Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 1. С. 55–66

УДК 517.5
MSC2020 42A10, 41A17, 41A44

© М. Р. Лангаршоев[1], А. Г. Айдармамадов[1,2]

Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана

В настоящей работе получены точные неравенства между наилучшими приближениями аналитических в единичном круге функций и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$. Вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана.

Ключевые слова: *обобщенный модуль непрерывности, наилучшее приближение, весовое пространство Бергмана, комплексный алгебраический полином, n-поперечники.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202406

Введение

В последние десятилетия в теории приближения интенсивно изучались экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций в комплексных банаховых пространствах.

Указанные экстремальные задачи в пространстве Харди H_p, $p \geqslant 1$ рассматривались в первую очередь например, в работах [1–6], и дальнейшие продвижения были получены в [7–13] (см. также список литературы в этих работах).

Систематическое изучение экстремальных задач теории полиномиального приближения в обычном пространстве Бергмана B_q, $q \geqslant 1$ было начато в работе [14]. Указанная тематика в дальнейшем нашла свое развитие в работах [15–19].

В настоящей работе мы решаем экстремальную задачу в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ с указанным интегрируемым по площади единичного круга весом $\gamma := \gamma(|z|) > 0$, введенным в работе [20]. Значимые результаты по решению экстремальных

[1] Академия гражданской защиты МЧС России, 141435, Московская область, г. Химки, мкр. Новогорск, ул. Соколовская, стр., 1А.
[2] Таджикский технологический университет, 734061, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н. Карабаева 63/3.
Электронная почта: `mukhtor77@mail.ru` (М. Р. Лангаршоев), `alisher1805@mail.ru` (А. Г. Айдармамадов).

задач наилучшего полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $q \geqslant 1$, были получены например, в работах [21–28].

Приведем основные понятия и определения.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup 0$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость и $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в этой плоскости.

Аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{2,\gamma}$, если

$$\|f\|_{2,\gamma} \overset{def}{=} \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D \gamma(|z|) |f(z)|^2 dx dy \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $\gamma := \gamma(|z|)$ — неотрицательная суммируемая неэквивалентная нулю на [0,1] функция, и интеграл в (1) понимается в смысле Лебега. В частности, при $\gamma(|z|) \equiv 1$ пространство $B_{2,\gamma}$ является известным пространством Бергмана B_2. Специальный выбор весовой функции γ позволяет получать пространства $B_{2,\gamma}$ аналитических в круге D функций с менее жесткими ограничениями на поведение этих функций вблизи границы $|z| = 1$ круга D по сравнению с функциями, принадлежащими пространству B_2 (см. пример приведенный в [21]). Отметим, что $B_{2,\gamma}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определенным формулой

$$(f, \mathrm{g}) = \iint\limits_D \gamma\big(|z|\big) f(z) \overline{\mathrm{g}(z)} dx dy,$$

где $f, \mathrm{g} \in B_{2,\gamma}$.

Переходя к полярным координатам

$$z = \rho e^{it},\ 0 \leqslant \rho < 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

норму (1) запишем в виде

$$\|f\|_{2,\gamma} \overset{def}{=} \|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) \left| f(\rho e^{it}) \right|^2 d\rho dt \right\}^{1/2}.$$

Всюду далее совокупность алгебраических комплексных полиномов степени $\leqslant n$ обозначим

$$\mathscr{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) z^k,\ a_k(f) \in \mathbb{C} \right\},$$

а символом

$$E_n(f)_{2,\gamma} = \inf \left\{ \|f - p_n\|_{2,\gamma} : p_n \in \mathscr{P}_n \right\} \tag{2}$$

— величину наилучшего приближения функции f принадлежащие весовому пространству $B_{2,\gamma}$ множествам $\mathscr{P}_n$.

