

УДК 517.958
MSC2020 35Q20 + 35Q60

© М. А. Донская¹, И. П. Яровенко^{1,2}

О выборе метода розыгрыша свободного пробега при решении нестационарного уравнения переноса излучения с использованием графических ускорителей

В работе рассматриваются вопросы математического моделирования процесса нестационарного переноса рентгеновского излучения. Данный процесс формализован в виде начально-краевой задачи для уравнения переноса излучения, которая решается весовым методом Монте-Карло. Обсуждаются вопросы реализации предложенного метода при помощи поточно-параллельных вычислений на графическом процессоре (GPU).

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, метод Монте-Карло, параллельные вычисления.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202404>

Введение

Моделирование процессов переноса и взаимодействия излучения с веществом играет важную роль во многих областях, таких как астрофизика, оптика, томография и т.д. [1–3]. Основной математической моделью, описывающей распространение излучения в неоднородных средах является интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения, которое с достаточной степенью точности моделирует процесс рассеяния и поглощения излучения в веществе [4, 5]. Однако в общем случае это уравнение не имеет аналитического решения. Существует ряд эмпирических и полуаналитических подходов для приближенного решения уравнения переноса, но все они имеют сильные ограничения на структуру среды или поведение коэффициентов уравнения [6–9].

¹ Дальневосточный федеральный университет, 680922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

² Институт прикладной математики ДВО РАН, 680041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

Электронная почта: aaa@mail.ru (М. А. Донская), yarovenko@iam.dvo.ru (И. П. Яровенко).

Практически единственным универсальным численным методом, позволяющим моделировать перенос излучения в сложных средах в общем случае, является метод Монте-Карло [10–12]. Суть этого метода заключается в статистическом моделировании процесса движения отдельных фотонов через среду с учетом возможных актов взаимодействия — поглощения, рассеяния и т.д. Накопленная в результате такого моделирования статистика позволяет построить оценки для решения исходной задачи. Однако этот метод обладает крайне низкой скоростью сходимости, обратно пропорциональной \sqrt{N} , где N — число моделируемых траекторий. В результате для получения приемлемой точности требуется моделирование огромного числа траекторий частиц, что приводит к чрезвычайно большим временным затратам на решение задач даже на современных компьютерах.

Альтернативой является использование графических процессоров (GPU) и технологии параллельных вычислений CUDA [13], так как современные видеокарты содержат сотни и тысячи вычислительных ядер и обеспечивают очень высокую вычислительную мощность. Более того, архитектура GPU с массовым параллелизмом по данным, с высокой пропускной способностью памяти и с пространственной локальностью данных особенно эффективна для статистического моделирования методом Монте-Карло. В настоящее время существует ряд работ и фреймворков, посвященных реализациям метода Монте-Карло на GPU преимущественно для случая стационарного уравнения переноса излучения [14–20].

В последние годы актуальным становится решение нестационарных задач переноса излучения, обусловленных появлением новых экспериментальных методик, которые используют ультракороткие рентгеновские импульсы длительностью до нескольких фемтосекунд [21]. Эти методики открывают новые перспективы в области неразрушающего контроля и исследования быстропротекающих процессов в различных средах [22–24]. Однако для их применения и тестирования требуется точное моделирование нестационарного переноса излучения с учетом отклика среды на ультракороткие импульсы. Чтобы добиться приемлемой точности при моделировании таких источников, требуется розыгрыш огромного количества траекторий (порядка 10^{12}).

Целью данной работы является разработка GPU реализации метода Монте-Карло применительно к задаче моделирования нестационарного процесса переноса излучения в рассеивающих средах. Несмотря на то, что схемы построения методов Монте-Карло в теории переноса излучения достаточно однотипны, реализация вычислительных методов на GPU имеет ряд особенностей, не характерных для однопроцессорных устройств.

