

УДК 532.2

MSC2020 11B37 + 33E05

© Н. И. Белозеров<sup>1</sup>, К. А. Чехонин<sup>1</sup>

## Трехмерное конечно-элементное моделирование течения расплава металла со свободной поверхностью в условиях движущегося лазерного источника

Рассматривается трехмерный конвективный теплоперенос в ванне расплава металла под действием движущегося лазерного источника тепла. В основу математической модели с лагранжевым описанием положены уравнения Навье – Стокса, неразрывности и энергии с учетом диффузионных, конвективных и радиационных тепловых потерь. Зависящие от температуры поверхностные эффекты учитываются с использованием поверхностного натяжения (сил Марангони) при динамическом контактном угле на движущейся линии трехфазного контакта. Численное решение задачи производится методом конечных элементов с дивергентно устойчивой аппроксимацией основных переменных. Интегрирование кинематических и динамических условий на свободной поверхности производится по схеме Ньюмарка – Бассака. Производится верификация и валидация предложенного численного алгоритма. Показано влияние определяющих параметров процесса (мощности и скорости сканирования лазера) на геометрические размеры ванны с расплавом.

**Ключевые слова:** *лазерный источник энергии, свободная поверхность, поверхностное натяжение, конвективный теплоперенос, метод конечных элементов, фазовый переход.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202402>

### Введение

Течение вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью широко распространено в природе и является важной стадией многих физико-химических и гидродинамических явлений, сопутствующих современным технологиям. Например, в оборонной, космической отрасли при химическом формовании изделий из высоконаполненных полимерных композитов, в аддитивных технологиях при наращивании

<sup>1</sup>Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60.

Электронная почта: [nbe1444@mail.ru](mailto:nbe1444@mail.ru) (Н. И. Белозеров), [lex7861@rambler.ru](mailto:lex7861@rambler.ru) (К. А. Чехонин).

слоя на поверхности подложки с применением металлических порошков, электроискровом легировании, полировании металлических поверхностей с использованием лазера, производстве электронных компонентов.

Характерной гидродинамической особенностью рассматриваемых течений является наличие изменяющихся во времени межфазных поверхностей, линий трехфазного контакта (ЛТФК) и контактных углов смачивания. Положение межфазных границ и ЛТФК, значения контактных углов смачивания в заданной области течения заранее неизвестно и является частью решения задачи. Аналитическое решение такого класса краевых задач удается получить очень редко, а возможности экспериментального исследования сильно ограничены. Поэтому одним из основных инструментов исследования рассматриваемых краевых задач является их численное решение.

Начиная с 60-х годов XX века, проведено большое количество теоретических и экспериментальных исследований при наличии межфазной границы и ЛТФК. Обзор этих исследований можно найти в работах [1–3]. В работах [4–6] были исследованы особенности течения высоковязкой и неньютоновской жидкостей со свободной поверхностью. При протекании реакции полимеризации показано влияние реологических параметров, неизотермических условий течения и макрокинетических изменений на гидродинамический процесс. Все указанные работы выполнены в рамках модели ползущего течения (число Рейнольдса  $Re \ll 1$ ) и без учета поверхностного натяжения на свободной границе. Появление капиллярных эффектов (капиллярное число  $Ca < 1$ ) оказывает существенное влияние на эволюцию свободной поверхности [7–9].

Следует отметить, что численное моделирование течений вязкой жидкости со свободной поверхностью в капиллярах сопровождается значительными трудностями в построении устойчивых вычислительных алгоритмов. Во-первых, требуется вычисление кривизны свободной поверхности, которая включает в себя вторые производные по свободной поверхности. Применение сплайнов для интерполяции свободной поверхности в большинстве случаев приводит к нефизичным осцилляциям неизвестной границы и требует использования дополнительных вычислительных фильтров. Во-вторых, необходима численная реализация выбранного механизма взаимодействия фаз на ЛТФК с вычислением динамического краевого угла.

Следующая трудность связана с сингулярностью напряжений и давления на ЛТФК при использовании условий прилипания и изменяющимся от 180 градусов контактным углом («кинематический парадокс» Скривена [1, 2]). Кроме этого, свободная поверхность имеет сложную, как правило, выпуклую (или вогнутую) геометрию, и ее координаты заранее неизвестны. Вычисление ее положения в изменяющейся во времени расчетной области с использованием явных алгоритмов аппроксимации в условиях малых значений капиллярного числа требует использования очень малых шагов интегрирования по времени. Моделирование капиллярных течений со свободной поверхностью усложняется в неизотермических условиях фазового перехода жидкости (испарения или затвердевания), с возникновением дополнительных неизвестных границ в расчетной области [10–14].

