоторых $i, j \in I$ косомножители Q_i, Q_j содержат циклы равной длины. Предположим, что существуют $q_i \in Q_i$, $q_j \in Q_j$ такие, что q_j не имеет прообраза и $t(q_i) - t(q_j) = m > 0$. Пусть $A = \langle a_0 \rangle$ — подунар Q_i, где $a_0 = f^m q_i$. Тогда существуют мономорфизмы $\varphi, \alpha : A \to Q$ такие, что $\varphi(f^n a_0) = f^n q_j$, α — естественное вложение A в Q. Так как Q псевдоинъективен, то существует эндоморфизм $\bar\varphi : Q \to Q$ такой, что $\varphi = \bar\varphi\alpha$. Тогда $\bar\varphi\alpha(a_0) = \varphi(a_0) = q_j$, откуда

$$f\bar\varphi(f^{m-1}q_i) = \bar\varphi(f^m q_i) = \bar\varphi(a_0) = \bar\varphi(\alpha(a_0)) = \varphi(a_0) = q_j$$

и $\bar\varphi(f^{m-1}q_i) \in f^{-1}(q_j)$, но $f^{-1}(q_j) = \varnothing$. Противоречие.

Достаточность. Пусть Q — унар, для которого выполняются условия 1), 2), A — унар и $\varphi, \alpha : A \to Q$ — мономорфизмы. Построим эндоморфизм $\bar\varphi : Q \to Q$ такой, что $\varphi = \bar\varphi\alpha$.

Пусть
$$A' = \{q \in Q \mid \exists n \in \omega : f^n q \in \alpha(A)\}, \quad Q' = Q \backslash A'.$$

Заметим, что $Q = A' \coprod Q'$, если $Q' \neq \varnothing$. Пусть отображение $\bar\varphi$ на Q' действует тождественно. Определим $\bar\varphi$ на A'.

Индукцией по i определим $\bar\varphi(q)$ для всех $q \in f^{-i}(\alpha(A))$ так, что $\bar\varphi(fq) = f\bar\varphi(q)$ и, если q принадлежит компоненте связности, содержащей цикл, то $t(q) \geqslant t(\bar\varphi(q))$. При $i = 0$ полагаем $\bar\varphi(\alpha(a)) = \varphi(a)$ для любого $a \in A$. Если для a определено $t(a)$, то, так как α и φ являются мономорфизмами, $t(a) = t(\alpha(a)) = t(\varphi(a)) = t(\bar\varphi\alpha(a))$. Пусть при $i = k$ для любого $q \in f^{-k}(\alpha(A))$ элемент $\bar\varphi(q)$ определен, причем если q принадлежит компоненте связности, содержащей цикл, то $t(q) \geqslant t(\bar\varphi(q))$. Предположим $q \in f^{-(k+1)}(\alpha(A))$. Тогда $fq \in f^{-k}(\alpha(A))$ и $\bar\varphi(fq) \in Q$ определен. Покажем, что $f^{-1}(\bar\varphi(fq)) \neq \varnothing$. Пусть Q_i — компонента связности, в которой лежит q. Если Q_i содержит полуцепь, то a и $\varphi(a)$ принадлежат компонентам связности, содержащим полуцепи. Т.к. $fq \in f^{-1}(\alpha A)$ и $f^k\bar\varphi(fq) = \bar\varphi(f^{k+1}q) = \bar\varphi(\alpha a) = \varphi(a)$, то $\bar\varphi(fq)$ содержится в компоненте связности, содержащей полуцепь. Тогда неравенство $t(q) \geqslant t(\bar\varphi(q))$ выполняется по условию 1). Предположим, что Q_i не содержит полуцепей. Тогда Q_i