В рамках данного исследования особое внимание уделяется оптимизации наиболее ресурсоемкого этапа алгоритма — моделированию длины свободного пробега фотонов в среде. Исследуется возможность применения метода максимального сечения [25–28] для снижения вычислительных затрат и уменьшения явления дивергенции потоков, заключающегося в расхождении нитей исполнения на ветвлениях алгоритма, что приводит к последовательному выполнению команд и резкому снижению быстродействия программы. Метод максимального сечения, впервые предложенный в работе [25], заключается в использовании постоянной мажоранты для коэффи-

циента ослабления при моделировании траекторий частиц. Этот подход позволяет не только существенно ускорить вычисления за счет аналитического нахождения длины свободного пробега, но и унифицировать алгоритм моделирования для сред со сложным пространственным распределением коэффициента ослабления. Однако применение завышенной мажоранты приводит к большому количеству фиктивных событий рассеяния там, где реальное значение коэффициента ослабления значительно ниже максимального. Это снижает эффективность метода, особенно для сильно неоднородных сред.

В рамках данной работы проводится сравнение метода максимального сечения с подходом, использующим непосредственный розыгрыш длины пробега для среды с кусочно-постоянным распределением коэффициента ослабления, что соответствует современной тенденции представления неоднородных сред в виде пространственных воксельных моделей [17, 18]. На ряде численных примеров демонстрируется влияние выбора процедуры розыгрыша свободного пробега на производительность параллельных вычислений. Приводятся рекомендации по выбору метода розыгрыша свободного пробега частиц в зависимости от параметров моделируемой среды.

Следует сказать несколько слов о выборе рассматриваемой в статье математической модели. Мы ограничились рассмотрением моноэнергетического уравнения переноса излучения. Такое допущение ограничивает применимость модели достаточно узким диапазоном энергии, где доминирует упругое (без изменения энергии фотонов) рассеяние. В то же время при моделировании переноса рентгеновского излучения зачастую используются диапазоны энергии, где преобладает комптоновское рассеяние, приводящее к изменению энергии частиц. Тем не менее основные моменты, касающиеся оптимизации метода Монте-Карло за счет выбора процедуры розыгрыша свободного пробега, обсуждаемые в данной статье, сохраняют свою актуальность и в случае учета комптоновского рассеяния.

1. Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения

Нашей задачей будет решение интегро-дифференциального уравнения переноса излучения, которое имеет вид [23]

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \mu(r) \right) I(r, \omega, t) = \sigma(r) \int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') I(r, \omega', t) d\omega'. \quad (1)$$

Функция $I(r, \omega, t)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени $t \in [0, T]$ в точке $r \in \mathbb{R}^3$, движущихся со скоростью c в направлении единичного вектора $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$. Функции μ и σ имеют смысл коэффициентов ослабления и рассеяния, а через p обозначена индикатриса рассеяния.

Обозначим через Π_{ω} плоскость, касательную к границе области G и перпендикулярную направлению ω , и введем ряд обозначений $X = G \times \Omega \times [0, T]$, $X_0 = G \times \Omega \times \{t=0\}$, $\Omega_{-\omega^*} = \{\omega \in \Omega : -\omega^* \cdot \omega > 0\}$, $Y^- = \Pi_{-\omega^*} \times \Omega_{-\omega^*} \times [0, T]$, $X^- = Y^- \cup X_0$.

Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I|_{X_0} = h_0(r, \omega), \quad I|_{Y^-} = h_{ext}(z, \omega, t), \quad (2)$$

где h_0 характеризует состояние процесса в начальный момент времени, а функция h_{ext} описывает плотность потока излучения, падающего на объект. На множестве $X_0 \times Y^-$ построим функцию

$$h(z, \omega, t) = \begin{cases} h_0(z, \omega), & \text{если } (z, \omega, t) \in X_0, \\ h_{ext}(z, \omega, t), & \text{если } (z, \omega, t) \in Y^-, \end{cases}$$

и объединим условия (2) в одно начально-краевое условие

$$I|_{X^-} = h(r, \omega, t). \quad (3)$$

Будем считать, что процесс переноса излучения происходит в некоторой многокомпонентной системе G , состоящей из объединения конечного числа ограниченных и попарно не пересекающихся подобластей G_1, G_2, \dots, G_m , причем замыкание \bar{G} является выпуклым множеством в \mathbb{R}^3 . Поверхность $\partial\bar{G}$ будем называть внешней границей множества G , а $\gamma = \partial G \setminus \partial\bar{G}$ — внутренней границей множества G .