В настоящей работе рассматривается трехмерный конвективный тепломассопе-

ренос в ванне расплава металла под действием движущегося лазерного источника тепла. В основу математической модели положены уравнения Навье – Стокса, неразрывности и энергии с учетом диффузионных, конвективных и радиационных тепловых потерь. Зависящие от температуры поверхностные эффекты учитываются с использованием поверхностного натяжения (сил Марангони). Численное решение задачи производится методом конечных элементов с дивергентно устойчивой аппроксимацией основных переменных [15]. Интегрирование кинематических и динамических условий на свободной поверхности производится по неявной схеме Ньюмарка – Бассака [5]. Для снижения порядка производных при вычислении кривизны используется модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами в касательном направлении к ней [7, 8]. Производится верификация предложенного численного алгоритма.

Показано влияние определяющих параметров процесса (мощности и скорости сканирования лазера, числа Марангони) на конвективный теплоперенос и геометрические размеры ванны с расплавом.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим конвективное течение расплавленного металла в изменяющейся во времени области  $\Omega_t$  при взаимодействии с лазерным источником энергии заданной мощности (рис. 1). Интенсивность энергии источника распределена по поверхности расплава с заданной функцией распределения. Потери энергии лазера происходят вследствие неполной абсорбции лазерного излучения, наличия конвективного и диффузионного теплообмена с окружающим газом и подложкой, а также радиационные потери. Считаем, что гравитационные силы незначительные по сравнению с капиллярными (число  $Bo \ll 1$ ). Процессами испарения расплава металла пренебрегаем.

В начальный момент времени поверхность подложки принимается плоской, имеющей заданную начальную температуру. После начала воздействия лазерного луча поверхность подложки нагревается, а при достижении температуры выше уровня ликвидуса на ее поверхности образуется ванна расплава, в которой возникает конвективное течение под действием сил Марангони и теплового расширения (рис. 1). Область  $\Omega_t$  ограничена изменяющейся во времени свободной поверхностью  $\Gamma_f$  с линией трехфазного контакта (ЛТФК)  $\partial\Gamma_f$ . ЛТФК имеет динамический контактный угол смачивания  $\theta_d$  к твердой границе подложки (рис. 1), а  $\Gamma_{sl}$  — неизвестная граница фазового перехода.

В основу математической модели рассматриваемого неизотермического гидродинамического с фазовым переходом положим уравнения Навье – Стокса в переменных Лагранжа и неразрывности:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v})) - \alpha(T) \cdot \mathbf{v} + \rho\beta g(T - T_l)\mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\mu$  — вязкость металла,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $T$  — температура,  $\rho\beta g(T - T_l)$  — объемные

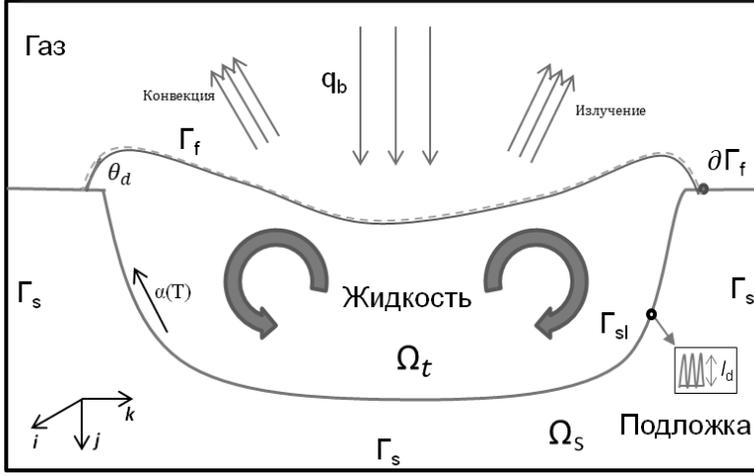


Рис. 1. Расчетная область задачи.