Среди произвольных полиномов $p_{n-1}\in\mathscr{P}_{n-1}$ наименьшее значение величины (2) в пространстве $B_{2,\gamma}$ доставляет частная сумма Тейлора $T_n(f;z)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_k(f)z^k$ — разложение $f(z)$ в круге $|z|<1$. При этом

$$E_n(f)_{2,\gamma}=\|f-T_{n-1}(f)\|_{2,\gamma}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Равенством

$$\omega_m(f,t)_{2,\gamma}:=\sup\{\|\Delta_h^m(f,\cdot,\cdot)\|_{2,\gamma}:|h|\leqslant t\}=$$
$$=\sup\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_h^m(f;\rho,u)|^2d\rho du\right)^{1/2}:\ |h|\leqslant t\right\}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_h^m(f;\rho,u)=\sum_0^m(-1)^kC_m^kf(\rho e^{i(u+kh)})$$

— разность m-го порядка функции $f(\rho e^{it})$ по аргументу t с шагом h, определим модуль непрерывности m-го порядка в пространстве $B_{2,\gamma}$.

При решении ряда задач полиномиальной аппроксимации функций в действительной области часто используют различные модификации модулей непрерывности (4) порядка m, $m\in\mathbb{N}$. Так, например, иногда удобнее использовать усредненную характеристику гладкости

$$\Omega_m(f,t)_{2,\gamma}=\left\{\frac{1}{\tau^m}\int\limits_0^\tau\cdots\int\limits_0^\tau\|\Delta_{\bar h}^mf(\rho e^{it})\|^2dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2},\quad \tau>0, \tag{5}$$

где

$$\bar h=(h_1,h_2,\cdots h_m),\quad \Delta_{\bar h}^m:=\Delta_{h_1}^1\circ\cdots\circ\Delta_{h_m}^1,$$
$$\Delta_{\bar h_j}^1f(\rho e^{it})=f(\rho e^{i(t+h_j)})-f(\rho e^{it}),\quad j=\overline{1,m}.$$

В работе [29] доказано, что при всех $0<q<1$ выполняется отношение слабой эквивалентности

$$\Omega_m(f,t)_q\asymp\omega_m(f,t)_q. \tag{6}$$

Для $1\leqslant q<\infty$ соотношение (6) доказано в работе [30].

Используя равенства (5), согласно определению (4) полагаем

$$\Omega_m(f,t)_{2,\gamma}=\sup\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_m(f;\rho,\tau,u)|^2d\rho d\tau\right)^{1/2}:|u|\leqslant t\right\}.$$

Для целых неотрицательных r производную r-го порядка функции $f(z)$ определим равенством

$$f^{(r)}(z)=\frac{d^r f}{dz^r}=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r},\quad \alpha_{k,r}=k!\,[(k-r)!]^{-1},\quad k\geqslant r.$$

Через $\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ обозначим множество функций $f(z)\in B_{2,\gamma}$, у которых $\|z^r f^{(r)}\|_{2,\gamma}<\infty$. Введем в рассмотрение экстремальную аппроксимационную характеристику вида

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h):=\sup_{\substack{f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}\\ z^r f^{(r)}\neq\mathrm{const}}}\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(z^r f^{(r)};t\right)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},\tag{7}$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p,h\in\mathbb{R}_+$, φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция.

Пусть S — единичный шар в $B_{2,\gamma}$, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из $B_{2,\gamma}$; $\Lambda_n\subset B_{2,\gamma}$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n\subset B_{2,\gamma}$ — подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}\colon B_{2,\gamma}\to\Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^{\perp}\colon B_{2,\gamma}\to\Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset B_{2,\gamma}\right\},$$
$$d_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\mathrm{g}\|:\mathrm{g}\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_n\subset B_{2,\gamma}\right\},$$
$$\delta_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|:f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathcal{L}B_{2,\gamma}\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset B_{2,\gamma}\right\},$$
$$d^n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|:f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset B_{2,\gamma}\right\},$$
$$\Pi_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|:f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathcal{L}^{\perp}B_{2,\gamma}\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset B_{2,\gamma}\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n-поперечниками.