Обозначим через $L_{r, \omega}$ луч, исходящий из точки $r \in \mathbb{R}^3$ в направлении ω , $L_{r, \omega} = \{r + \omega t : t > 0\}$, а через $d(r, \omega)$ — расстояние от точки $r \in \bar{G}$ до границы $\partial\bar{G}$ в направлении ω , т.е. $d(r, \omega) = \text{mes}_1(L_{r, \omega} \cap \bar{G})$, где символом $\text{mes}_1(X)$ обозначена мера Лебега множества X на прямой. Кроме того, введем в рассмотрение величину $d^-(r, \omega, t) = \min\{d(r, -\omega), ct\}$, которая представляет собой расстояние до множества, где задаются начально-краевые условия.

Относительно коэффициентов ослабления и рассеяния предполагается, что σ и μ — кусочно-постоянные функции в G : $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_i$, $\mu(\mathbf{r}) = \mu_i$, при $\mathbf{r} \in G_i$. Функция $p(r, \omega \cdot \omega') \in C_b(G \times [-1, 1])$ и для всех r удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1.$$

Кроме того, пусть $h \in C_b(X^-)$. Через C_b обозначено пространство функций, непрерывных и ограниченных на соответствующих множествах.

Приведенных выше ограничений достаточно для существования единственного решения краевой задачи (1), (3), которое может быть найдено в виде сходящегося ряда Неймана [23]

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{S})^n I_0,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}F &= \int_0^{d^-(r, \omega, t)} \exp\left(-\int_0^{\tau} \mu(r - \tau'\omega) d\tau'\right) F(r - \tau\omega, \omega, t - \tau/c) d\tau, \\ \mathcal{S}F &= \sigma(r) \int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') F(r, \omega', t) d\omega', \end{aligned}$$

При этом каждое слагаемое $I_n, n = 1, 2, \dots, \infty$, в ряде описывает вклад излучения, испытавшего ровно n актов взаимодействия со средой, а слагаемое I_0 , зачастую называемое баллистической компонентой решения, имеет вид

$$I_0(r, \omega, t) = h(r - d^-(r, \omega, t)\omega, \omega, t - d^-(r, \omega, t)/c) \exp \left(- \int_0^{d^-(r, \omega, t)} \mu(r - \tau\omega) d\tau \right)$$

и описывает вклад не рассеянного излучения.

Нашей дальнейшей целью будет построение численного метода решения начально-краевой задачи (1), (3), на которую также будем ссылаться как на прямую задачу для уравнения переноса излучения.

2. Метод Монте-Карло решения начально-краевой задачи

В данном разделе мы приведем описание метода решения прямой задачи (1), (3) и обсудим его параллельную реализацию. Для нахождения решения начально-краевой задачи (1), (3) мы будем использовать модификацию метода Монте-Карло, называемую методом «сопряженных блужданий». В теории переноса излучения принято различать два подхода к использованию метода Монте-Карло: первый из них — это метод формального математического решения уравнения переноса излучения, при котором решение представляется в виде ряда Неймана и далее этот ряд суммируется при помощи метода Монте-Карло; второй же подход заключается в моделировании физических процессов распространения излучения в среде и накоплении некоторой статистической информации об искомым величинах без привлечения математического аппарата теории переноса. Здесь мы будем придерживаться первого подхода. Для этого будем искать приближенное решение, суммируя усеченный ряд Неймана, где число слагаемых ограничено некоторым значением N . Заметим, что усеченный ряд Неймана представляет собой сумму многомерных интегралов, для вычисления которой, следуя стандартной схеме метода Монте-Карло, мы будем строить траектории частиц

$$(r_0, \omega_0, t_0), (r_1, \omega_1, t_1), \dots, (r_N, \omega_N, t_N),$$

где точки определяются по правилу

$$r_{i+1} = r_i - \tau_{i+1}\omega_i, \quad t_{i+1} = t_i - \tau_{i+1}/c, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad r_0 = r, \quad \omega_0 = \omega, \quad t_0 = t.$$

