Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 1. С. 73–95

УДК 517.5
MSC2020 30A10, 30C10, 30C15

© Н. А. Николаева[1]

Задача о равновесии упругого тела с трещиной и тонкими включениями, которые сопряжены между собой

В работе рассматриваются задачи о сопряжении тонких упругих и жестких включений с возможным отслоением в упругих телах при наличии трещины. На трещине и в точке пересечения трещины с тонким включением используются краевые условия в виде неравенств, исключающие взаимное проникание берегов трещин и тонких включений. Установлены существование и единственность решения задач. Доказана эквивалентность двух постановок: вариационной и дифференциальной. Исследован предельный переход по параметру жесткости тонкого упругого включения.

Ключевые слова: *трещина, тонкое жесткое включение, тонкое упругое включение, отслоение, сопряжение, вариационная задача, условие непроникания.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202408

Введение

В настоящее время построение и изучение математических моделей, описывающих сопряжение конструкций в напряженно-деформированном состоянии, а также тел с неоднородностями в виде включений и трещин представляет собой актуальную тему для исследования. Это вызвано широким применением включений различной природы при создании композитных материалов [1]. Отличие механических свойств, а именно модулей упругости включений от основного материала способствует возникновению трещины (отслоения) на границе включений [2]. В связи с указанным фактом при моделировании важным является выбор краевых условий на берегах трещин. В представленной работе для описания трещин используются нелинейные краевые условия, которые не допускают взаимного проникания берегов трещин [3,4]. С использованием нелинейных краевых условий непроникания в течение последних двух десятилетий были проведены многочисленные исследования задач равновесия

[1] Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48. Электронная почта: niknataf@mail.ru

упругих тел с включениями различной размерности и жесткости при наличии отслоения. Обширный класс задач этого направления мы можем разделить по типу включений. Если размерность включения совпадает с размерностью тела, то такое включение называется объемным. Результаты исследований для объемных жестких включений, расположенных в упругих пластинах, можно найти в [3,4]. Мы говорим, что включение тонкое, если его размерность строго меньше размерности тела, в которое включение помещено. Математические модели тонких жестких включений в упругом теле с возможным отслоением и без отслоения исследовались в работах [5–16], а модели тонких упругих включений Бернулли – Эйлера и Тимошенко — в [11–15, 17–20] и [20–23] соответственно. Что касается классических подходов с линейными краевыми условиями для описания задач теории трещин, то читатель может обратиться к монографии [24].

В 1976 году была опубликована работа [25], в которой для уравнений второго и четвертого порядка из теории изгиба тонких упругих пластинок сформулированы условия сопряжения и всевозможные линейные граничные условия. Впоследствии были рассмотрены разнообразные задачи о сопряжении двух линейно-упругих пластин и структур [26,27], системы двух балок (стержней) [28,29], линейных включений и трещин и др. [30–34]. Также в работе [35] исследована задача об одностороннем контакте двух упругих тел.

Нелинейные краевые задачи о сопряжении различных типов тонких включений, контактирующих в одной точке в упругих телах, исследованы в недавних работах [8, 11–15,18,20–22,36]. Дополнительная сложность этих задач заключается в отыскании краевых условий в точках сопряжения, поскольку вид краевых условий зависит от моделей, используемых для описания включений.

В представленной работе исследуется задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, которая пересекает отслоившееся тонкое включение в некоторой точке. Предполагается, что трещина точкой пересечения делит включение на две части. В результате возникает сопряжение этих частей. Исследованы условия сопряжения как тонких жестких, так и упругих включений Бернулли – Эйлера. В отличие от предыдущих работ [8, 11, 14, 15, 18, 20–22, 36], где рассмотрены сопряжения тонких включений, в нашей работе, исходя из геометрии расположения включения и трещины, условие непроникания учитывается не только в трещине (отслоении) но и в точке пересечения включения с трещиной. С физической точки зрения такое нелинейное условие будет более точно описывать взаимовлияние частей включения, поскольку проникание тонких включений друг в друга будет исключено. Настоящая работа является продолжением работы [13]. В отличие от [13] здесь рассмотрены разные случаи отслоения тонких включений, представлены корректные вариационные и дифференциальные постановки задач в виде уравнений равновесия вместе с полной системой краевых условий. При этом полученные дифференциальные постановки содержат условия, описывающие сопряжение тонких включений. Более того, проведен анализ сходимости решений при стремлении параметра жесткости включения к бесконечности.

Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ. Пусть $\overline{\gamma}\subset\Omega$, $\overline{\Gamma}_c\subset\Omega$ — гладкие кривые без самопересечений такие, что $\gamma\cap\Gamma_c=\{(0,0)\}$. Предположим, что существуют продолжения кривых Γ_c и γ, пересекающие границу Γ и разбивающие область Ω на четыре подобласти D_1, D_2, D_3, D_4 с липшицевыми границами ∂D_i, причем $meas(\Gamma\cap\partial D_i)>0$, $i=1,2,3,4$. Для упрощения записи нормали к Γ_c и к γ обозначим через $\nu=(\nu_1,\nu_2)$; ν_0 — нормаль в точке $\{(0,0)\}$, которая совпадает с направлением нормали ν к Γ_c (см. рис. 1). Направлением нормалей ν определяются положительные и отрицательные берега данных кривых. Обозначим $\Omega^c_\gamma=\Omega\setminus(\overline{\gamma}\cup\overline{\Gamma}_c)$. В наших рассуждениях Ω^c_γ будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, γ — тонкому включению, Γ_c — трещине. Следовательно, трещина разбивает тонкое включение на две части, так что $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\{(0,0)\}$, где γ_1 и γ_2 — гладкие кривые.

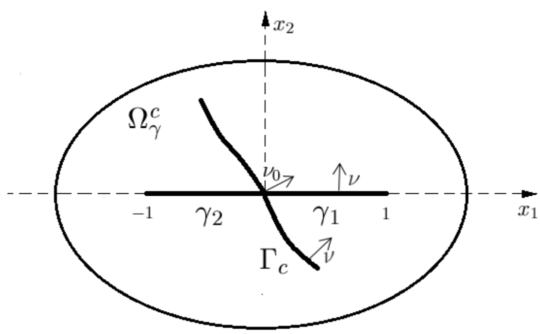

Рис. 1. Область Ω с трещиной Γ_c и тонкими включениями γ_1, γ_2

Далее для поставленной задачи будут исследованы три случая сопряжения, а именно γ_1 и γ_2 будут соответствовать следующим видам тонких включений: 1) жестким, 2) упругим, 3) жесткому и упругому соответственно. При этом в каждом случае будет предполагаться наличие отслоения вдоль тонкого включения.

1. Жесткое включение с отслоением.

Рассмотрим случай, когда γ_1 и γ_2 соответствуют тонким жестким включениям. Предположим, что имеется отслоение тонкого включения на положительном берегу γ_2^+ и, таким образом, между упругим телом и включением γ_2 имеется трещина. Перемещения включения совпадают с перемещениями упругого тела на γ_2^-. Наряду с этим следует отметить, что тонкие жесткие включения могут быть криволинейными (см. рис. 2) и в частном случае прямолинейными (см. рис. 1).

Введем пространство инфинитезимальных жестких перемещений

$$R(\gamma_i)=\left\{\rho_i=(\rho_{i1},\rho_{i2})\;\middle|\;\begin{array}{r}\rho_i(x_1,x_2)=b_i(-x_2,x_1)+(c_{i1},c_{i2});\\ b_i,\ c_{i1},\ c_{i2}=const,\ (x_1,x_2)\in\gamma_i\end{array}\right\},\ i=1,2.$$

Ниже с целью упрощения записи будем использовать следующие обозначения для функций: $\rho|_{\gamma_1}=\rho_1$ и $\rho|_{\gamma_2}=\rho_2$, $\rho_i\in R(\gamma_i)$, $\quad i=1,2$.

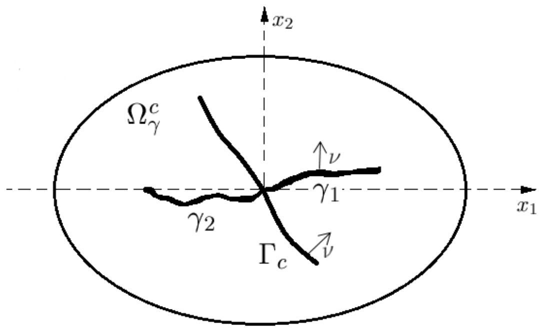

Рис. 2. Область Ω с трещиной Γ_c и тонкими жесткими включениями γ_1, γ_2

Дифференциальная постановка задачи о равновесии двумерного упругого тела с трещиной Γ_c и тонкими жесткими включениями γ_1, γ_2, которые отслаиваются на γ_1^+ и γ_2^+, состоит в следующем. Для заданных внешних сил $f=(f_1,f_2)\in L^2(\Omega)^2$ найти поле перемещений $u=(u_1,u_2)$ и тензор напряжений $\sigma=\{\sigma_{ij}\}$, определенные в Ω_γ^c, и постоянные c_{1i}^0,c_{2i}^0 функций $\rho_i^0\in R(\gamma_i)$, $i,j=1,2$, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \qquad \sigma = A\varepsilon(u) \qquad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{1}$$

$$u=0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2}$$

$$[u_\nu]\geqslant 0, \qquad \sigma_\nu\leqslant 0, \qquad [\sigma_\nu]=0, \qquad \sigma_\tau^+=0, \qquad \sigma_\tau^-=0, \qquad \sigma_\nu[u_\nu]=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{3}$$

$$((c_{11}^0,c_{12}^0)-(c_{21}^0,c_{22}^0))\nu_0\geqslant 0, \qquad u=\rho_1^0 \ \text{ на } \quad \gamma_1, \qquad u^-=\rho_2^0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \tag{4}$$