Поскольку $B_{2,\gamma}$ со введенным в нем выше скалярным произведением является гильбертовым пространством, то между перечисленными n-поперечниками выполняются соотношения [31]:

$$b_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})\leqslant d^n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})\leqslant d_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})=\delta_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma})=\Pi_n(\mathfrak{M};B_{2,\gamma}).\tag{8}$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, то наилучшее приближение этого класса в пространстве $B_{2,\gamma}$ обозначим

$$\mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M}):=\sup\{E_{n-1}(f):\ f\in\mathfrak{M}\}.$$

Пусть $\Phi(t)$ $(t\geqslant 0)$ — произвольная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Будем называть ее мажорантой. Через $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leqslant 2$, обозначим класс функций $f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, для которых при любых $h>0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^p\left(z^r f^{(r)},t\right)_{2,\gamma}dt\leqslant\Phi^p(h).$$

Следуя работе [32], обозначим через t_* величину аргумента, при котором функция $\dfrac{\sin t}{t}$ на $\mathbb{R}_+$ принимает свое наименьшее значение. При этом t_* — минимальный положительный корень уравнения $t=\operatorname{tg} t$ $(4{,}49<t_*<4{,}51)$. Полагаем

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* := \left\{1-\frac{\sin t}{t},\ \text{если } 0<t\leqslant t_*;\ 1-\frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если } t_*\leqslant t<\infty\right\}.$$

1. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\leqslant p\leqslant 2$, $0<h\leqslant \pi/n$, φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ неэквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h)=\{b_{n,m,r,p}(\varphi;h)\}^{-1}, \tag{9}$$

где

$$b_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\alpha_{n,r}\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко показать, что для произвольной аналитической функции $f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ с использованием равенства Парсеваля имеет место соотношение

$$\Omega_m^2\Big(z^r f^{(r)},t\Big)_{2,\gamma}=\sup_{|u|\leqslant t}\left\{2^m\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k(f)|^2\left(1-\frac{\sin ku}{ku}\right)^m\cdot\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}. \tag{10}$$

Далее, применяем упрощенный вариант неравенства Минковского [33]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right)^{1/2},\quad h\in\mathbb{R}_+,\quad 0<p\leqslant 2$$

и равенства (3), из соотношения (10) получаем

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(z^r f^{(r)},t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant 2^{m/2}\left(\int\limits_0^h\left[\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{kr}^2|c_k(f)|^2\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^m\cdot\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right]^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}=$$

$$=2^{m/2}\cdot\left(\int\limits_0^h\left[\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k(f)|^2\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^m\cdot[\varphi(t)]^{2/p}\cdot\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right]^{p/2}dt\right)^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant 2^{m/2}\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left[\alpha_{k,r}^{p}|c_k(f)|^p\left(\int_0^h(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)\left(\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}dt\right]^{2/p}\right)^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\left[\alpha_{k,r}^{p}\cdot\int_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\cdot\left(\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}\right]^{2/p}\right)^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\left[\left(b_{k,m,r,p}(\varphi,h)\right)^p\cdot\left(\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}\right]^{2/p}\right)^{1/2}\geqslant$$

$$\geqslant 2^{m/2}\left(\inf_{n\leqslant k<\infty}b_{k,m,r,p}(\varphi,h)\right)\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\inf_{n\leqslant k<\infty}b_{k,m,r,p}(\varphi,h). \tag{11}$$

Докажем, что если при любых $k,m,n\in\mathbb{N}$, $k\geqslant n$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0\leqslant t\leqslant h$, $1\leqslant p\leqslant 2$ и $\varphi(t)\geqslant 0$ – суммируемая на [0,h] неэквивалентная нулю функция, выполняется неравенство

$$\left(\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}-\frac{1}{k}\right)\varphi(t)-\frac{1}{k}t\varphi'(t)\geqslant 0, \tag{12}$$

то

$$\inf_{n\leqslant k<\infty}b_{k,m,r,p}(\varphi;h)=b_{n,m,r,p}(\varphi;h). \tag{13}$$

Для этого покажем, что при выполнении неравенства (12) функция натурального аргумента

$$y(k)=\alpha_{k,r}^{p}\int_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)\,dt \tag{14}$$