Случайная величина τ_{i+1} распределена на промежутке $[0, d^-(r_i, \omega_i, t_i)]$ с плотностью вероятности

$$\frac{\mu(r_i - \tau_{i+1}\omega_i) \exp \left(- \int_0^{\tau_{i+1}} \mu(r_i - \tau\omega_i) d\tau \right)}{1 - \exp \left(- \int_0^{d^-(r_i, \omega_i, t_i)} \mu(r_i - \tau\omega_i) d\tau \right)}, \quad (4)$$

где случайный вектор ω_{i+1} распределен на единичной сфере Ω с переходной плотностью вероятности $p(r_{i+1}, \omega_i \cdot \omega_{i+1})$.

Оценка значения функции I в точке (r, ω, t) имеет вид

$$I(r, \omega, t) \approx \bar{I}_N(r, \omega, t) = \sum_{n=0}^N I_n = \mathbb{E}[\Theta_N], \quad \Theta_N = \sum_{n=0}^N \theta_n,$$

где через $\mathbb{E}[\Theta]$ обозначено математическое ожидание случайной величины Θ , а $\theta_0 = I_0(r_0, \omega_0, t_0)$. При этом случайные величины θ_n при $n > 0$ определяются рекуррентным образом

$$\theta_{n+1} = \frac{\sigma(r_{n+1})}{\mu(r_{n+1})} \left(1 - \exp \left(- \int_0^{d^-(r_n, \omega_n, t_n)} \mu(r_n - \omega_n \tau) d\tau \right) \right) \theta_n, \quad (5)$$

$n = 1, 2, \dots, N - 1$.

Повторяя описанную процедуру M раз, получим выборку объемом M для случайной величины Θ_N . Среднее значение выборки дает оценку математического ожидания случайной величины Θ_N и, следовательно, приближенное значение I_N в точке (r, ω, t) . Такой подход учитывает поглощение и «вылет» частиц из области с помощью соответствующих весов [12].

При программной реализации представленного алгоритма наиболее трудоемкой процедурой является розыгрыш свободного пробега в соответствии с формулой (4). В рассматриваемом нами случае кусочно-постоянных коэффициентов интегралы в формуле (4) легко вычисляются аналитически и процедура розыгрыша свободного пробега широко известна и хорошо зарекомендовала себя при проведении различных расчетов. В то же время данная процедура является очень ресурсоемкой с точки зрения параллельной реализации на CUDA. Указанное обстоятельство связано с тем, что в расчетах требуется нахождение точек пересечения луча со всеми внутренними включениями, сортировка найденных расстояний и множественные сравнения, порождающие сильную дивергенцию потоков в алгоритме [13].

Для оптимизации розыгрыша свободного пробега мы предлагаем использовать метод максимального сечения [25]. Основная идея этого метода состоит в том, что моделирование процесса переноса излучения в неоднородной среде заменяется трассировкой фотонов в однородном материале, имеющем коэффициент ослабления с максимальным значением из присутствующих в среде. Математически такой подход формализуется добавлением к обоим частям уравнения (1) члена вида $\bar{\mu}I$ и переносом члена μI в правую часть уравнения. Здесь $\bar{\mu} = \sup_{r \in G} \mu(r)$ — коэффициент ослабления, соответствующий наиболее оптически плотному материалу в среде. При этом возникающее в правой части уравнения слагаемое $(\bar{\mu} - \mu)I$ трактуется как некоторое «фиктивное» рассеяние, без изменения направления. Такому подходу соответствует расчетная схема, аналогичная представленной выше, за тем исключением, что случайная величина τ_{i+1} распределена на промежутке $[0, d^-(r_i, \omega_i, t_i)]$ с плотностью вероятности

$$\bar{\mu} \exp(-\bar{\mu}\tau_{i+1}) \{1 - \exp(-\bar{\mu}d^-(r, \omega, t))\}^{-1},$$