силы плавучести, направление действия которых указывает единичный вектор  $\mathbf{j}$  (рис. 1). Плавление материала происходит в диапазоне температур  $T_l - T_s$ . Параметр  $\alpha(T)$  вносит вклад в сопротивление течению расплава в дендритном слое границы фазового перехода  $\Gamma_{sl}$  (рис. 1) с характерным размером  $l_d$  и определяется как [16]

$$\alpha(T) = \alpha \frac{\mu (1 - f_l)^2}{(f_l + \varepsilon)^3},$$

где  $\alpha = \frac{180}{l_d^2}$ ;  $f_l = \{0, T < T_s; \frac{T - T_s}{T_l - T_s}, T_s \leq T \leq T_l; 1, T > T_l\}$ ;  $f_l + f_s = 1$ ;  $\varepsilon \ll 1$ ;  $f_s$  — объемная доля твердой фракции. Для определения поля температуры в области  $\Omega_t$  используем уравнение энергии с учетом фазового перехода:

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (3)$$

где  $\lambda(T)$  — теплопроводность металла,

$$H(T) = \int_{T_0}^T c_p(T) dT + L \cdot f_l$$

— энтальпия,  $L$  — латентное тепло,  $T_0 = 20^\circ C$  — начальная температура. Плотность, удельную теплоемкость и теплопроводность в области  $\Omega_t$  вычисляем по правилу смеси:

$$c_p = \frac{\rho_s c_{p_s} f_s + \rho_l c_{p_l} f_l}{\rho_s f_s + \rho_l f_l}, \quad \rho = \rho_s f_s + \rho_l f_l, \quad \lambda = \lambda_s f_s + \lambda_l f_l.$$

На свободной поверхности  $\Gamma_f$ , движущейся с кинематическим условием

$$\left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4)$$

динамические краевые условия будут включать в себя:

$$-(p\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} = \gamma\kappa\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}), \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) = \frac{\partial\gamma}{\partial T} \nabla T \cdot \mathbf{t}_i + \frac{\partial\gamma}{\partial T} \nabla T \cdot \mathbf{t}_k. \quad (6)$$

На ЛТФК граничные условия скольжения и непротекания представим в виде

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) = \chi\mathbf{v} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

В уравнениях (5)–(7)  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$  — симметричный тензор скоростей деформаций,  $\gamma$  — поверхностное натяжение,  $\kappa$  — кривизна свободной поверхности,  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{T}$  — тензоры касательных напряжений на свободной поверхности и ЛТФК,  $\chi$  — коэффициент трения–скольжения ( $\chi=0$  — полное скольжение,  $\chi=\infty$  — прилипание),  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к свободной поверхности,  $\mathbf{t}_i$  и  $\mathbf{t}_k$  — единичные векторы касательной к свободной поверхности по направлению  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{k}$  соответственно (рис. 1).

Для уравнения энергии устанавливаем граничные условия теплового баланса на свободной поверхности  $\Gamma_f$ :

$$q_b \cdot \mathbf{n} = (h_c(T - T_0) + \varepsilon\sigma_b(T^4 - T_0^4)) \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

где  $h_c$  — коэффициент теплообмена окружающему газу,  $\varepsilon$  — уровень радиационной эмиссии,  $\sigma_b$  — коэффициент Стефана-Больцмана,  $q_b$  — тепловой поток от лазера

$$q_b = \frac{C\eta P}{\pi r_0^2} \exp\left[-\frac{2((x-x_0)^2 + (z-z_0 - v_p t)^2)}{r_0^2}\right],$$

$\eta$  — абсорбция,  $r_0$  — эффективный радиус луча лазера,  $v_p$  — скорость сканирования,  $C$  — масштабный коэффициент, определяемый размерностью задачи,  $P$  — мощность лазера. Для определения распределения температуры в области  $\Omega_s$  используем классическое уравнение теплопроводности с граничным условием на  $\Gamma_s$  (рис. 1)

$$T = T_0. \quad (9)$$

## 2. Алгоритм решения задачи

Численное решение рассматриваемой задачи (1)–(9) производим методом конечных элементов в переменных Лагранжа. Область решения покрывается конечно-элементной сеткой из четырехугольных изопараметрических конечных элементов второго порядка, использующих разрывную билинейную аппроксимацию давления [15]. Рассматриваемая аппроксимация основных переменных задачи позволяет удовлетворить условию их совместности (условию Ладыженской – Бреци – Бабушки или LBB-условию [15]). На каждом временном шаге конечно-элементная сетка перестраивается с использованием алгоритма упругих связей [15].