при $k\geqslant n$ является возрастающей. Дифференцируем обе части равенства (14):

$$y'(k)=\alpha_{k,r}^{p}\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}\int_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)\,dt+\alpha_{k,r}^{p}\int_0^h\frac{d}{dk}\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)\,dt. \tag{15}$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\frac{d}{dk}\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}=\frac{t}{k}\cdot\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2},$$

методом интегрирования по частям, а также неравенством (12), из равенства (15) получаем

$$y'(k)=\alpha_{k,r}^{p}\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}\int_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)\,dt+$$

$$+\alpha_{k,r}^{p}\frac{1}{k}\int\limits_{0}^{h}[t\varphi(t)]d\left[\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\right]=\alpha_{k,r}^{p}\left\{\frac{1}{k}h\varphi(h)\left(1-\frac{\sin kh}{kh}\right)^{mp/2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{h}\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\left[\left(\sum_{s=0}^{r-1}\frac{p}{k-s}-\frac{1}{k}\right)\varphi(t)-\frac{1}{k}t\varphi'(t)\right]dt\right\}\geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что $\inf\{y(k): k\geqslant n\}=y(n)$. Равенство (13) доказано.

Таким образом, с учетом равенства (13) неравенство (11) принимает вид

$$\left(\int\limits_{0}^{h}\Omega_{m}^{p}\left(z^{r}f^{(r)};t\right)_{2,\gamma}\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}\geqslant 2^{m/2}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\cdot b_{n,m,r,p}(\varphi,h).$$

Из последнего соотношения получаем

$$\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_{0}^{h}\Omega_{m}^{p}\left(z^{r}f^{(r)};t\right)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\leqslant\frac{1}{b_{n,m,r,p}(\varphi,h)}. \tag{16}$$

Неравенство (16) для произвольной функции $f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ справедливо, поэтому для величины (7) получаем оценку сверху

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;h)\leqslant\{b_{n,m,r,p}(\varphi,h)\}^{-1}. \tag{17}$$

С целью получения для величины (7) оценки снизу введем в рассмотрение функцию $f_0(z)=z^n\in B_{2,\gamma}$, для которой непосредственными вычислениями получаем

$$E_{n-1}^{2}(f_0)_{2,\gamma}=\int\limits_{0}^{1}\rho^{2n+1}\gamma(\rho)\,d\rho, \tag{18}$$

$$\Omega_{m}\left(z^{r}f_{0}^{(r)};t\right)_{2,\gamma}=2^{m/2}\alpha_{n,r}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{m/2}E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}. \tag{19}$$

Учитывая определение величины (7), а также равенства (18) и (19), определяем соотношение

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;h)\geqslant\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_{0}^{h}\Omega_{m}^{p}\left(z^{r}f_{0}^{(r)};t\right)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha_{n,r}\left(\int\limits_{0}^{h}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{b_{n,m,r,p}(\varphi,h)}. \tag{20}$$

Сопоставляя оценку сверху (17) и оценку снизу (20), получаем требуемое равенство (9), чем и завершаем доказательство теоремы 1. □

Из доказанной теоремы 1 вытекают следствия.

Следствие 1. *Пусть* $\varphi(t)\equiv 1$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\frac{1}{k}\left(\sum\limits_{s=0}^{r-1}\frac{1}{k-s}\right)^{-1}\leqslant p\leqslant 2$ *и* $0<h\leqslant\pi/n$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}\\ z^rf^{(r)}\neq\mathrm{const}}}\frac{2^{m/2}\alpha_{n,r}n^{-1/p}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}. \qquad (21)$$

В частности, при $p=2/m$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *из* (21) *следует, что*

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}\\ z^rf^{(r)}\neq\mathrm{const}}}\frac{2^{m/2}\cdot\alpha_{n,r}n^{-m/2}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=\frac{1}{\{nh-\mathrm{Si}(nh)\}^{m/2}},$$

где $\mathrm{Si}(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ — *интегральный синус.*