а для определения нового направления рассеяния ω_{i+1} , на каждом шаге с вероятностью

$$P_{sc} = \frac{\bar{\mu} - \mu(r_{i+1})}{\bar{\mu} - \mu(r_{i+1}) + \sigma(r_{i+1})}$$

делается выбор между случайным вектором, распределенным на единичной сфере Ω , с плотностью вероятности $p(r_{i+1}, \omega_i \cdot \omega_{i+1})$ и «фиктивным» рассеянием вперед, при котором $\omega_{i+1} = \omega_i$.

При таком подходе формула, аналогичная соотношению (5), для весового множителя, учитывающего поглощение и вылет из среды принимает вид,

$$\theta_{n+1} = \frac{\bar{\mu} - \mu(r_{n+1}) + \sigma(r_{n+1})}{\bar{\mu}} \left[1 - \exp(-\bar{\mu}d^-(r, \omega, t)) \right] \theta_n,$$

$n = 1, 2, \dots, N - 1$.

Метод розыгрыша рассеяния на основе формулы (4) отличается меньшей дисперсией, что положительным образом сказывается на точности решения задачи. Метод максимального сечения, в свою очередь, отличается простой реализацией, допускающей легкое «распараллеливание» в рамках CUDA, однако при условии одинаковой точности требует вычисления большего количества членов усеченного ряда Неймана из-за необходимости многократного моделирования «фиктивного» рассеяния вперед. Таким образом, выбор той или иной процедуры может сильно сказываться на итоговой производительности программы. В дальнейших численных экспериментах мы приведем некоторые рекомендации о том, какой метод предпочтительнее использовать в зависимости от параметров моделируемой среды.

3. Особенности реализации метода Монте-Карло на GPU

Метод Монте-Карло для вычисления $I(r, \omega, t)$ был программно реализован на языке C++ с применением технологии CUDA. Хорошо известно, что для параллельных вычислений потока излучения $I(r, \omega, t)$ на некоторой сетке могут использоваться две стратегии распараллеливания: по точкам (каждый процесс независимо находит решение в своей точке) и по траекториям (все процессы моделируют различные траектории начинающиеся из одной точки). В нашей работе был выбран второй вариант как наиболее предпочтительный. Это связано с тем, что задача нахождения решения в точке требует, кроме генерации большого количества траекторий, еще и произвести осреднение полученных результатов, в итоге реализация подобной программы получится достаточно громоздкой для вычислительных ядер CUDA. Кроме того, может приводить к уменьшению производительности за счет дивергенции потоков. Применение стратегии распараллеливания по траекториям, напротив, приводит к генерации легковесных потоков, хорошо укладывающихся в парадигму вычислений SIMD [13]. В дополнение вычисление итоговой суммы может быть также ускорено за счет применения параллельной редукции.

Для генерации псевдослучайных величин была использована предоставляемая CUDA библиотека cuRAND, которая содержит средства для простой и эффективной параллельной генерации псевдослучайных и квазислучайных чисел. Значения

коэффициентов уравнения переноса излучения и некоторые другие не изменяющиеся в процессе вычислений величины с целью ускорения доступа помещались в константную память.

В процессе вычислений свободного пробега в кусочно-постоянной среде приходится определять расстояния до границ раздела разнородных материалов и вычислять значения коэффициентов уравнения переноса внутри пересекаемых лучом областей. Для ускорения работы с такими данными была использована разделяемая память (shared memory). Такой подход позволяет увеличить быстродействие программы за счет сокращения числа обращений к внешней памяти, но при этом возникает естественное ограничение на число потоков, связанное с наличием доступной разделяемой памяти и максимально возможным числом пересечений луча с поверхностями раздела материалов.