Систему нелинейных уравнений линеаризуем с использованием метода Ньютона и решаем GMRES — методом Саада [7]. Для функциональной связи скорости движения ЛТФК и динамического краевого угла  $\theta_d$  используем эмпирическое соотношение Джанга [7]

$$\cos\theta_d = \cos\theta_e - [1 + \cos\theta_e] \operatorname{th}\left(4.96(Ca_{cl})^{0.702}\right),$$

где  $\theta_e$  — равновесный контактный угол, являющийся входным параметром рассматриваемой задачи,  $v_{cl}$  — скорость ЛТФК,  $Ca_{cl} = \frac{\mu v_{cl}}{\gamma}$  — капиллярное число. Следует отметить, что при  $T < T_s$  скорость ЛТФК равна нулю, а динамический контактный угол  $\theta_d$  не изменяется (условие стагнации [10–14]).

Численное интегрирование основных уравнений по времени в Лагранжевой формулировке по неявной схеме можно представить в виде:

$$\frac{\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}}_{n+1}.$$

В настоящей работе используем схему интегрирования Ньюмарк – Бассак [15]:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\zeta}{\beta} \left( \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\partial t} \right) - \left( \frac{\zeta}{\beta} - 1 \right) \mathbf{v}_n - \frac{\partial t}{2} \left( \frac{\zeta}{\beta} - 2 \right) \mathbf{a}_n,$$

где

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\beta \partial t^2} - \frac{1}{\beta \partial t} \mathbf{v}_n - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \mathbf{a}_n, \quad \zeta = \frac{1}{2} - \alpha^\beta, \quad \beta = \frac{(1 - \alpha^\beta)^2}{4}, \quad \alpha^\beta > 0.$$

Алгоритм интегрирования по времени имеет второй порядок погрешности и является более устойчивым по сравнению с широко используемым алгоритмом по явной схеме (схеме Эйлера) [8]. Шаг по времени выбираем из условия устойчивости

$$\Delta t < \max \left( \frac{\mu h}{\gamma}, \sqrt{\frac{\rho h^3}{\gamma}} \right),$$

где  $h$  — диаметр конечного элемента.

### 3. Результаты расчетов

Анализ результатов расчета задачи производим с использованием безразмерных критериев. Примем масштабы для скорости, температуры и длины

$$v' = \frac{v}{v_0}, \quad T' = \frac{T - T_0}{T_l - T_0}, \quad l' = \frac{l}{l_0},$$

где  $v_0 = \frac{\lambda}{\rho c_p l_0}$  — характерная скорость,  $l_0$  — характерная длина, равная радиусу  $r_0$ .

Получающиеся в результате обезразмеривания задачи (1)–(9) критериальные параметры имеют вид числа Пекле ( $Pe$ ), Прандтля ( $Pr$ ), Рейнольдса ( $Re$ ), Грасгофа ( $Gr$ ), Стефана ( $Ste$ ), капиллярного числа ( $Ca$ ), Марангони ( $Ma$ ) и параметров трения – скольжения ( $D$ ), радиационного излучения ( $N_c$ ), мощности лазера ( $Q$ ):

$$Pe = \frac{\rho c_p l_0 v_0}{\lambda}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad Re = \frac{v_0 l_0}{\nu}, \quad Gr = \frac{g l_0^3 \beta (T_l - T_0)}{\nu^2}, \quad Ste = \frac{c_p (T_l - T_0)}{L},$$

$$Bi = \frac{h_c l_0}{\lambda}, \quad Ca = \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| \frac{(T_l - T_0)}{\gamma}, \quad Ma = \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| \frac{(T_l - T_0)}{\mu v_0}, \quad D = \frac{\chi l_0}{\mu},$$

$$N_c = \frac{\lambda}{\varepsilon \sigma_b (T_l - T_0)^3 l_0}, \quad Q = \frac{C \eta P}{\pi \lambda (T_l - T_0) l_0}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Тестирование численного решения рассматриваемой задачи на сеточную сходимость производим на примере течения слоя жидкости высотой  $H$  в бассейне бесконечной длины при известном распределении поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости  $\gamma(x) = \gamma \cdot x$  (рис. 2). В этом случае свободная поверхность недеформируется (течение Куэтта), а в области течения устанавливается профиль скорости

$$v_x = \frac{\gamma H}{2\mu} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{y}{H} \right)^2 - \frac{y}{H} \right).$$

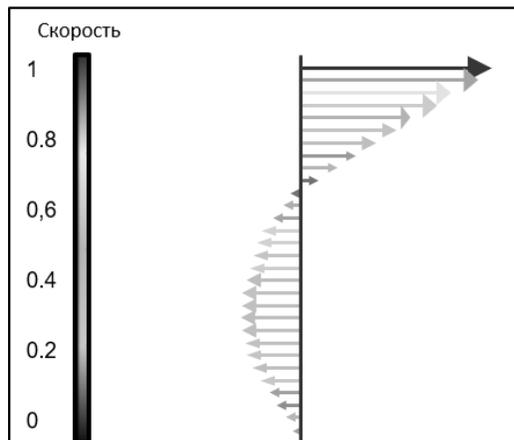


Рис. 2. Профиль скорости: течение в бесконечном бассейне.