$$[u_\nu]\geqslant 0, \qquad \sigma_\nu^+\leqslant 0, \qquad \sigma_\tau^+=0, \qquad \sigma_\nu^+[u_\nu]=0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\gamma_i}[\sigma^2]x_1-\int\limits_{\gamma_i}[\sigma^1]x_2=0, \tag{6}$$

$$c_{11}^0\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^1]+c_{12}^0\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^2]+c_{21}^0\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]+c_{22}^0\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2]=0, \tag{7}$$

$$c_{11}\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^1]+c_{12}\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^2]+c_{21}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]+c_{22}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2]\leqslant 0 \qquad \forall\ \ c_{i1},\ c_{i2}=const, \tag{8}$$

$$((c_{11},c_{12})-(c_{21},c_{22}))\nu_0\geqslant 0,$$

$\rho_i=b_i(-x_2,x_1)+(c_{i1},c_{i2})$, $\rho_i\in R(\gamma_i)$, $i=1,2$. Здесь и ниже $[v]=v^+-v^-$ — скачок функции v на Γ_c, где $v^+=v|_{\Gamma_c^+}$ и $v^-=v|_{\Gamma_c^-}$ соответствуют значениям функции v на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_c по отношению к нормали ν. Аналогичное верно и для функций v на γ. Компоненты тензоров малых деформаций $\varepsilon=\{\varepsilon_{ij}\}$ определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j=1,2.$$

Тензор модулей упругости $A=\{a_{ijkl}\}$ обладает свойствами симметрии

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),$$

и положительной определенности

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \forall\, \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = const > 0.$$

Кроме того,

$$\text{div}\ \sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j}), \quad \sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j) = \left(\sigma^1, \sigma^2\right), \quad i,j = 1,2,$$
$$(\tau_1, \tau_2) = (\nu_2, -\nu_1), \quad \sigma_\tau = \sigma\nu \cdot \tau, \quad u_\nu = u \cdot \nu.$$

Все двухиндексные величины предполагаются симметричными. По повторяющимся индексам производится суммирование. Для удобства записи всюду в тексте в интегралах будем опускать дифференциал от переменной интегрирования.

В дифференциальной постановке соотношения (1) представляют собой уравнения равновесия и линейный закон Гука соответственно. Условие (2) описывает закрепление тела на внешней границе Γ. Второе и третье равенства из (4) указывают, что структура для перемещений задана на γ_1, а также на отрицательном берегу включения γ_2. Первое краевое условие из (3) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины. Вместе с тем данное условие $[u_\nu]\geqslant 0$ выполняется почти всюду на Γ_c, и поэтому оно может не выполняться в точке сопряжения $(0,0)$. Первое условие из (4), в свою очередь, обеспечивает непроникание тонких жестких включений γ_1 и γ_2 друг в друга в точке $(0,0)$. Покажем это. Справедливо, что в точке сопряжения $\rho_i^0(0,0)=(\rho_{i1}^0,\rho_{i2}^0)=(-b_i^0x_2+c_{i1}^0,b_i^0x_1+c_{i2}^0)=(c_{i1}^0,c_{i2}^0)$, $i=1,2$. Таким образом, в точке $(0,0)$ из первого неравенства (3) будет следовать первое неравенство (4):

$$\left(\rho_1^0(0,0) - \rho_2^0(0,0)\right)\nu_0 = \left(\left(c_{11}^0, c_{12}^0\right) - \left(c_{21}^0, c_{22}^0\right)\right)\nu_0 \geqslant 0.$$

Оставшиеся краевые условия (3) сопровождают условие взаимного непроникания. Набор нелинейных условий (5) описывает отслоение тонкого жесткого включения γ_2. Равенство (6) означает, что главные векторы моментов, которые действуют на γ_1 и γ_2, равны нулю. Условия сопряжения (7) и (8) представляют собой реализацию принципа виртуальных перемещений. Оказывается, что на истинных перемещениях точек тела сумма главных векторов сил, которые действуют на γ_1 и γ_2, обращается в ноль, а для всех возможных перемещений имеем соответствующее неравенство (8).

Рассмотрим вариационную формулировку задачи (1)–(8). Вариационный подход позволяет исследовать вопросы существования и единственности решения. Для этого введем функциональное пространство

$$H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma) = \left\{v \in H^1(\Omega^c_\gamma) \mid v = 0 \text{ п. в. на } \Gamma\right\},$$

где $H^1(\Omega^c_\gamma)$ пространства Соболева. Определим выпуклое и замкнутое в $H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2$ множество допустимых перемещений:

$$K_1 = \Big\{v = (v_1, v_2) \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2 \ \Big| \ \ v|_{\gamma_1} = \rho_1 \in R(\gamma_1); \ \ v|_{\gamma_2^-} = \rho_2 \in R(\gamma_2);$$

$$[v_\nu] \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2; \quad ((c_{11}, c_{12}) - (c_{21}, c_{22}))\nu_0 \geqslant 0, \quad c_{1i}, c_{2i} = const, \quad i = 1, 2 \Big\}.$$

Рассмотрим задачу минимизации потенциальной энергии

$$\inf_{u \in K_1} \Pi(u), \tag{9}$$

где

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu.$$

Здесь $\sigma(u) = \sigma$ определяются из (1), то есть $\sigma(u) = A\varepsilon(u)$, и для простоты мы используем обозначения $\sigma(u)\varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)$, $fu = f_i u_i$. Задача (9) имеет решение, поскольку функционал $\Pi(u)$ обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу, а множество K_1 является слабо замкнутым в силу выпуклости и замкнутости. Более того, решение задачи (9) удовлетворяет следующему вариационному неравенству

$$u \in K_1, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) \geqslant \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall\, \bar{u} \in K_1. \tag{10}$$

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что задача (10) имеет два решения: u и $\tilde{u}$. Поскольку неравенство справедливо для всех $\bar{u} \in K_1$, в неравенство для первого решения u в качестве пробного элемента $\bar{u}$ возьмем второе решение $\tilde{u}$. Также в неравенство для второго решения $\tilde{u}$ подставим $\bar{u} = u$. Далее сложим полученные при этом неравенства. Тогда, с одной стороны, верно соотношение

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u})\varepsilon(u - \tilde{u}) \leqslant 0.$$

С другой стороны, в силу действия неравенства Корна [4], получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u})\varepsilon(u - \tilde{u}) \geqslant 0.$$

В результате имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u - \tilde{u})\varepsilon(u - \tilde{u}) = 0.$$

Отсюда следует, что $u = \tilde{u}$. Таким образом, решение задачи (10) единственно.

Теорема 1. *Формулировки* (1)–(8) *и* (10) *эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Пусть выполнено (10). Легко можно получить уравнения равновесия (1), которые будут выполняться в смысле обобщенных функций (см., например, [4]). Соотношения (2), (4) вытекают из определения множества K_1. Доказательство справедливости краевых условий (3) мы опускаем, так как с аналогичной схемой читатель может ознакомиться в работе [11].

Рассмотрим получение краевых условий (5)–(8). Для этого будем использовать формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(v) = -\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \mathrm{div}\sigma\cdot v - \int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot v] - \int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot v] - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot v] =$$

$$= -\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \mathrm{div}\sigma\cdot v - \int\limits_{\Gamma_c}([\sigma_\nu\cdot v_\nu] + [\sigma_\tau\cdot v_\tau]) - \int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot v] - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot v],$$

где $v_\tau = v\cdot\tau$; $u=(u_1,u_2)$ и $v=(v_1,v_2)$ — гладкие функции, определенные в области Ω^c_γ. Применяя данную формулу Грина, а также учитывая уравнения равновесия (1), вариационное неравенство (10) можем переписать в виде:

$$\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar u - u)] + \int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot(\bar u - u)] + \int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot(\bar u - u)] \leqslant 0. \qquad (11)$$

Выберем в (11) тестовую функцию вида $\bar u = u + \widetilde u$, где $\widetilde u \in K_1$ такая, что $[\widetilde u_\nu]=0$ на Γ_c. Предположим, что $\widetilde u|_{\gamma_1}=0$, $\widetilde u|_{\gamma_2^-}=0$. Получим

$$\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\widetilde u^+ = \int\limits_{\gamma_2}(\sigma^+_\nu\widetilde u^+_\nu + \sigma^+_\tau\widetilde u^+_\tau) \leqslant 0.$$

Поскольку на функцию $\widetilde u^+_\tau$ отсутствуют ограничения, имеем $\sigma^+_\tau=0$ на γ_2. Тогда последнее неравенство примет вид $\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+_\nu\widetilde u^+_\nu \leqslant 0$. Отсюда в силу действия неравенства $\widetilde u^+_\nu \geqslant 0$ на γ_2 справедливо соотношение $\sigma^+_\nu \leqslant 0$ на γ_2. Итак, $\sigma^+_\tau = 0$ и $\sigma^+_\nu \leqslant 0$ на γ_2.