Вычислительные эксперименты показали слабую зависимость времени выполнения программы от вариации количества потоков в блоке в пределах 128–256 потоков на блок. Поэтому в дальнейших экспериментах мы использовали 192 потока на блок, размер вычислительной сети (GRID) при этом определялся количеством моделируемых траекторий. В случае, когда количество моделируемых траекторий превосходило допустимые размеры вычислительной сети, вычислительная работа равномерно распределялась между потоками сети, так что каждый из потоков моделировал несколько траекторий.

4. Численные эксперименты

Для тестирования эффективности различных методов моделирования свободного пробега частиц использовался цифровой фантом в форме цилиндра (радиус и высота 10 см), заполненный фоновой средой с коэффициентом ослабления, эквивалентным мягким тканям человека (0.17 см^{-1} на энергии 100 КэВ). Внутри фантома размещались сферические включения в случайных позициях, количество которых варьировалось в экспериментах. Для количественной оценки производительности алгоритмов рассчитывалась их трудоемкость — произведение дисперсии расчётной величины на среднее время моделирования одной траектории. Эта величина является стандартной метрикой сравнения методов Монте-Карло. Расчёты проводились для 12 реализаций фантома с разным расположением включений, после чего трудоемкость усреднялась.

В моделировании Монте-Карло учитывалось до $N_1 = 10$ актов взаимодействия фотонов со средой, а количество моделируемых траекторий составляло 10^7 . Такие параметры выбирались путем предварительных расчетов для получения относительной погрешности решения, не превышающей 1%.

Длина траекторий N_2 в методе максимального сечения корректировалась для компенсации фиктивного рассеяния вперед согласно формуле

$$N_2 = N_1 \times \frac{\bar{\mu}}{\underline{\mu}},$$

где $\underline{\mu} = \inf_{r \in G} \mu(r)$. Отношение $\bar{\mu}/\underline{\mu}$, характеризующее контраст значений коэффициента в среде, также варьировалось в численных экспериментах.