Сходимость алгоритма на последовательности сеток  $(N \times N)$  приведена на рис. 3(а). Анализ результатов численного решения показывает сходимость алгоритма со вторым порядком. На рис. 3(б) приведены сравнения расчетов на последовательности сеток с аналитическим профилем скорости.

В дальнейшем рассмотрим особенности численного решения задачи с использованием статического источника лазерного излучения при значениях параметров

$$Pr = 0.128, Re = 7.813, Gr = 2863.091, Ste = 5.064, Ca = 0.029, \\ Bi = 0.007, Ma = 19426.786, D = 0.179, N_c = 955.324, Q = 7.875.$$

Статический лазерный источник (скорость сканирования  $v_p = 0$ ) с радиусом луча 1мм с равномерно распределенной по радиусу мощностью в 5.2 кВт. Время работы лазера составляет 0.15 сек. После образования ванны с расплавом в ней под действием сил Марангони возникает конвективное течение. Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры приведена на рис. 4(а). Распределение температуры, функции тока и вектора скорости в ванне расплава иллюстрируются на рис. 4(б) и рис. 4(в). Численные эксперименты показывают сильную зависимость деформации свободной поверхности от эффекта Марангони.

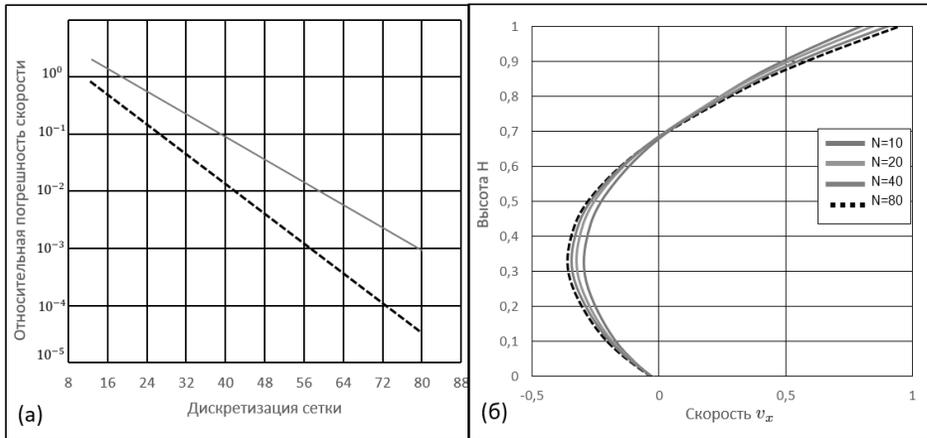


Рис. 3. Анализ сходимости алгоритма на последовательности сеток: (а) — эволюция относительной погрешности скорости, (б) — профиль скорости  $v_x$  по высоте  $H$ .

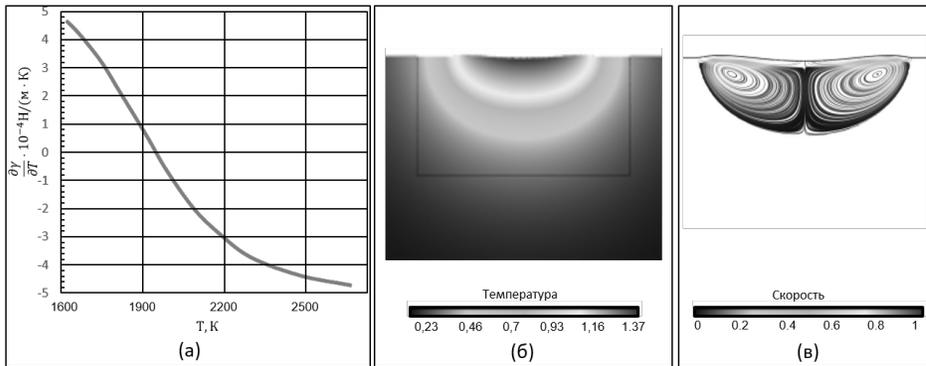


Рис. 4. Распределение: (а) — коэффициента поверхностного натяжения от температуры; (б) — температуры в ванне расплава в момент выключения лазера; (в) — изолиний функции тока и вектора скорости.