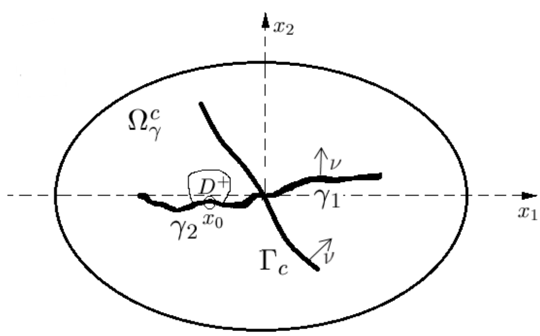

Рис. 3. Окрестность точки x_0

Докажем, что выполняется равенство $\sigma^+_\nu[u_\nu]=0$ на γ_2. Рассмотрим в качестве пробных элементов функции $\bar u = u + \lambda\eta$ и $\bar u = u - \lambda\eta$, где $\mathrm{supp}\eta \subseteq \bar D^+$. Примем за D^+ малую окрестность точки x_0 (см. рисунок 3). Предположим, что в $\bar D^+$ выполняется $[u_\nu]>0$. Малый параметр $\lambda>0$ выберем так, чтобы были справедливы включения

$\bar{u}=u+\lambda\eta\in K_1$, $\bar{u}=u-\lambda\eta\in K_1$. Подставляя функции $\bar{u}$ в (11) и применяя полученные краевые условия, будем иметь

$$\int\limits_{\gamma_2\cap\bar{D}^+} \sigma_\nu^+[\eta_\nu]=0.$$

Отсюда следует $\sigma_\nu^+=0$ на $\gamma_2\cap\bar{D}^+$. Аналогично предполагая $\sigma_\nu^+<0$, получим последнее равенство из (5).

Теперь покажем справедливость условий (6) и (8). Подставим в (11) в качестве пробных элементов функцию $\bar{u}=u+\widetilde{u}$ такую, что $[\widetilde{u}_\nu]=0$ на Γ_c и γ_2. С учетом (3) и (5) получим

$$\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot\widetilde{u}]+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot\widetilde{u}]\pm\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot\widetilde{u}^-=\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu]\rho_1+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\rho_2\leqslant 0.$$

Здесь и далее в тексте символ $\pm$ означает, что мы производим действия сложения и вычитания слагаемого, например, $\pm\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot\widetilde{u}^-=+\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot\widetilde{u}^--\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot\widetilde{u}^-$. Пусть $[\sigma\nu]=\big([\sigma^1],[\sigma^2]\big)$. Тогда, учитывая заданный вид функций ρ_1 и ρ_2, получим

$$\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu]\rho_1+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\rho_2=\int\limits_{\gamma_1}\big(\big[\sigma^1\big],\big[\sigma^2\big]\big)\,(-b_1x_2+c_{11},b_1x_1+c_{12})+$$

$$+\int\limits_{\gamma_2}\big(\big[\sigma^1\big],\big[\sigma^2\big]\big)\,(-b_2x_2+c_{21},b_2x_1+c_{22})=c_{11}\int\limits_{\gamma_1}\big[\sigma^1\big]+c_{12}\int\limits_{\gamma_1}\big[\sigma^2\big]+b_1\int\limits_{\gamma_1}\big(\big[\sigma^2\big]x_1-\big[\sigma^1\big]x_2\big)+$$

$$+c_{21}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]+c_{22}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2]+b_2\int\limits_{\gamma_2}([\sigma^2]x_1-[\sigma^1]x_2)\leqslant 0.$$

Отсюда в силу произвольности b_1,b_2 следуют равенства (6) и неравенство (8).

Справедливость равенства (7) докажем, последовательно выбрав $\bar{u}=0$ и $\bar{u}=2u$ в (11) в качестве пробных функций и применив краевые условия (3)–(6). Таким образом, мы получили, что из вариационного неравенства (10) следует (1)–(8).

Докажем теперь, что из (1)–(8) можем получить (10). Пусть выполнены (1)–(8). Предположим, что u – гладкое решение задачи (1)–(8). Умножим (1) на $\bar{u}-u$, где $\bar{u}\in K_1$. Проинтегрируем по области Ω_γ^c, получим

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\operatorname{div}\,\sigma\cdot(\bar{u}-u)=\int\limits_{\Omega_\gamma^c}f(\bar{u}-u).$$

Данное равенство после применения формулы Грина переписывается так:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u)-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}f(\bar{u}-u)=-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar{u}-u)]-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}[\sigma\nu\cdot(\bar{u}-u)]. \qquad (12)$$

Для получения вариационного неравенства (10) нам достаточно показать, что правая часть (60) неотрицательна. Итак, для правой части (60) справедлива цепочка соотношений

$$-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar{u}-u)]-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}[\sigma\nu\cdot(\bar{u}-u)]\pm\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot(\bar{u}^- - u^-)=$$

$$=-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar{u}-u)]-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu]\cdot\rho_1+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu]\cdot\rho_1^0-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\cdot\rho_2+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\cdot\rho_2^0-\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot[\bar{u}]+\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot[u].$$

Для первого слагаемого правой части последнего равенства в силу существования краевых условий (3) имеем, что $-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar{u}-u)]=-\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_\nu[\bar{u}_\nu]$. Для суммы оставшихся слагаемых правой части последнего равенства, вводя обозначение: $[\sigma\nu]=([\sigma^1],[\sigma^2])$, учитывая заданный вид функций ρ_1 и ρ_2, а также принимая во внимание условия (5), (6) и (7), получим

$$-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu]\cdot\rho_1+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu]\cdot\rho_1^0-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\cdot\rho_2+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\cdot\rho_2^0-\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot[\bar{u}]+\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot[u]=$$

$$=-\int\limits_{\gamma_2}\sigma_\nu^+[\bar{u}_\nu]--c_{11}\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^1]-c_{12}\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^2]-c_{21}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]-c_{22}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2].$$

Таким образом, равенство (60) можем записать в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u)-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}f(\bar{u}-u)=$$
$$=-\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_\nu[\bar{u}_\nu]-\int\limits_{\gamma_2}\sigma_\nu^+[\bar{u}_\nu]-c_{11}\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^1]-c_{12}\int\limits_{\gamma_1}[\sigma^2]-c_{21}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]-c_{22}\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2]. \tag{13}$$

Так как функция $\bar{u}$ из K_1, то для нее справедливо соотношение $[\bar{u}_\nu]\geqslant 0$ на Γ_c и на γ_2. Учитывая условия $\sigma_\nu\leqslant 0$ на Γ_c и $\sigma_\nu^+\leqslant 0$ на γ_2, получим, что первые два слагаемых правой части (13) неотрицательны. Сумма оставшихся слагаемых правой части (13) неотрицательна в силу (8). Следовательно, из (13) получаем вариационное неравенство (10). Теорема 1 полностью доказана. □

Замечание. В дополнение к (1)–(8) приведем еще одну дифференциальную формулировку задачи (10), которая имеет следующий вид. Требуется найти $u=(u_1,u_2)$, $\sigma=\{\sigma_{ij}\}$ и постоянные c_{1i}^0, c_{2i}^0 функций $\rho_i^0\in R(\gamma_i)$, $i,j=1,2$, такие, что

$$-\mathrm{div}\,\sigma=f,\quad \sigma=A\varepsilon(u)\quad \text{в}\quad \Omega_\gamma^c, \tag{14}$$
$$u=0\quad \text{на}\quad \Gamma,\qquad [u_\nu]\geqslant 0\quad \text{на}\quad \Gamma_c, \tag{15}$$
$$((c_{11}^0,c_{12}^0)-(c_{21}^0,c_{22}^0))\nu_0\geqslant 0,\quad u=\rho_1^0\quad \text{на}\quad \gamma_1, \tag{16}$$
$$u^-=\rho_2^0,\quad [u_\nu]\geqslant 0\quad \text{на}\quad \gamma_2, \tag{17}$$
$$\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot u]+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot u]+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot u]=0, \tag{18}$$

$$\int\limits_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot \bar{u}] + \int\limits_{\gamma_1} [\sigma\nu \cdot \bar{u}] + \int\limits_{\gamma_2} [\sigma\nu \cdot \bar{u}] \leqslant 0, \quad \bar{u} \in K_1. \tag{19}$$

Приведенная формулировка (14)–(19) также эквивалентна (10) на классе гладких решений и, следовательно, эквивалентна (1)–(8).

2. Упругое включение с отслоением.

В этом разделе кривая Γ_c будет соответствовать трещине, которая прямолинейно пересекает включение, а $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$ — тонким упругим балкам с заданными свойствами (см. рис. 4). В частности, считаем, что поведение балок γ_1, γ_2 описывается моделью Бернулли–Эйлера. При этом на положительном берегу γ_2^+ предполагается наличие отслоения.

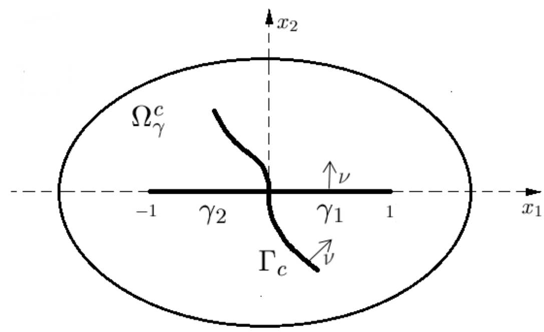

Рис. 4. Область Ω с трещиной Γ_c и тонкими упругими включениями γ_1, γ_2

Формулировка задачи равновесия в этом случае будет такой. Найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжения $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, определенные в Ω_γ^c, и перемещения тонких включений v^i, w^i, определенные на γ_i, $i, j = 1,2$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{20}$$

$$v^i_{xxxx} = [\sigma_\nu], \quad -w^i_{xx} = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_i, \tag{21}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{22}$$

$$[u_\nu] \geqslant 0, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\tau^- = 0, \quad \sigma_\nu [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{23}$$

$$w^1(0) - w^2(0) \geqslant 0, \tag{24}$$

$$v^1 = u_\nu, \quad w^1 = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_1, \tag{25}$$

$$v^2 = u_\nu^-, \quad w^2 = u_\tau^- \quad [u_\nu] \geqslant 0, \quad \sigma_\nu^+ \leqslant 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \tag{26}$$

$$v^1_{xx} = v^1_{xxx} = w^1_x = 0 \ \text{ при } \ x = 1, \quad v^2_{xx} = v^2_{xxx} = w^2_x = 0 \ \text{ при } \ x = -1, \tag{27}$$

$$v^1_{xx} = v^2_{xx} = v^1_{xxx} = v^2_{xxx} = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \tag{28}$$

$$(w^1_x w^1)(0) - (w^2_x w^2)(0) = 0, \tag{29}$$

$$-(w^1_x \bar{w}^1)(0) + (w^2_x \bar{w}^2)(0) \geqslant 0 \quad \forall\, \bar{w}^i \in H^1(\gamma_i), \quad \bar{w}^1(0) - \bar{w}^2(0) \geqslant 0, \tag{30}$$