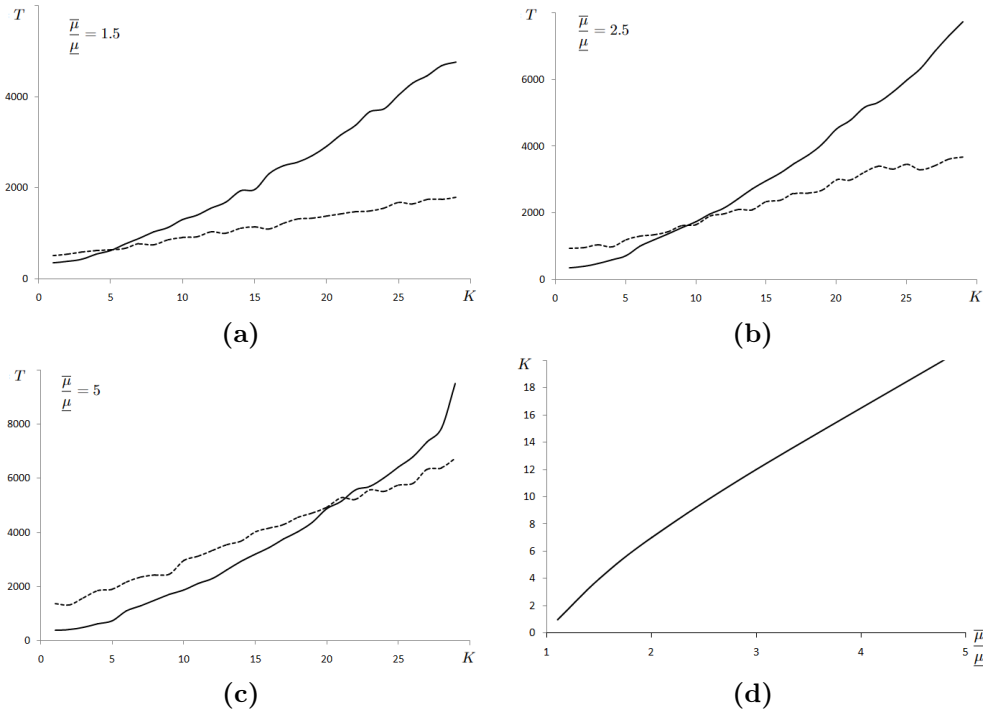


Рис. 1. Сравнение производительности методов Монте-Карло в зависимости от выбора процедуры розыгрыша свободного пробега: **(a)-(c)** — трудоемкость (T) метода в зависимости от числа включений K для различных соотношений между максимальным и минимальным значениями коэффициента поглощения. Пунктирная линия — метод максимального сечения, непрерывная линия — непосредственный розыгрыш для кусочно постоянной среды; **(d)** — пороговое значение количества включений, выше которого выгодно использовать метод максимального сечения.

Поведение графиков трудоемкости для обоих методов в зависимости от числа включений представлены на Рис. 1 (a)–(c). На осях абсцисс отмечено количество включений, на осях ординат — полученная трудоемкость. На каждом из графиков указано соотношение между максимальным и минимальными значениями коэффициентов ослабления среды. На графиках видно, что при небольшом отношении максимального и минимального коэффициентов ослабления (1.5–3.5) более эффективен метод максимального сечения (пунктирная линия), но с ростом разброса значений коэффициентов среды его трудоёмкость быстро возрастает, и он уступает по производительности непосредственному розыгрышу случайного пробега (непрерывная линия). При этом метод максимального сечения становится эффективным лишь для большого количества внутренних включений. На основе серии тестов был построен график (Рис. 1 (d)), показывающий пороговое количество включений, выше которого выгодно использовать метод максимального сечения в зависимости от неоднород-

ности среды. Данный график хорошо мажорируется прямой линией с уравнением $K = 5\bar{\mu}/\mu - 3$, которое можно использовать для выбора наиболее производительного метода розыгрыша свободного пробега, зная параметры моделируемой среды.

Заключение

В работе проведен сравнительный численный анализ двух модификаций метода розыгрыша свободного пробега применительно к решению нестационарного уравнения переноса излучения в неоднородной среде. Расчеты показали, что для случаев, когда контраст коэффициента ослабления среды невелик (например, в случае биологических сред), предпочтительным оказывается использование метода максимального сечения. С ростом величины контраста трудоемкость метода максимального сечения быстро растет, и его использование оправдано только в случае очень большого числа включений. В заключение стоит сказать несколько слов о структуре фантома, который использовался в сравнении двух методов. В рамках нашей работы в качестве формы неоднородностей были выбраны сферические включения как наиболее простые в плане поиска точек пересечения границ. Рассмотрение включений другой формы приведет к тому, что трудоемкость метода непосредственного розыгрыша свободного пробега для кусочно-постоянной среды возрастет, и при выборе метода, ориентируясь на график, приведенный в работе, метод максимального сечения даст гарантированно лучшие результаты.

Список литературы

- [1] Bal G., "Inverse transport theory and applications", *Inverse Problems*, **25**:5, (2009), 025019.
- [2] Прохоров И. В., Сущенко А. А., "Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения", *Акустический журнал*, **61**:3, (2015), 400–408.
- [3] Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В., *Использование уравнения переноса в томографии*, Логос, М., 2000.
- [4] Фано У., Спенсер Л., *Перенос гамма излучения*, Госатомиздат, М., 1963.
- [5] Черчиньяни К., *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
- [6] Будак В. П., Савенков В. И., "О новом решении уравнения переноса излучения в рамках мало углового приближения", *Тр. Моск. энерг. ин-та*, **Вып. 591**, (1982), 141–144.
- [7] Стрелков С. А., Сушкевич Т. А., *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша 65*, 1988.
- [8] *Радиационный перенос в рассеивающей и поглощающей атмосферах: стандартные вычислительные процедуры*, ред. Ж. Ленобль, Deepak Publishing, 1990.
- [9] Ямщиков В. М., "Аналитическое решение задачи о переносе монохроматического направленного излучения в резонансно поглощающей среде", *Оптика и спектроскопия*, **131**:5, 705–710.
- [10] Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А., *Метод Монте-Карло в атмосферной оптике*, Наука, Новосибирск, 1976.
- [11] Соболев И. М., *Численные методы Монте-Карло*, Наука, Москва, 1973.
- [12] Михайлов Г. А., Медведев И. Н., *Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования*, Омега Принт, Новосибирск, 2011.