На рис. 5 приведены численные решения задачи на последовательности сеток ( $N \times N \times N$ ), которые свидетельствуют об удовлетворительной сходимости численного алгоритма. Следует отметить, что в доступной литературе отсутствуют данные о статических и динамических углах смачивания расплава металла на твердой подложке. В настоящей работе статический угол смачивания принимался равным  $\theta_e = 30^\circ$ . Под действием сил Марангони значение динамического угла смачивания выросло до  $(\theta_d)_{\max} = 72^\circ$ , а в момент его стагнации (отверждения металла) при выключении лазера принимало значение  $\theta_d = 63^\circ$ .

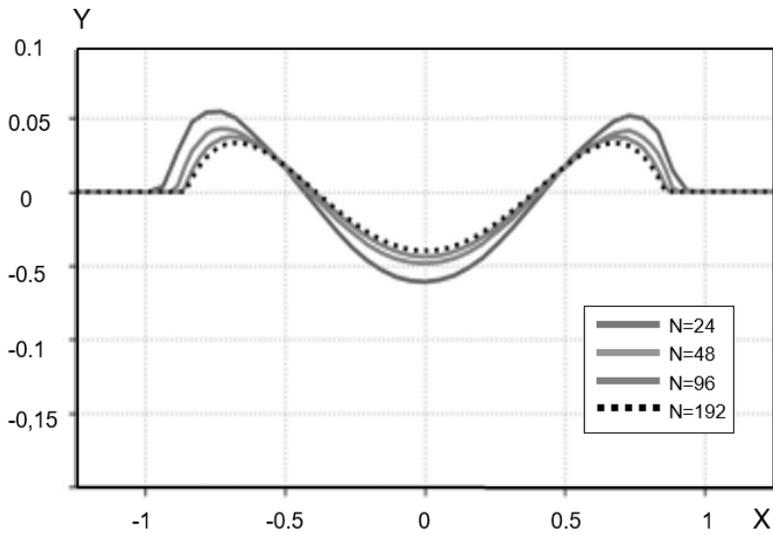


Рис. 5. Деформация свободной поверхности ванны с расплавом при использовании сеточной области размером  $N \times N \times N$

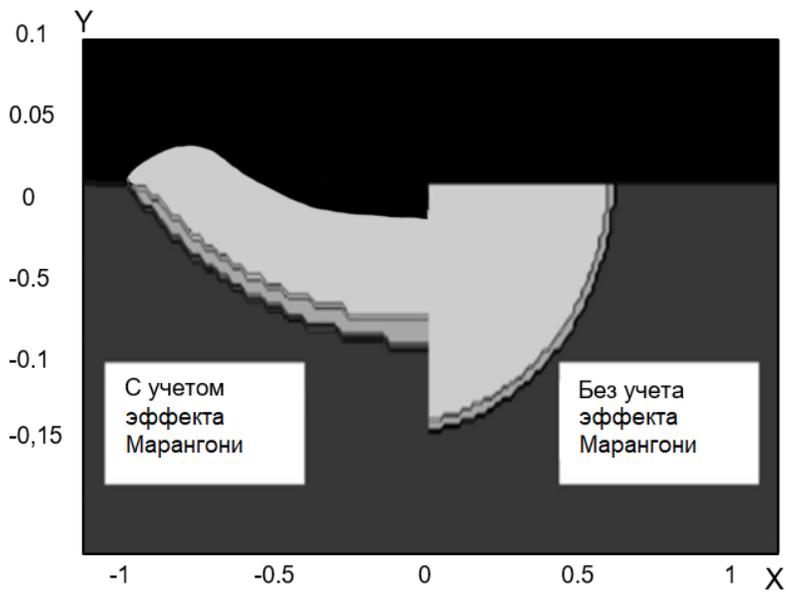


Рис. 6. Размеры ванны с учетом и без учета конвекции Марангони.

При моделировании ванны расплава часто упрощают задачу и пренебрегают конвективным движением расплавленного материала. Рис. 6 иллюстрирует изменение геометрии ванны с учетом и без учета влияния эффекта Марангони на конвекцию при нулевой скорости сканирования. Результаты расчетов показывают, что учет эффекта Марангони на конвекцию приводит к значительным изменениям геометрии ванны и свободной поверхности расплава. Увеличение параметра Марангони приводит к росту скорости конвективного течения.