$i=1,2$. Здесь функции, определенные на γ, мы отождествляем с функциями переменной x; $v_x=\frac{dv}{dx}$, $x=x_1$, $(x_1,x_2)\in\Omega$. Причем функция v такая, что $v|_{\gamma_1}=v^1$ и $v|_{\gamma_2^-}=v^2$. Аналогичное верно и для функции w. Поскольку в этом разделе $\nu_0=(1,0)$, то из первого неравенства (23) получим, что условие непроникания в точке сопряжения в данном случае примет вид (24)

$$((w^1(0),v^1(0))-(w^2(0),v^2(0)))\nu_0 = w^1(0)-w^2(0)\geqslant 0$$

Уравнения (21) соответствуют дифференциальным уравнениям четвертого и второго порядка для смещений тонких упругих включений в рамках приближенной гипотезы балок Бернулли–Эйлера. При этом правые части этих соотношений описывают влияние упругой среды на γ_1 и γ_2. Соотношения (25) обеспечивают совпадение вертикальных (по оси x_2) и горизонтальных (по оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включений на γ_1 и γ_2^-. Краевые условия (27) обеспечивают нулевые моменты, нулевые поперечные силы и нулевые касательные силы для упругого включения при $x=-1$ и $x=1$. Равенства (28) означают нулевые моменты и нулевые поперечные силы для упругих включений при $x=0$. Соотношения (30) и (29) представляют собой условия сопряжения при $x=0$. Группа краевых условий (23), (26) определяется аналогично предыдущей модели.

Приведем вариационную формулировку задачи (20)–(30). Введем для этого множество допустимых перемещений

$$K_2=\{(u,v,w)\in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2\times H^2(\gamma_1\cup\gamma_2)\times H^1(\gamma_1\cup\gamma_2)\mid v^1=u_\nu,\quad w^1=u_\tau \text{ на } \gamma_1,$$
$$v^2=u^-_\nu,\quad w^2=u^-_\tau \text{ на } \gamma_2,\quad [u_\nu]\geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2,\quad w^1(0)-w^2(0)\geqslant 0\}$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$\inf_{(u,v,w)\in K_2}\left\{\frac12\int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(u)-\int\limits_{\Omega^c_\gamma}fu+\frac12\int\limits_{\gamma_1}(v^1_{xx})^2+\frac12\int\limits_{\gamma_1}(w^1_x)^2+\frac12\int\limits_{\gamma_2}(v^2_{xx})^2+\frac12\int\limits_{\gamma_2}(w^2_x)^2\right\}. \quad (31)$$

Поскольку множество K_2 является слабо замкнутым, функционал в (31) является слабо полунепрерывным снизу, а также обладает свойством коэрцитивности (близкие рассуждения можно найти, например, в [17]) задача (31) имеет решение (u,v,w), которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$(u,v,w)\in K_2,\quad \int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u)-\int\limits_{\Omega^c_\gamma}f(\bar u-u)+\int\limits_{\gamma_1}v^1_{xx}(\bar v^1_{xx}-v^1_{xx})+\int\limits_{\gamma_1}w^1_x(\bar w^1_x-w^1_x)+$$
$$+\int\limits_{\gamma_2}v^2_{xx}(\bar v^2_{xx}-v^2_{xx})+\int\limits_{\gamma_2}w^2_x(\bar w^2_x-w^2_x)\geqslant 0\quad \forall\ (\bar u,\bar v,\bar w)\in K_2. \quad (32)$$

Более того, данное решение будет единственным. Единственность решения можно доказать методом от противного. Подробные выкладки мы здесь приводить не будем.

Теорема 2. *Формулировки* (20)–(30) *и* (32) *эквивалентны в предположении, что решения этих задач достаточно гладкие.*

Доказательство. Покажем, что из вариационного неравенства (32) можно получить (20)–(29). Заметим, что соотношения (22), (24), (25) следуют из определения множества K_2. Уравнения равновесия (20) и краевые условия (23) и (26) получаются аналогично модели из первого раздела. Таким образом, остается рассмотреть доказательства получения из вариационного неравенства краевых условий (21), (27)–(30).

Для начала установим справедливость соотношений (21), (27) и (28). Рассмотрим функции $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in K_2$ такие, что $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c и γ_2, $\tilde{w}^1(0) - \tilde{w}^2(0) = 0$. В неравенство (32) сначала подставим тестовые функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) + (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$. Затем подставим функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) - (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$. После интегрирования по частям и применения уравнения равновесия (20) получим

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] - \int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] + \int\limits_{\gamma_1} v^1_{xxxx}\tilde{v}^1 - \int\limits_{\gamma_1} w^1_{xx}\tilde{w}^1 + \int\limits_{\gamma_2} v^2_{xxxx}\tilde{v}^2 - \int\limits_{\gamma_2} w^2_{xx}\tilde{w}^2 - \\
-v^1_{xxx}\tilde{v}^1 \,\Big|_0^1 + v^1_{xx}\tilde{v}^1_x \,\Big|_0^1 + w^1_x\tilde{w}^1 \,\Big|_0^1 - v^2_{xxx}\tilde{v}^2 \,\Big|_{-1}^0 + v^2_{xx}\tilde{v}^2_x \,\Big|_{-1}^0 + w^2_x\tilde{w}^2 \,\Big|_{-1}^0 = 0.
\end{gathered} \tag{33}$$

В (33) выберем $\tilde{v}^i = \tilde{v}^i_x = \tilde{w}^i = 0$ для $x = -1, 0, 1$. Применим краевые условия (23) и (26). В результате из равенства (33) будем иметь

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{\gamma_1}([\sigma_\nu]\tilde{u}_\nu + [\sigma_\tau]\tilde{u}_\tau) - \int\limits_{\gamma_2}([\sigma_\nu\tilde{u}_\nu] + [\sigma_\tau\tilde{u}_\tau]) \pm \int\limits_{\gamma_2}(\sigma^+_\nu\tilde{u}^-_\nu + \sigma^+_\tau\tilde{u}^-_\tau) + \int\limits_{\gamma_1} v^1_{xxxx}\tilde{v}^1 - \int\limits_{\gamma_1} w^1_{xx}\tilde{w}^1 + \\
+\int\limits_{\gamma_2} v^2_{xxxx}\tilde{v}^2 - \int\limits_{\gamma_2} w^2_{xx}\tilde{w}^2 = -\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\nu]\tilde{u}_\nu - \int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\tau]\tilde{u}_\tau - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\nu]\tilde{u}^-_\nu - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\tau]\tilde{u}^-_\tau + \\
+\int\limits_{\gamma_1} v^1_{xxxx}\tilde{v}^1 - \int\limits_{\gamma_1} w^1_{xx}\tilde{w}^1 + \int\limits_{\gamma_2} v^2_{xxxx}\tilde{v}^2 - \int\limits_{\gamma_2} w^2_{xx}\tilde{w}^2 = 0.
\end{gathered}$$

Отсюда в силу наличия равенств $\tilde{u}_\nu = \tilde{v}^1$, $\tilde{u}_\tau = \tilde{w}^1$ на γ_1, $\tilde{u}^-_\nu = \tilde{v}^2$, $\tilde{u}^-_\tau = \tilde{w}^2$ на γ_2 получим справедливость уравнений равновесия для упругих балок (21). После этого, возвращаясь к равенству (33), с учетом (21), (23) и (26) получим группу условий (27) и (28).

Для получения следующего условия возьмем в (32) в качестве пробных элементы $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) + (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in K_2$ такие, что $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c и γ_2. Интегрирование по частям здесь дает

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] - \int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] + \int\limits_{\gamma_1} v^1_{xxxx}\tilde{v}^1 - \int\limits_{\gamma_1} w^1_{xx}\tilde{w}^1 + \int\limits_{\gamma_2} v^2_{xxxx}\tilde{v}^2 - \int\limits_{\gamma_2} w^2_{xx}\tilde{w}^2 - \\
-v^1_{xxx}\tilde{v}^1 \,\Big|_0^1 + v^1_{xx}\tilde{v}^1_x \,\Big|_0^1 + w^1_x\tilde{w}^1 \,\Big|_0^1 - v^2_{xxx}\tilde{v}^2 \,\Big|_{-1}^0 + v^2_{xx}\tilde{v}^2_x \,\Big|_{-1}^0 + w^2_x\tilde{w}^2 \,\Big|_{-1}^0 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Принимая во внимание (21), (23), (25) и (26), последнее неравенство запишем в виде

$$\begin{gathered}
-v^1_{xxx}\tilde{v}^1(1) + v^1_{xx}\tilde{v}^1_x(1) + w^1_x\tilde{w}^1(1) + v^1_{xxx}\tilde{v}^1(0) - v^1_{xx}\tilde{v}^1_x(0) - w^1_x\tilde{w}^1(0) - \\
-v^2_{xxx}\tilde{v}^2(0) + v^2_{xx}\tilde{v}^2_x(0) + w^2_x\tilde{w}^2(0) + v^2_{xxx}\tilde{v}^2(-1) - v^2_{xx}\tilde{v}^2_x(-1) - w^2_x\tilde{w}^2(-1) \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Из этого неравенства в силу доказанных выше равенств (27) и (28) следует справедливость условия (30).