Следствие 2. *Пусть* $\varphi(t)\equiv t$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p=2/m$, $0<h\leqslant\pi/n$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}\\ z^rf^{(r)}\neq\mathrm{const}}}\frac{\alpha_{n,r}n^{-m}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=\left\{(nh)^2-2(1-\cos nh)\right\}^{-m/2}, \qquad (22)$$

и в частном случае при $h=\pi/n$ *из* (22) *получаем*

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}\\ z^rf^{(r)}\neq\mathrm{const}}}\frac{\alpha_{n,r}n^{-m}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} t\Omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=\frac{1}{(\pi^2-4)^{m/2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\leqslant p\leqslant 2$ *и функция* Φ *при любых значениях* $h\in\mathbb{R}_+$, *удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p\geqslant\frac{\pi}{nh}\cdot\left\{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2}dt\right\}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1}. \qquad (23)$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi),B_{2,\gamma}\right)=\mathscr{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)\right)_{B_{2,\gamma}}=$$
$$=2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{24}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$. *При этом множество мажорант* $\{\Phi\}$, *удовлетворяющих ограничению* (23), *непусто.*

Доказательство. Для произвольной функции $f\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ неравенство (21) перепишем в удобном для нас виде

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\leqslant 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\cdot\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}\Omega_m^p(z^rf^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{1/p}.$$

Полагая в этом неравенстве $h=\pi/n$, с учетом определения класса $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$ и соотношения (8) запишем оценку сверху для проекционного n-поперечника

$$\Pi_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi),B_{2,\gamma}\right)\leqslant\mathscr{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)\right)_{B_{2,\gamma}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{25}$$

Далее, введем в рассмотрение шар

$$\sigma_{n+1}=\left\{p_n\in\mathscr{P}_n:\|p_n\|_{2,\gamma}\leqslant 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и покажем, что $\sigma_{n+1}\in W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$. С этой целью используя соотношения (10), для произвольного $p_n(z)\in\mathscr{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ получаем неравенства

$$\Omega_m(z^rp_n^{(r)},t)_{2,\gamma}\leqslant 2^{m/2}\alpha_{n,r}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*\|p_n\|_{2,\gamma}. \tag{26}$$

Используя неравенство (26) и ограничение (23), приходим к неравенству

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}\Omega_m^p(z^rf^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\leqslant 2^{mp/2}\alpha_{n,r}^p\cdot\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2}dt\cdot\|p_n\|_{2,\gamma}^p\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{nh}\cdot\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\leqslant\Phi(h),$$

а это значит, что $\sigma_{n+1}\subset W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$. Таким образом, для бернштейновского n-поперечника получаем

$$b_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi),B_{2,\gamma}\right)\geqslant b_n\left(\sigma_{n+1},B_{2,\gamma}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2^{-m/2}\alpha_{n,r}^{-1}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{27}$$

Сравнивая оценки сверху (25) и оценки снизу (27) вышеперечисленных n-поперечников, получаем требуемые равенства (24), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Заметим, что условию (23) удовлетворяет, например, мажорант (см. [34]) $\Phi_*(t)=t^{\mu/p}$, где

$$\mu:=\frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt}-1.$$

□

Следствие 3. *В условиях теоремы 2 выполняются равенства*

$$\lambda_n\left(W_{m,2/m}^{(r)}(h,\Phi),B_{2,\gamma}\right)=\mathscr{E}_{n-1}\left(W_{m,2/m}^{(r)}(h,\Phi)\right)_{B_{2,\gamma}}=\alpha_{n,r}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2(\pi-\mathrm{Si}(\pi))}\right\}^{m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания при подготовке статьи к печати.

Список литературы

[1] Бабенко К. И., “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5, (1958), 631–640.

[2] Тихомиров В. М., “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3, (1960), 81–120.

[3] Тайков Л. В., “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2, (1967), 155–162.

[4] Двейрин М. З., “Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге”, *Теория функций, функциональный анализ и прил*, **23**, (1975), 32–46.

[5] Фарков Ю. А., “О поперечниках некоторых классов аналитических функций”, *УМН*, **39**:1, (1984), 161–162.