В случае подвижного лазерного источника с заданной скоростью сканирования ( $v_p = 100$  мм/с) геометрия ванны удлиняется с сокращением ее ширины, что представлено на рис. 7 с распределением температуры в ванне расплава. На рис. 7(а) приведен разрез ванны по глубине  $h$ , а на рис. 7(б) представлена проекция ванны расплава по направлению действия луча, где  $w, l$  — ширина и длина ванны расплава. При этом слева и справа на рис. 7 геометрия приведена без учета и с учетом конвективного течения Марангони расплавленного материала соответственно. В этом

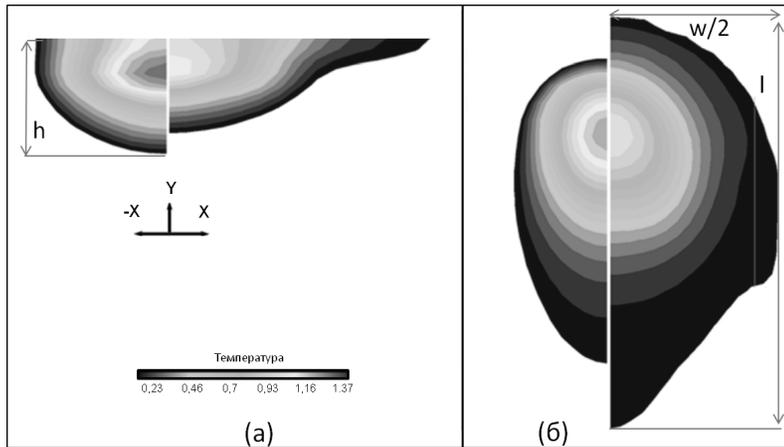


Рис. 7. Геометрия ванны расплава с учетом скорости сканирования лазерного луча: (а) — разрез ванны по глубине; (б) — проекция ванны по направлению действия луча.

варианте моделирования в качестве масштаба скорости принималась скорость сканирования ( $v_0 = v_p$ ) со значениями критериальных параметров

$$Pe = 16.091, \quad Re = 125.71, \quad Ma = 1165.607.$$

В дальнейшем, путем численного исследования покажем, что определяющую роль на геометрические параметры ванны оказывают помимо эффекта Марангони — мощность лазера и скорость сканирования. Варьирование их значений производилось путем установления одного из параметров с некоторым начальным значением. Влияние мощности лазера  $Q$  и безразмерной скорости сканирования на геометрические размеры ванны расплава приведены на рис. 8. Из результатов расчета следует,

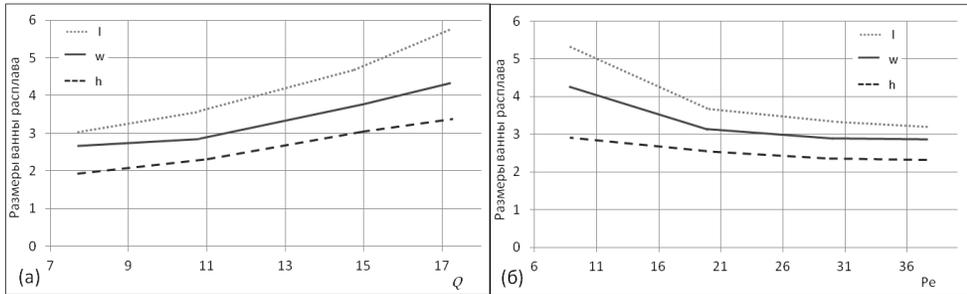


Рис. 8. Эволюция геометрических размеров ванны с расплавом в зависимости от: (а) — параметра мощности лазера  $Q$ ; (б) — скорости сканирования  $v_p$ .

увеличение мощности лазерного луча при постоянной скорости сканирования приводит к значительному росту объема расплава в ванне. Ванна с расплавом приобретает форму эллипса со значительным удлинением по направлению скорости сканирования, что может привести к неустойчивости расплавленного слоя по механизму Плато–Рэлея. В то же время увеличение скорости сканирования лазерного луча приводит к значительному сокращению объема ванны. При этом асимптотически ее геометрия приближается к полусфере. Следует отметить, что при варьировании рассматриваемых параметров скорость конвективного течения расплава в ванне изменялась в пределах (50–110)мм/с. Кроме этого, учет эффекта Марангони приводит к снижению максимальной температуры в ванне на (200–400)°С.

## Выводы

Разработаны математическая модель и устойчивый численный алгоритм решения задачи о неизотермическом конвективном течении расплава металла с учетом углов смачивания на линии трехфазного контакта. Проведена верификация численного алгоритма, основанного на методе конечных элементов. Путем сравнения с известными аналитическими решениями исследована его устойчивость и сходимость. Показано влияние конвективного течения Марангони и определяющих параметров задачи на геометрические размеры ванны с расплавом.