И, наконец, докажем выполнение равенства (29). Выберем последовательно в (32) тестовые функции вида $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=2(u,v,w)$ и $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=(0,0,0)$. В итоге получим равенство

$$-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot u]-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot u]-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot u]+\int\limits_{\gamma_1}v^1_{xxxx}v^1-\int\limits_{\gamma_1}w^1_{xx}w^1+\int\limits_{\gamma_2}v^2_{xxxx}v^2-\int\limits_{\gamma_2}w^2_{xx}w^2-$$
$$-v^1_{xxx}v^1\mid_0^1+v^1_{xx}v^1_x\mid_0^1+w^1_xw^1\mid_0^1-v^2_{xxx}v^2\mid_{-1}^0+v^2_{xx}v^2_x\mid_{-1}^0+w^2_xw^2\mid_{-1}^0=0.$$

Отсюда, согласно (21), (23), (25)–(28) получим условие (29). Таким образом, мы доказали, что из вариационного неравенства (32) следуют все соотношения (20)–(30).

Докажем теперь утверждение теоремы в обратную сторону. Пусть выполнены соотношения (20)–(30). Возьмем произвольную функцию $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})\in K_2$, умножим (20) на $(\bar{u}-u)$, первое равенство в (21) на $(\bar{v}^i-v^i)$, второе — на $(\bar{w}^i-w^i)$ и проинтегрируем соответственно по Ω^c_γ и $\gamma_i,\ i=1,2$, где $(u,v,w)\in K_2$ — гладкое решение задачи (20)–(30). После сложения интегралов будем иметь

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma}(-\mathrm{div}\ \sigma-f)(\bar{u}-u)+\int\limits_{\gamma_1}(v^1_{xxxx}-[\sigma_\nu])(\bar{v}^1-v^1)+\int\limits_{\gamma_1}(-w^1_{xx}-[\sigma_\tau])(\bar{w}^1-w^1)+$$
$$+\int\limits_{\gamma_2}(v^2_{xxxx}-[\sigma_\nu])(\bar{v}^2-v^2)+\int\limits_{\gamma_2}(-w^2_{xx}-[\sigma_\tau])(\bar{w}^2-w^2)=0.$$

Интегрируя по частям тождество выше, получим

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u)-\int\limits_{\Omega^c_\gamma}f(\bar{u}-u)+\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar{u}-u)]+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu(\bar{u}-u)]+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu(\bar{u}-u)]+$$
$$+\int\limits_{\gamma_1}v^1_{xx}(\bar{v}^1_{xx}-v^1_{xx})+\int\limits_{\gamma_1}w^1_x(\bar{w}^1_x-w^1_x)-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\nu](\bar{v}^1-v^1)-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\tau](\bar{w}^1-w^1)+$$
$$+\int\limits_{\gamma_2}v^2_{xx}(\bar{v}^2_{xx}-v^2_{xx})+\int\limits_{\gamma_2}w^2_x(\bar{w}^2_x-w^2_x)-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\nu](\bar{v}^2-v^2)-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\tau](\bar{w}^2-w^2)+$$
$$+v^1_{xxx}(\bar{v}^1-v^1)\mid_0^1-v^1_{xx}(\bar{v}^1_x-v^1_x)\mid_0^1-w^1_x(\bar{w}^1-w^1)\mid_0^1+v^2_{xxx}(\bar{v}^2-v^2)\mid_{-1}^0-$$
$$-v^2_{xx}(\bar{v}^2_x-v^2_x)\mid_{-1}^0-w^2_x(\bar{w}^2-w^2)\mid_{-1}^0=0.$$

Применив краевые условия (23), (27)–(29) а также разложения на нормальные и касательные составляющие, перепишем последнее равенство в виде

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u)-\int\limits_{\Omega^c_\gamma}f(\bar{u}-u)+\int\limits_{\gamma_1}v^1_{xx}(\bar{v}^1_{xx}-v^1_{xx})+\int\limits_{\gamma_1}w^1_x(\bar{w}^1_x-w^1_x)+\int\limits_{\gamma_2}v^2_{xx}(\bar{v}^2_{xx}-v^2_{xx})+$$
$$+\int\limits_{\gamma_2}w^2_x(\bar{w}^2_x-w^2_x)=-\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_\nu[\bar{u}_\nu]-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\nu](\bar{u}_\nu-u_\nu)-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\tau](\bar{u}_\tau-u_\tau)+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\nu](\bar{v}^1-v^1)+$$

$$+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\tau](\bar{w}^1-w^1)-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\nu(\bar{u}_\nu-u_\nu)]-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\tau(\bar{u}_\tau-u_\tau)]\pm\int\limits_{\gamma_2}\sigma_\nu^+(\bar{u}_\nu^- -u_\nu^-)\pm$$
$$\pm\int\limits_{\gamma_2}\sigma_\tau^+(\bar{u}_\tau^- -u_\tau^-)+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\nu](\bar{v}^2-v^2)+\int\limits_{\gamma_2}[\sigma_\tau](\bar{w}^2-w^2)-w_x^1\bar{w}^1(0)+w_x^2\bar{w}^2(0).$$

Отсюда в силу наличия (25) и (26) получим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u)-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}f(\bar{u}-u)+\int\limits_{\gamma_1}v_{xx}^1(\bar{v}_{xx}^1-v_{xx}^1)+\int\limits_{\gamma_1}w_x^1(\bar{w}_x^1-w_x^1)+\\ +\int\limits_{\gamma_2}v_{xx}^2(\bar{v}_{xx}^2-v_{xx}^2)+\int\limits_{\gamma_2}w_x^2(\bar{w}_x^2-w_x^2)=-\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_\nu[\bar{u}_\nu]-\int\limits_{\gamma_2}\sigma_\nu^+[\bar{u}_\nu]-w_x^1\bar{w}^1(0)+w_x^2\bar{w}^2(0).\end{gathered}\tag{34}$$

Заметим, что в правой части равенства (34) первые два слагаемых неотрицательны в силу (23), (26) и неравенств $[\bar{u}_\nu]\geqslant 0$ на Γ_c и γ_2 соответственно. Неотрицательность суммы оставшихся слагаемых получим из условия (30). Таким образом, из (34) следует вариационное неравенство (32). Теорема 2 полностью доказана. □

3. Сопряжение жесткого включения с упругим включением.

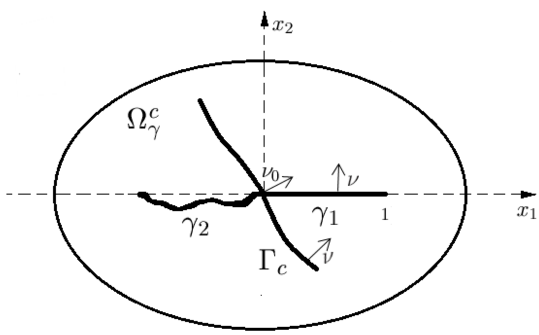

Рис. 5. Сопряжение тонкого упругого включения γ_1 с жесткими включением γ_2

В этом разделе для поставленной выше задачи рассмотрим случай, при котором γ_1 будет соответствовать упругому включению, а γ_2 — жесткому включению (см. рис. 5). Упругое включение, как и ранее, моделируется балкой Бернулли–Эйлера. Вместе с тем предполагается, что имеется отслоение как жесткого включения на γ_2^+, так и упругого включения на γ_1^+.

Введем пространство инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\gamma_2)=\{\rho=(\rho_1,\rho_2)\mid\rho(x_1,x_2)=b(-x_2,x_1)+(c_1,c_2);\ b,c_1,c_2=const,\ (x_1,x_2)\in\gamma_2\}.$$

Формулировка задачи равновесия в этом случае будет такой. Найти $u=(u_1,u_2)$ и σ, определенные в Ω_γ^c, перемещения точек тонкого включения v,w, определенные на γ_1, а также постоянные c_1^0, c_2^0 функции $\rho^0 \in R(\gamma_2)$ такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{35}$$

$$v_{xxxx} = [\sigma_\nu], \quad -w_{xx} = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_1, \tag{36}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{37}$$

$$[u_\nu] \geqslant 0, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\tau^- = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{38}$$

$$u|_{\gamma_2^-} = \rho^0, \quad [u_\nu] \geqslant 0, \quad \sigma_\nu^+ \leqslant 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \tag{39}$$

$$v = u_\nu^-, \quad w = u_\tau^-, \quad [u_\nu] \geqslant 0, \quad \sigma_\nu^+ \leqslant 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1, \tag{40}$$

$$\big((w(0), v(0)) - \big(c_1^0, c_2^0\big)\big)\, \nu_0 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{41}$$

$$v_{xx} = v_{xxx} = w_x = 0 \ \text{ при } \ x = 1, \quad v_{xx} = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \tag{42}$$

$$\int\limits_{\gamma_2} [\sigma^2] x_1 - \int\limits_{\gamma_2} [\sigma^1] x_2 = 0, \tag{43}$$

$$c_1^0 \int\limits_{\gamma_2} [\sigma^1] + c_2^0 \int\limits_{\gamma_2} [\sigma^2] - (v_{xxx} v)(0) + (w_x w)(0) = 0, \tag{44}$$

$$-c_1 \int\limits_{\gamma_2} [\sigma^1] - c_2 \int\limits_{\gamma_2} [\sigma^2] + (v_{xxx} \bar{v})(0) - (w_x \bar{w})(0) \geqslant 0 \quad \forall \ c_1, \ c_2 = const, \tag{45}$$

$$(\bar{v}, \bar{w}) \in H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1), \quad ((\bar{w}(0), \bar{v}(0)) - (c_1, c_2))\nu_0 \geqslant 0,$$

где $\rho = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2)$, $\rho \in R(\gamma_2)$.