содержит цикл C, $C = \alpha(C')$, где C' — цикл той же длины, что и C, и $\bar{\varphi}(C)$ определено. Ясно, что $\bar{\varphi}(C)$ равняется $\varphi(C')$ — циклу той же длины, что и C, кроме того, $q \notin C$. Откуда $t(q) > t(fq)$. По предположению индукции $t(fq) \geqslant t(\bar{\varphi}(fq))$. Следовательно, $t(q) > t(\bar{\varphi}(fq))$. Тогда по условию 2) $f^{-1}(\bar{\varphi}(fq)) \neq \varnothing$. Полагаем $\bar{\varphi}(q)$ равным произвольному элементу $f^{-1}(\bar{\varphi}(fq))$. Ясно, что $\bar{\varphi}(fq) = f\bar{\varphi}(q)$ и $t(q) \geqslant t(\bar{\varphi}(q))$. $\square$

Введём обозначения: **Inj**,**WInj**,**QInj**,**PInj** — классы инъективных, слабоинъективных, квазиинъективныхх и псевдоинъективных унаров соответственно. Из замечания 2 и теорем 5, 6 получаем

$$\mathbf{Inj} \subset \mathbf{WInj} \subset \mathbf{QInj} \subset \mathbf{PInj}.$$

Список литературы

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V., *Monoids, acts and categories: With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers*, Walter de Gruyter, 2000, 539 pp.

[2] Berthiaume P., “The injective envelope of S-sets”, *Canad. Math. Bull.*, **10**:2, (1967), 261–273.

[3] Feiler E. H., Gantos R. L., “Indecomposable and injective S-systems with zero”, *Math. Nachr.*, **41**, (1969), 37–48.

[4] Yan T., “Generalized injective S-acts on a monoid”, *Adv. Math.*, **40**:4, (2011), 421–432.

[5] Chen Y. Projective S-acts and Exact Functors, *Algebra Colloq.*, **7**, (2000), 113–120.

[6] Chen Y., Shum K. P., “Projective and indecomposable S-acts”, *Science in China Series A: Mathematics*, **42**, (1999), 593–599.

[7] Satyanarayana M., “Quasi- and weakly-injective S-systems”, *Math. Nachr.*, **71**, (1976), 183–190.

[8] Shaymaa A., *Generalizations of quasi injective systems over monoids*, University of Al-Mustansiriyah, Baghdad, Iraq, 2015.

[9] Jungabel E., Masulovic D.“Homomorphism-homogeneous monounary algebras”, *Mathematica Slovaca*, **63**:5, (2013), 993–1000.

[10] Abbas M. S., Shaymaa A., “Pseudo injective and pseudo QP-injective S-systems over monoids”, *International Journal of Pure and Engineering Mathematics (IJPEM)*, **3**:2, (2015), 33–49.

[11] Knauer U., Oltmanns H., “Weak projectivities for S-acts”, *General Algebra and Discrete Mathematics*, 1999, 143–159.

[12] Knauer U., Oltmanns H., “On Rees weakly projective right acts”, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, **10**:3, (2004), 85–96.

[13] Roueentan M., Ershad. M., “Quasi-projective covers of right S-acts”, *Categories and algebraic structures with applications*, **2**:1, (2014), 37–45.

[14] Zhongkui L., Ahsan J., “On relative Quasi-Projective acts over monoids”, *Arabian journal for science and engineering yr 2010*, **35**:2.

[15] Jungabel E., *Quasi-projective monounary algebras*, Prepr./ Eotvos Lorand University, 2020, 20 pp.

[16] Скорняков Л. А., *Элементы общей алгебры*, Наука, 1983.

Поступила в редакцию
20 января 2024 г.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Sakharov I. A.[1] Projective and injective unars. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 1. P. 107–119.

[1] Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

In this paper we study projective and injective unars, as well as unars that satisfy conditions that are weakenings of the concepts of projectivity and injectivity. Namely, an algebraic description of projective, weakly-, quasi- and pseudo-projective, injective, weakly-, quasi- and pseudo-injective unars is given.

Key words: *projective object, injective object, unar.*