- [13] Боресков А. В., Харламов А. А., *Основы работы с технологией CUDA*, ДМК Пресс, М., 2010.
- [14] Жуковский М. Е., Усков Р. В., “Моделирование взаимодействия гамма-излучения с веществом на гибридных вычислительных системах”, *Математическое моделирование*, **23**:7, (2011), 20–32.
- [15] Alerstam E., Svensson T., Andersson-Engels S., “Parallel Computing with Graphics Processing Units for High-Speed Monte Carlo Simulation of Photon Migration”, *Journal of biomedical optics.*, **13**:6, (2008), 060504.
- [16] Усков Р. В., “О некоторых особенностях применения технологии CUDA для моделирования переноса излучения”, *Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Естественные науки»*, 2011, № 3, 71–83.
- [17] *MC GPU project*, Monte Carlo simulation of x-ray transport in a GPU with CUDA, <http://code.google.com/p/mcgpu/>.
- [18] Periyasamy V., Pramanik M., “Advances in Monte Carlo Simulation for Light Propagation in Tissue”, *IEEE Reviews in Biomedical Engineering.*, 2017, 1–11.
- [19] Russkova T., “Monte Carlo Simulation of the Solar Radiation Transfer in a Cloudy Atmosphere with the Use of Graphic Processor and NVIDIA CUDA Technology”, *Atmospheric and Oceanic Optics*, **31**, (2018), 119–130.
- [20] Четверушкин Б. Н., Марков М. Б., Усков Р. В., “О распараллеливании метода частиц для гибридного суперкомпьютера”, *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, 2022, № 505, 19–23.
- [21] Fetisov, “X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements”, *Physics-Uspexhi*, **63**:1, (2020), 2–32.
- [22] Кузнецов В. С., Николаева О. В., Басс Л. П., Быков А. В., “Моделирование распространения ультракороткого импульса света через сильно рассеивающую среду”, *Математическое моделирование*, **21**:4, (2009), 3–14.
- [23] Prokhorov I. V., Yarovenko I. P., “Determination of the attenuation coefficient for the non-stationary radiative transfer equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **61**:12, (2021), 2088–2101.
- [24] Yarovenko I. P., Kazantsev I. G., “An extrapolation method for improving the linearity of CT-values in X-ray pulsed tomography”, *Дальневост. матем. журн.*, **22**:2, (2022), 269–275.
- [25] Coleman W. A., “Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique to radiation transport problems”, *Nucl. Sci. Eng.*, **32**:1, (1968), 76–81.
- [26] Михайлов Г. А., Аверина Т. А., “Алгоритм максимального сечения в методе Монте-Карло”, *Доклады Академии наук*, **428**:2, (2009), 163–165.
- [27] Антюфеев В. С., “К обоснованию модификации метода максимального сечения”, *Вычислительные технологии*, **17**:2, (2012), 13–19.
- [28] Прохоров И. В., Жуплев А. С., “Об эффективности методов максимального сечения в теории переноса излучения”, *Компьютерные исследования и моделирование*, **5**:4, (2013), 573–582.

Поступила в редакцию
25 января 2024 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00) и при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (№ 075-02-2023-946).

*Donskaya M. A.*¹, *Yarovenko I. P.*^{1,2} On selecting free path length sampling method for solving the non-stationary radiation transport equation using graphic accelerators. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2024. V. 24. No 1. P. 33–44.

¹Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

²Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The paper considers the issues of mathematical modeling of the non-stationary transfer of X-ray radiation. We describe the process using an initial-boundary problem for the radiation transfer equation, which is solved by the weighted Monte Carlo method. The implementation of the method proposed using parallel calculations on graphic processor units (GPU) is discussed.

Key words: *radiative transfer equation, maximum crossection method, Monte Carlo methods, parallel computing.*