В дифференциальной формулировке (35)–(45) неравенство (41) представляет собой условие непроникания в точке сопряжения. Покажем это. Поскольку $\rho^0(0,0) = (c_1^0, c_2^0)$ в точке сопряжения, условие непроникания из (38) примет вид

$$((w(0), v(0)) - \rho^0(0,0))\nu_0 = ((w(0), v(0)) - (c_1^0, c_2^0))\nu_0 \geqslant 0$$

и будет обеспечивать непроникание тонкого упругого включения γ_1 и тонкого жесткого включения γ_2 друг в друга при $x = 0$. Также условия сопряжения (43)–(45) будут сопровождать условие непроникания (41). При этом равенство (43) гарантирует равенство нулю главного момента силы, который действует на γ_2.

Приведем вариационную формулировку задачи (35)–(45). Введем множество допустимых перемещений

$$K_3 = \{(u, v, w) \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1) \mid v = u_\nu^-, \ \ w = u_\tau^- \text{ на } \gamma_1; \ [u_\nu] \geqslant 0$$
$$\text{п. в. на } \Gamma_c, \ \gamma_1 \text{ и } \gamma_2; \ \ u|_{\gamma_2^-} \in R(\gamma_2); \ \ ((w(0), v(0)) - (c_1, c_2))\nu_0 \geqslant 0, \ c_1, \ c_2 = const\}.$$

Множество K_3 является выпуклым и замкнутым, следовательно, слабо замкнутым в пространстве $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1)$. Можно решить задачу минимизации функционала энергии

$$\inf_{(u,v,w) \in K_3} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_1} (v_{xx})^2 + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_1} (w_x)^2 \right\}. \tag{46}$$

Задача (46) имеет решение, поскольку функционал обладает свойствами коэрцитивности (близкие рассуждения можно найти в [13]) и слабой полунепрерывности снизу. Более того, решение единственно и удовлетворяет вариационному неравенству

$$
\begin{gathered}
(u,v,w)\in K_3,\ \int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u)-\int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar u-u)+\\
+\int\limits_{\gamma_1} v_{xx}(\bar v_{xx}-v_{xx})+\int\limits_{\gamma_1} w_x(\bar w_x-w_x)\geqslant 0\quad \forall\ (\bar u,\bar v,\bar w)\in K_3.
\end{gathered}\tag{47}
$$

Теорема 3. *Формулировки* (35)–(45) *и* (47) *эквивалентны в предположении, что решения этих задач достаточно гладкие.*

Доказательство. Докажем сначала, что из вариационного неравенства (47) можно получить дифференциальную постановку (35)–(45). А именно, рассмотрим справедливость уравнений (36) и условий сопряжения (42)–(45), поскольку (37) и (41) содержатся во множестве K_3, а остальные условия можно получить, рассуждая аналогично тому, как это сделано в доказательствах теоремы 1 и 2.

Итак, применяя формулу Грина, а также учитывая уравнение равновесия (35), перепишем вариационное неравенство (47):

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar u-u)]-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot(\bar u-u)]-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot(\bar u-u)]+\int\limits_{\gamma_1}v_{xxxx}(\bar v-v)-\int\limits_{\gamma_1}w_{xx}(\bar w-w)-\\
-v_{xxx}(\bar v-v)\,|_0^1+v_{xx}(\bar v_x-v_x)\,|_0^1+w_x(\bar w-w)\,|_0^1\geqslant 0.
\end{gathered}\tag{48}
$$

Рассмотрим произвольные функции $(\tilde u,\tilde v,\tilde w)\in K_3$ такие, что $[\tilde u_\nu]=0$ на Γ_c, γ_1 и γ_2, $((\tilde w(0),\tilde v(0))-(\tilde c_1,\tilde c_2))\nu_0=0$. Подставляя последовательно функции $(\bar u,\bar v,\bar w)=(u,v,w)+(\tilde u,\tilde v,\tilde w)$, $(\bar u,\bar v,\bar w)=(u,v,w)-(\tilde u,\tilde v,\tilde w)$ как элементы множества K_3 в неравенство (48), получим

$$
-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot\tilde u]-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot\tilde u]-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot\tilde u]+\int\limits_{\gamma_1}v_{xxxx}\tilde v-\int\limits_{\gamma_1}w_{xx}\tilde w-v_{xxx}\tilde v\,|_0^1+v_{xx}\tilde v_x\,|_0^1+w_x\tilde w\,|_0^1=0.\tag{49}
$$

Из этого равенства выведем равенства (42). Затем, возвращаясь к тождеству (49), выбирая $\tilde u=0$ на γ_2, Γ_c и $\tilde v=\tilde w=0$ для $x=0$, в силу (40) получим

$$
-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot\tilde u]\pm\int\limits_{\gamma_1}\sigma^+\nu\cdot\tilde u^-+\int\limits_{\gamma_1}v_{xxxx}\tilde v-\int\limits_{\gamma_1}w_{xx}\tilde w=-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\nu]\tilde u_\nu-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\tau]\tilde u_\tau+\int\limits_{\gamma_1}v_{xxxx}\tilde v-\int\limits_{\gamma_1}w_{xx}\tilde w=0.
$$

Отсюда следует справедливость уравнений равновесия для упругой балки (36).

Теперь рассмотрим доказательства справедливости условий (43) и (45). Выберем в неравенство (48) тестовые функции вида $(\bar u,\bar v,\bar w)=(u,v,w)+(\tilde u,\tilde v,\tilde w)$, где $(\tilde u,\tilde v,\tilde w)\in K_3$ такие, что $[\tilde u_\nu]=0$ на Γ_c, γ_1 и γ_2. Получим

$$
-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot\tilde u]-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot\tilde u]-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot\tilde u]+\int\limits_{\gamma_1}v_{xxxx}\tilde v-\int\limits_{\gamma_1}w_{xx}\tilde w-v_{xxx}\tilde v\,|_0^1+v_{xx}\tilde v_x\,|_0^1+w_x\tilde w\,|_0^1\geqslant 0.\tag{50}
$$

Для второго слагаемого неравенства (50) справедливо, что

$$-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] = -\int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot\tilde{u}^+ + \int\limits_{\gamma_2}\sigma^-\nu\cdot\tilde{u}^- \pm \int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot\tilde{u}^- =$$

$$= -\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\cdot\rho - \int\limits_{\gamma_2}\sigma^+\nu\cdot[\tilde{u}] = -\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu]\cdot\rho = -\int\limits_{\gamma_2}([\sigma^1],[\sigma^2])((c_1,c_2)+b(-x_2,x_1)) =$$

$$= -c_1\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1] - c_2\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2] - b\left(\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2]x_1 - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]x_2\right).$$

Для третьего слагаемого неравенства (50) будет верна цепочка преобразований:

$$-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot\tilde{u}] = -\int\limits_{\gamma_1}\sigma^+\nu\cdot\tilde{u}^+ + \int\limits_{\gamma_1}\sigma^-\nu\cdot\tilde{u}^- \pm \int\limits_{\gamma_1}\sigma^+\nu\cdot\tilde{u}^- = -\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\nu]\tilde{u}_\nu - \int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\tau]\tilde{u}_\tau.$$

Следовательно, из (50), применяя краевые условия (36), (38)–(40) и (42), получим

$$-c_1\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1] - c_2\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2] - b\left(\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2]x_1 - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]x_2\right) + (v_{xxx}\tilde{v})(0) - (w_x\tilde{w})(0) \geqslant 0.$$

Отсюда в силу произвольности b получим равенство (43) и, вследствие этого, условие (45).

И, наконец, докажем справедливость равенства (44). После постановки в неравенство (48) пробных элементов, таких, что $(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = 2(u,v,w)$ и $(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = (0,0,0)$, будем иметь

$$-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot u] - \int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu\cdot u] - \int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu\cdot u] + \int\limits_{\gamma_1}v_{xxxx}v - \int\limits_{\gamma_1}w_{xx}w - v_{xxx}v\,\big|_0^1 + v_{xx}v_x\,\big|_0^1 + w_x w\,\big|_0^1 = 0.$$

В силу действия краевых условий (36), (38)–(40), (42) из последнего равенства получим

$$-\int\limits_{\gamma_2}\big([\sigma^1],[\sigma^2]\big)\big((c_1^0,c_2^0)+b^0(-x_2,x_1)\big) + (v_{xxx}v)(0) - (w_x w)(0) = 0.$$

Из этого равенства, учитывая (43), получим справедливость равенства (44). Таким образом, из вариационной задачи (47) следуют все соотношения (35)–(45).