## Список литературы

- [1] Bonn D., Eggers J., “Wetting and spreading”, *Reviews of Modern Physics*, **81**, (2009), 739–805.
- [2] Worner M., “Numerical modeling of multiphase flows in microfluidics and micro process engineering: a review of methods and applications”, *Microfluidics and nanofluidics*, **12**:6, (2009), 841–886.
- [3] Mukherjee T., DebRoy T., *Theory and Practice of Additive Manufacturing 1st Edition*, Wiley, 2023.

- [4] Булгаков В. К., Чехонин К. А., Липанов А. М., “Заполнение области между вертикальными коаксиальными цилиндрами аномально вязкой жидкостью в неизометрических условиях”, *Инженерно-физический журнал*, **57**:4, (1989), 577–582.
- [5] Чехонин К. А., Сухинин П. А., “Движение нелинейно-вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема”, *Математическое моделирование*, **13**:3, (2001), 89–102.
- [6] Chekhonin K. A., Sukhinin P. A., “Numerical modeling of filling axially symmetric channel with non-linearly viscoelastic fluid taking into account  $\pi$  effect”, *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, **72**:5, (1999), 881–886.
- [7] Chekhonin K. A., Vlasenko V. D., “Modelling of capillary coaxial gap filling with viscous liquid”, *Computational Continuum Mechanics*, **12**, (2019), 313–324.
- [8] Chekhonin K. A., Vlasenko V. D., “Three-dimensional finite element model of three-phase contact line dynamics and dynamic contact angle”, *WSEAS transactions on fluid mechanics*, **19**, (2024), 577–582.
- [9] Chekhonin K. A., Vlasenko V. D., “Three-dimensional finite element model of the motion of a viscous incompressible fluid with a free surface, taking into account the surface tension”, *AIP conference proceedings. Actual problems of continuum mechanics: experiment, theory, and applications*, **207**, (2023), 030007.
- [10] Shikhmurzaev Y. D., “Solidification and dynamic wetting: a unified modeling framework”, *Physics of Fluids*, **33**, (2021), 072101.
- [11] Ruitter et al R., “Contact line arrest in solidifying spreading drops”, *Phys. Rev. Fluids*, **2**, (2017), 043602.
- [12] Herbaut et al R., “A criterion for the pinning and depinning of an advancing contact line on a cold substrate”, *Euro. Phys. J. Spec. Top.*, **229**, (2020), 043602.
- [13] Gielen et al M. V., “Solidification of liquid metal drops during impact”, *J. Fluid Mech*, **883**:A32, (2020), 20.
- [14] Sourais A. G., Markodimitrakis L. E., Papathanasiou A. G., “Droplet evaporation dynamics on heterogeneous surfaces: Numerical modeling of the stick–slip motion”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **207**, (2023), 123992.
- [15] Булгаков В. К., Чехонин К. А., *Основы теории метода смешанных конечных элементов*, Изд-во Хабар. политех. института, Хабаровск, 1999.
- [16] Rappaz M., Bullet M., Deville M., *Modeling in Materials Science and Engineering*, Springer Verlag, Berlin, 2003.

Поступила в редакцию  
19 февраля 2024 г.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ  
ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

---

*Belozеров N. I.<sup>1</sup>, Chekhonin K. A.<sup>1</sup>* Three-dimensional finite element modeling of the flow of a metal melt with a free surface under conditions of a moving laser source. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2024. V. 24. No 1. P. 9–21.

<sup>1</sup>Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

#### ABSTRACT

Three-dimensional convective heat and mass transfer in a metal melt bath under the action of a moving laser heat source is considered. The mathematical model with a Lagrangian description is based on the Navier–Stokes equations, continuity and energy, taking into account diffusion, convective and radiative heat losses. Temperature–dependent surface effects are taken into account using surface tension (Marangoni forces) at a dynamic contact angle on a moving three-phase contact line. The numerical solution of the problem is performed by the finite element method with a divergently stable approximation of the main variables. The integration of kinematic and dynamic conditions on a free surface is performed according to the Newmark–Bassac scheme. Verification and validation of the proposed numerical algorithm is performed. The influence of the determining process parameters (laser power and scanning speed) on the geometric dimensions of the melt bath is shown.

*Key words: laser energy source, free surface, surface tension, convective heat and mass transfer, finite element method, phase transition.*