[6] Pinkus A., *n-Widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, Berlin, 1985.

[7] Вакарчук С. Б., “О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости”, *Укр. матем. журн.*, **41**:26, (1989), 799–802.

[8] Вакарчук С. Б., “О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **65**:2, (1999), 186–193.

[9] Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш., “Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2”, *Матем. заметки*, **68**:5, (2000), 796–800.

[10] Вакарчук С. Б., “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5, (2002), 665–669.

[11] Шабозов М. Ш., Пиров Х. Х., “Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из H_r^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$”, *Докл. РАН*, **394**:4, (2004), 19–24.

[12] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., “Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \rho \leqslant 1$”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:2, (2016), 469–478.

[13] Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров Дж. Дж., “О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **27**:4, (2021), 239–254.

[14] Вакарчук С. Б., “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций”, *Укр. матем. журн.*, **42**:7, (1990), 873–881.

[15] Вакарчук С. Б., “Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций”, *Матем. заметки*, **57**:1, (1995), 30–39.

[16] Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р., “Приближение некоторых классов аналитических функций в пространстве B_p”, *Вестник ХоГУ*, **1**:1, (1999), 45–50.

[17] Шабозов М. Ш., “Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана”, *Докл. РАН*, **383**:2, (2002), 171–174.

[18] Пиров Х. Х., Лангаршоев М. Р., “Значение поперечников некоторых классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков, в пространстве Бергмана”, *Докл. АН. Респ. Тадж.*, **54**:7, (2011), 519–525.

[19] Шабозов М. Ш., Кадамшоев Н. У., “Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана”, *Матем. заметки*, **10**:2, (2021), 266–281.

[20] Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш., “О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$”, *Докл. РАН*, **412**:4, (2007), 466–469.

[21] Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш., “О поперечниках классов функций, аналитических в круге”, *Матем. сб.*, **201**:8, (2010), 3–21.

[22] Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К., “Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:6, (2010), 999–1004.

[23] Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р., “О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана”, *Докл. РАН*, **450**:5, (2013), 518–521.

[24] Акопян Р. Р., Саидусайнов М. С., “Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **23**:3, (2017), 22–32.

[25] Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С., “Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана”, *Владикавк. мат. журн.*, **20**:1, (2018), 86–97.

[26] Лангаршоев М. Р., “О наилучшем полиномиальном приближении функций в весовом пространстве Бергмана”, *Владикавк. матем. журн.*, **21**:1, (2019), 27–36.

[27] Вакарчук С. Б., “Оценки значений n-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$”, *Матем. заметки*, **108**:6, (2020), 803–822.

[28] Лангаршоев М. Р., “Неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана”, *Чебышевский сб.*, **22**:2, (2021), 135–144.

[29] Руновский К. В., “О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$”, *Матем. сборник*, **185**:8, (1994), 81–102.

[30] Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш., Забутная В. И., “Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов”, *Укр. матем. вісник*, **11**:3, (2014), 417–441.

[31] Тихомиров В. М., *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.

[32] Вакарчук С. Б., Забутная В. И., “Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3, (2009), 328–336.

[33] Hardy G. G., Littlewood J. E., Polya G., *Inequality*, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[34] Вакарчук С. Б., Забутная В. И., “Неравенства Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2”, *Матем. заметки*, **92**:4, (2012), 497–514.

Поступила в редакцию
7 октября 2022 г.

Langarshoev M. R.[1], *Aydarmamadov A. G.*[1,2] The best approximation of functions analytic in the unit circle in weighted Bergman space. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 1. P. 55–66.

[1] The Civil Defence Academy of the Ministry of the Russian Federation for Civil Defence, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Russia
[2] Technological University of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan

ABSTRACT

In this paper, we obtained the exact inequalities between the best approximations of analytical in the unit circle functions and generalized modulus of continuity of the m-th order in the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$. The exact values of n-widths of some classes of functions in a weighted Bergman space are calculated.

Key words: *generalized modulus of continuity, best approximation, weighted Bergman space, complex algebraic polynomial, n-widths.*