Теперь докажем утверждение теоремы в обратную сторону. Пусть выполнено (35)–(45). Рассмотрим функцию $(u,v,w)\in K_3$, которая является гладким решением задачи (35)–(45), и пусть $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})\in K_3$. Умножим уравнения равновесия (35) на $(\bar{u}-u)$, уравнения (36) на $(\bar{v}-v)$ и $(\bar{w}-w)$. Проинтегрируем по области Ω_γ^c и по кривой γ_1 соответственно. После суммирования интегралов имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}(-\mathrm{div}\ \sigma - f)(\bar{u}-u) + \int\limits_{\gamma_1}(v_{xxxx}-[\sigma_\nu])(\bar{v}-v) + \int\limits_{\gamma_1}(-w_{xx}-[\sigma_\tau])(\bar{w}-w) = 0.$$

Интегрируя по частям последнее равенство, получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u)-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}f(\bar u-u)+\int\limits_{\gamma_1}v_{xx}(\bar v_{xx}-v_{xx})+\int\limits_{\gamma_1}w_x(\bar w_x-w_x)=-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu\cdot(\bar u-u)]-$$
$$-\int\limits_{\gamma_1}[\sigma\nu(\bar u-u)]-\int\limits_{\gamma_2}[\sigma\nu(\bar u-u)]+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\nu](\bar v-v)+\int\limits_{\gamma_1}[\sigma_\tau](\bar w-w)- \tag{51}$$
$$-v_{xxx}(\bar v-v)\mid_0^1+v_{xx}(\bar v_x-v_x)\mid_0^1+w_x(\bar w-w)\mid_0^1 .$$

Чтобы доказать справедливость вариационного неравенства (47) нам достаточно показать, что правая часть равенства (51) неотрицательна. Используя краевые условия (39),(40), (42)–(44), равенство (51) перепишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u)-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}f(\bar u-u)+\int\limits_{\gamma_1}v_{xx}(\bar v_{xx}-v_{xx})+\int\limits_{\gamma_1}w_x(\bar w_x-w_x)=-\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_\nu[\bar u_\nu]-$$
$$-\int\limits_{\gamma_1}\sigma_\nu^+[\bar u_\nu]-\int\limits_{\gamma_2}\sigma_\nu^+[\bar u_\nu]-c_1\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^1]-c_2\int\limits_{\gamma_2}[\sigma^2]+(v_{xxx}\bar v)(0)-(w_x\bar w)(0).$$

Первые три слагаемых правой части последнего равенства неотрицательны поскольку $\sigma_\nu\leqslant 0$, $[\bar u_\nu]\geqslant 0$ на Γ_c и $\sigma_\nu^+\leqslant 0$, $[\bar u_\nu]\geqslant 0$ на γ_i, $i=1,2$, соответственно, сумма остальных слагаемых неотрицательна вследствие краевого условия (45). Из этого делаем заключение, что из (51) следует вариационное неравенство (47).

Теорема 3 полностью доказана. □

4. Сходимость параметра жесткости к бесконечности

Вернемся к задаче, которая рассмотрена в разделе 2. Для простоты физические параметры тонких включений в модели (20)–(30) равнялись единице. В этом разделе мы введем в модель положительный параметр λ, который будет характеризовать жесткость упругого включения γ_2, и исследуем предельный переход при стремлении этого параметра к бесконечности. Дифференциальная формулировка семейства задач, зависящая от параметра $\lambda>0$, будет такой. Требуется найти $u^\lambda=(u_1^\lambda,u_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda=\{\sigma_{ij}^\lambda\}$, $v^{\lambda i},w^{\lambda i}$, $i,j=1,2$, такие, что

$$-\mathrm{div}\ \sigma^\lambda=f,\quad \sigma^\lambda=A\varepsilon(u^\lambda)\quad \text{в}\quad \Omega_\gamma^c, \tag{52}$$
$$v_{xxxx}^{\lambda1}=[\sigma_\nu^\lambda],\quad -w_{xx}^{\lambda1}=[\sigma_\tau^\lambda]\quad \text{на}\quad \gamma_1, \tag{53}$$
$$\lambda v_{xxxx}^{\lambda2}=[\sigma_\nu^\lambda],\quad -\lambda w_{xx}^{\lambda2}=[\sigma_\tau^\lambda]\quad \text{на}\quad \gamma_2, \tag{54}$$
$$u^\lambda=0\quad \text{на}\quad \Gamma, \tag{55}$$
$$[u_\nu^\lambda]\geqslant 0,\quad \sigma_\nu^\lambda\leqslant 0,\quad [\sigma_\nu^\lambda]=0,\quad \sigma_\tau^\lambda=0,\quad \sigma_\nu^\lambda[u_\nu^\lambda]=0\quad \text{на}\quad \Gamma_c, \tag{56}$$
$$w^{\lambda1}(0)-w^{\lambda2}(0)\geqslant 0, \tag{57}$$
$$v^{\lambda1}=u_\nu^\lambda,\quad w^{\lambda1}=u_\tau^\lambda\quad \text{на}\quad \gamma_1, \tag{58}$$
$$v^{\lambda2}=u_\nu^{\lambda-},\quad w^{\lambda2}=u_\tau^{\lambda-},\quad [u_\nu^\lambda]\geqslant 0,\quad \sigma_\nu^{\lambda+}\leqslant 0,\quad \sigma_\tau^{\lambda+}=0,\quad \sigma_\nu^{\lambda+}[u_\nu^\lambda]=0\quad \text{на}\quad \gamma_2, \tag{59}$$
$$v_{xx}^{\lambda1}=v_{xxx}^{\lambda1}=w_x^{\lambda1}=0\ \ \text{при}\ \ x=1,\quad v_{xx}^{\lambda2}=v_{xxx}^{\lambda2}=w_x^{\lambda2}=0\ \ \text{при}\ \ x=-1, \tag{60}$$

$$v_{xx}^{\lambda 1} = v_{xx}^{\lambda 2} = v_{xxx}^{\lambda 1} = v_{xxx}^{\lambda 2} = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \tag{61}$$

$$(w_x^{\lambda 1} w^{\lambda 1})(0) - \lambda (w_x^{\lambda 2} w^{\lambda 2})(0) = 0, \tag{62}$$

$$-(w_x^{\lambda 1} \bar{w}^1)(0) + \lambda (w_x^{\lambda 2} \bar{w}^2)(0) \geqslant 0 \quad \forall\, \bar{w}^i \in H^1(\gamma_i), \quad \bar{w}^1(0) - \bar{w}^2(0) \geqslant 0, \tag{63}$$

$i{=}1{,}2$. Решение краевой задачи (52)–(63) удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{gathered}(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in K_2, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) + \int\limits_{\gamma_1} v_{xx}^{1\lambda}(\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^{1\lambda}) + \\ + \int\limits_{\gamma_1} w_x^{1\lambda}(\bar{w}_x^1 - w_x^{1\lambda}) + \lambda \int\limits_{\gamma_2} v_{xx}^{2\lambda}(\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^{2\lambda}) + \lambda \int\limits_{\gamma_2} w_x^{2\lambda}(\bar{w}_x^2 - w_x^{2\lambda}) \geqslant 0 \quad \forall\, (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_2,\end{gathered} \tag{64}$$

где K_2 определено во втором разделе.

Перейдем к обоснованию предельного перехода при $\lambda \to \infty$ в задаче (64). Подставляя последовательно в (64) тестовые функции $(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = 2(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, $(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = (0,0,0)$, найдем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f u^\lambda + \int\limits_{\gamma_1} \big((v_{xx}^{1\lambda})^2 + (w_x^{1\lambda})^2\big) + \\ + \lambda \int\limits_{\gamma_2} \big((v_{xx}^{2\lambda})^2 + (w_x^{2\lambda})^2\big) \pm \alpha \int\limits_{\gamma_2} \big((v^{2\lambda})^2 + (w^{2\lambda})^2\big) = 0,\end{gathered} \tag{65}$$

где $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Согласно неравенству Корна, теореме вложения, а также условиям $u_\nu^{\lambda -} = v^{2\lambda}$, $u_\tau^{\lambda -} = w^{2\lambda}$ на γ_2 при малых $\alpha > 0$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda) - \alpha \int\limits_{\gamma_2} \big((v^{2\lambda})^2 + (w^{2\lambda})^2\big) \geqslant 0.$$

Впоследствии из равенства (65) получим равномерную по $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ оценку

$$\|u^\lambda\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2} + \|v^{1\lambda}\|^2_{H^2(\gamma_1)} + \|w^{1\lambda}\|^2_{H^1(\gamma_1)} + \|v^{2\lambda}\|^2_{H^2(\gamma_2)} + \|w^{2\lambda}\|^2_{H^1(\gamma_2)} \leqslant c.$$

Отсюда можно предполагать, что при $\lambda \to \infty$

$$u^\lambda \to u \quad \text{слабо в} \quad H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2, \tag{66}$$

$$v^{i\lambda} \to v^i \quad \text{слабо в} \quad H^2(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \tag{67}$$

$$w^{i\lambda} \to w^i \quad \text{слабо в} \quad H^1(\gamma_i), \quad i = 1, 2. \tag{68}$$

Кроме того, из (65) при $\lambda \geqslant \lambda_0$ также можем получить неравенство

$$\lambda \int\limits_{\gamma_2} \big((v_{xx}^{2\lambda})^2 + (w_x^{2\lambda})^2\big) \leqslant c.$$

Из последнего неравенства в силу слабой полунепрерывности снизу получим

$$v_{xx}^2 = 0, \quad w_x^2 = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2. \tag{69}$$

Следовательно, существуют постоянные $c_0, c_1, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$v^2(x) = c_0 + c_1 x, \quad w^2(x) = b, \quad x \in (-1, 0).$$

Это означает, что $u|_{\gamma_2} \in R(\gamma_2)$, где $R(\gamma_2)$ определено в разделе 3. Введем множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$K_4 = \{(u,v,w) \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1) \mid v = u_\nu, \quad w = u_\tau \text{ на } \gamma_1; \quad u|_{\gamma_2^-} \in R(\gamma_2);$$
$$[u_\nu] \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2; \quad w(0) - c_1 \geqslant 0, \ c_1 = const\}.$$

Выберем теперь произвольную функцию $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_4$. Обозначим $(\bar{v}, \bar{w})$ через $(\bar{v}^1, \bar{w}^1)$, а $(\bar{u}_2|_{\gamma_2}, \bar{u}_1|_{\gamma_2})$ через $(\bar{v}^2, \bar{w}^2)$. В этом случае $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i) \in K_2$. Подставим элемент $(\bar{u}, \bar{v}^i, \bar{w}^i)$, $i = 1,2$, в неравенство (64). Это влечет

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u^\lambda) + \int\limits_{\gamma_1} v^{1\lambda}_{xx}\bar{v}^1_{xx} + \int\limits_{\gamma_1} w^{1\lambda}_x \bar{w}^1_x \geqslant \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda) + \int\limits_{\gamma_1} (v^{1\lambda}_{xx})^2 +$$
$$+ \int\limits_{\gamma_1} (w^{1\lambda}_x)^2 - \lambda \int\limits_{\gamma_2} v^{2\lambda}_{xx}(\bar{v}^2_{xx} - v^{2\lambda}_{xx}) - \lambda \int\limits_{\gamma_2} w^{2\lambda}_x(\bar{w}^2_x - w^{2\lambda}_x). \tag{70}$$

С учетом (66)–(69) перейдем к нижнему пределу в обеих частях последнего неравенства. Для левой части неравенства (70) будем иметь

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \left\{ \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u^\lambda) + \int\limits_{\gamma_1} v^{1\lambda}_{xx}\bar{v}^1_{xx} + \int\limits_{\gamma_1} w^{1\lambda}_x \bar{w}^1_x \right\} =$$
$$= \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int\limits_{\gamma_1} v^1_{xx}\bar{v}^1_{xx} + \int\limits_{\gamma_1} w^1_x \bar{w}^1_x.$$

Рассмотрим правую часть неравенства (70). Используя очевидные неравенства

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \int\limits_{\gamma_2} (v^{2\lambda}_{xx})^2 \geqslant 0, \quad \liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \int\limits_{\gamma_2} (w^{2\lambda}_x)^2 \geqslant 0,$$

а также слабую полунепрерывность снизу, получим

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \left\{ \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda) + \int\limits_{\gamma_1} (v^{1\lambda}_{xx})^2 + \int\limits_{\gamma_1} (w^{1\lambda}_x)^2 - \lambda \int\limits_{\gamma_2} v^{2\lambda}_{xx}(\bar{v}^2_{xx} - v^{2\lambda}_{xx}) - \lambda \int\limits_{\gamma_2} w^{2\lambda}_x(\bar{w}^2_x - w^{2\lambda}_x) \right\} \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u) + \int\limits_{\gamma_1} (v^1_{xx})^2 + \int\limits_{\gamma_1} (w^1_x)^2.$$

Таким образом, получим

$$(u, v^1, w^1) \in K_4,$$
$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) + \int\limits_{\gamma_1} v^1_{xx}(\bar{v}_{xx} - v^1_{xx}) + \int\limits_{\gamma_1} w^1_x(\bar{w}_x - w^1_x) \geqslant \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u) \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_4. \tag{71}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Решение задачи* (64) *сходится при* $\lambda \to \infty$ *в смысле* (66)–(68) *к решению задачи* (71).

Задача (71), которая соответствует предельному случаю, описывает равновесие упругого тела с трещиной, перпендикулярно пересекающей и разбивающей тонкое включение на две части. При этом одна часть будет соответствовать тонкому упругому включению, а вторая — тонкому жесткому с отслоением (см. рис. 4).

Заключение

В настоящей работе рассмотрена задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной и тонкими включениями, которые контактируют в одной точке. Рассмотрены разные случаи отслоения тонких включений. Найдены условия сопряжения в точке контакта. Исследованы три случая сопряжения тонких включений: жестких, упругих, жесткого и упругого.

1. Для случая сопряжения тонких жестких включений, где предполагается отслоение на положительном берегу γ_2^+,

- доказаны существование и единственность решения,
- получены две эквивалентные дифференциальные формулировки.

2. Для случая, где трещина прямолинейно пересекает упругое включение

- доказаны существование и единственность решения,
- получена эквивалентная дифференциальная формулировка,
- исследован предельный переход при стремлении параметра жесткости к бесконечности.

3. Для случая сопряжения тонкого жесткого и упругого включений, где имеется отслоение как жесткого включения на γ_2^+, так и упругого включения на γ_1^+,

- доказаны существование и единственность решения,
- получена эквивалентная дифференциальная формулировка.

Список литературы

[1] Мэттьюз Ф., Ролингс Р., *Композитные материалы. Механика и технология*, Техносфера, М., 2004.

[2] Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрюшин В. А., *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*, Физматлит, М., 2014.

[3] Khludnev A. M., Kovtunenko V. A., *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton-Boston, 2000.

[4] Хлуднев А. М., *Задачи теории упругости в негладких областях.*, Физматлит, М., 2010.

[5] Khludnev A. M., Leugering G., "On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks", *Math. Meth. Appl. Sci.*, **33**:16, (2010), 1955–1967.

[6] Лазарев Н. П., "Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.*, **1**, (2014), 32–45.

[7] Фанкина И. В., "Контактная задача для упругой пластины с тонким жестким включением", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **19**:3, (2016), 90–98.

[8] Щербаков В. В., "Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **16**:1, (2013), 138–147.

[9] Фурцев А. И., "О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение", *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, **17**:4, (2017), 94–111.

[10] Namm R. V., Tsoy G. I., "Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:4, (2019), 659-666.

[11] Попова Т. С., "Задачи о тонких включениях в двумерном вязкоупругом теле", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **21**:2, (2018), 66–78.

[12] Николаева Н. А., "О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **22**:4, (2019), 68–80.

[13] Nikolaeva N., "The conjugation thin inclusions problem in elastic bodies with crack", *Journal of Physics: Conference Series*, **1666**:1, (2020), 012038.

[14] Khludnev A. M., "Equilibrium of an elastic body with closely spaced thin inclusions", *Comp. Math. Math. Phys.*, **58**, (2018), 1660–1672.

[15] Faella L., Khludnev A. M., "Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies", *Mathematical Methods in the Applied Sciences.*, **39**:12, (2016).

[16] Николаева Н. А., "Пластина Кирхгофа — Лява с плоским жёстким включением", *Челяб. физ.-матем. журн.*, **8**:1, (2023), 29–46.

[17] Khludnev A. M., Leugering G., "Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies", *Math. Mech. Complex Systems.*, **2**:1, (2014), 1–21.

[18] Khludnev A. M., "On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter", *Math. Mech. Solids.*, 3381–3390.

[19] Хлуднев А. М., Попова Т. С., "Об иерархии тонких включений в упругих телах", *Математические заметки СВФУ*, **23**:1, (2016), 87–107.

[20] Khludnev A. M., Popova T. S., "Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies", *Quart. Appl. Math.*, **74**, (2016), 705–718.

[21] Хлуднев А. М., Попова Т. С., "Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения", *Математические заметки СВФУ*, **25**:1, (2018), 73–89.

[22] Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S., "Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies", *Mathematics and Mechanics of Solids*, **22**:4, (2017), 1–14.

[23] Rudoy E. M., Lazarev N. P., "Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **334**, (2018), 18–26.

[24] Морозов Н. Ф., *Математические вопросы теории трещин*, Наука, М., 1984.

[25] Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.

[26] Boerquin F., Ciarlet P. G., "Modeling and justification of eigenvalue problems for junctions between elastic structures", *J. Functional Analysis*, **87**, (1989), 392–427.

[27] Gaudiello A., Monneau R., Mossino J., al. et., "Junctions of elastic plates and beams", *J. Control Optimisation and Calculus of Variations*, **13**:3, (2007), 419–457.

[28] Dret H. Le, "Modeling of the junction between two rods", *J. Math. Pures Appl.*, **68**:3, (1989), 365–397.

[29] Боган Ю. А., "Об условиях сопряжения А. А. Самарского и В. Б. Андреева в теории упругих балок", *Матем. заметки.*, **92**:5, (2012), 662–669.

[30] Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г., "Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле", *Разностные методы для эллиптических*

уравнений, Наук. думка, Киев, 1983.

[31] Мочалов Е. В., Сильвестров В. В., “Задача взаимодействия тонких жестких остроконечных включений, расположенных между разными упругими материалами”, *Изв. РАН. МТТ.*, **5**, (2011), 99–117.

[32] Мхитарян С. М., “О напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно жестким тонким включением”, *Доклады НАН РА*, **118**:1, (2018), 39–48.

[33] Боган Ю. А., “Осреднение неоднородной упругой балки при сопряжении элементов шарниром конечной жесткости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **1**:2, (1998), 67–72.

[34] Дуранте Т., Назаров С. А., Кардоне Дж., “Моделирование сочленений пластин и стержней посредством самосопряженных расширений”, *Вестник СПбГУ*, **1**:2, (2009), 3–14.

[35] Жильцов А. В., Намм Р. В., “Устойчивый алгоритм решения полукоэрцитивной задачи контакта двух тел с трением на границе”, *Дальневост. матем. журн.*, **19**:2, (2019), 173—184.

[36] Khludnev A. M., Popova T. S., “Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control”, *Comp. Math. Appl.*, **77**, (2019), 253–262.

Поступила в редакцию
22 марта 2022 г.

Результаты разделов 1 и 3 данной работы получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Республики Саха (Якутия) (проект 18-41-140003), результаты 2 и 4 разделов получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки РФ (НИР № FSRG-2023-0025).

Nikolaeva N. A.[1] Equilibrium problems for elastic body with a crack and thin conjugated inclusions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 1. P. 73–95.

[1] North-Eastern Federal University named after M. K. Ammosov, Yakutsk, Russia

ABSTRACT

An equilibrium problem for an elastic body is considered. It is assumed that the body has crack which junction the thin inclusion at a given point. We analyze a conjugate conditions parts of thin inclusion. Inequality type boundary conditions are considered at the crack faces to prevent a mutual penetration between the faces. Existence of solutions is proved. Equivalent problem formulations are discussed. The passage to the limit under stiffness parameter of thin inclusions to infinity.

Key words: *crack, thin hard inclusion, fine elastic inclusion, variational problem, non-penetration condition.*