

УДК 517.95  
MSC2020 35Q93 + 78A46

© К. Е. Бахтин<sup>1,2</sup>; П. А. Савинов<sup>2</sup>

## Оптимизационный метод решения задач маскировки для 2D-модели электропроводности

Рассматриваются задачи проектирования многослойных маскировочных оболочек для 2D-модели электропроводности. Предполагается, что эти оболочки состоят из конечного числа кольцевых слоев, заполненных изотропными средами. С использованием оптимизационного метода рассматриваемые задачи сводятся к экстремальным задачам и исследуются свойства их решений. Развивается эффективный численный алгоритм, основанный на методе роя частиц (МРЧ). Обсуждаются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** *электропроводность, оптимизационный метод, обратные задачи, маскировка, многослойная оболочка, метод роя частиц.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202401>

### Введение

В последнее десятилетие наблюдается растущий интерес в развитии технологий устройств невидимости (в виде маскировочных оболочек), служащих для маскировки материальных тел от обнаружения их различными средствами локации. Начиная с работ [1,2] большое количество публикаций посвящено разработке различных схем и стратегий маскировки материальных тел. В первых работах в этой области исследовалась электромагнитная маскировка, т. е. маскировка объектов от обнаружения средствами электромагнитной локации. Затем основные результаты из теории электромагнитной маскировки были перенесены на случаи акустической маскировки и маскировки от статических тепловых, электрических и магнитных полей.

Следует, однако, отметить, что техническая реализация решений, полученных в указанных работах, связана с существенными трудностями [1]. Поэтому в последние годы для решения задач маскировки стали применять оптимизационные методы (см. [3–6]). В настоящей работе оптимизационный метод (см. [7]) применяется для решения задачи маскировки для 2D-модели электропроводности.

<sup>1</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

<sup>2</sup> Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.  
Электронная почта: [bakhtin.ke@dvfu.ru](mailto:bakhtin.ke@dvfu.ru) (К. Е. Бахтин), [savinov\\_pa@dvfu.ru](mailto:savinov_pa@dvfu.ru) (П. А. Савинов).

## 1. Постановка прямой задачи

Мы начнем с постановки прямой задачи электропроводности, рассматриваемой в прямоугольнике  $D = \{\mathbf{x} \equiv (x, y) : |x| < x_0, |y| < y_0\}$ . Будем считать, что внешний электрический потенциал  $U^e$  создается двумя вертикальными пластинами  $x = \pm x_0$ , которые поддерживаются опорами при разных значениях потенциала  $u_1$  и  $u_2$ , а верхняя и нижняя пластины  $y = \pm y_0$  электрически изолированы. Мы предполагаем, что внутри  $D$  находится материальная оболочка  $(\Omega, \sigma)$ . Здесь  $\Omega$  — круговой слой  $a < |\mathbf{x}| < b$ ,  $b < \max\{x_0, y_0\}$  и  $\sigma$  — электрическая тензорная, или скалярная проводимость неоднородной анизотропной среды, заполняющей область  $\Omega$ . Мы предполагаем также, что внутренняя часть  $\Omega_i: |\mathbf{x}| < a$  и внешняя часть  $\Omega_e: |\mathbf{x}| > b$  области  $\Omega$  заполнены одной и той же однородной средой с постоянной электропроводностью  $\sigma_b > 0$  (см. Рис. 1).

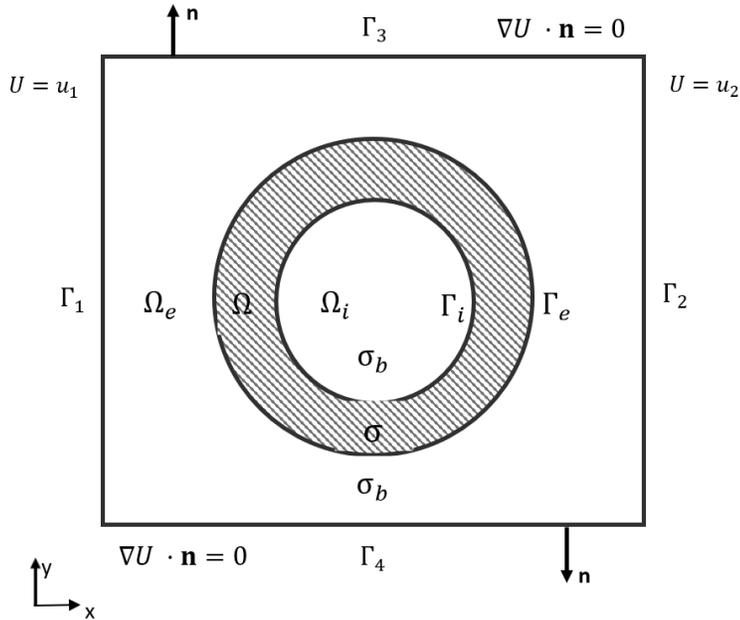


Рис. 1. Геометрия основной области задачи при наличии маскировочной оболочки.

В этом случае прямая задача электропроводности состоит в нахождении тройки  $U = (u_i, u, u_e)$  функций, а именно  $u_i$  в  $\Omega_i$ ,  $u$  в  $\Omega$  и  $u_e$  в  $\Omega_e$  — которые удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_b \Delta u_i = 0 \text{ in } \Omega_i, \quad \sigma_b \Delta u_e = 0 \text{ in } \Omega_e, \quad \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1)$$

подчиняются граничным условиям на границе  $\partial D$  области  $D$

$$u_e|_{x=-x_0} = u_1, \quad u_e|_{x=x_0} = u_2, \quad \partial u_e / \partial y|_{y=\pm y_0} = 0$$

и удовлетворяют условиям сопряжения на внутренней  $\Gamma_i$  и внешней  $\Gamma_e$  компонентах границы  $\Gamma$  оболочки  $\Omega$ , имеющим вид

$$u_i = u, \quad \sigma_b \frac{\partial u_i}{\partial n} = (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_i, \quad u_e = u, \quad \sigma_b \frac{\partial u_e}{\partial n} = (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_e. \quad (2)$$

Нашей целью является решение обратных задач для модели (1)–(2), связанных с проектированием маскирующих оболочек. В общем случае обратная задача маскировки состоит в нахождении проводимости  $\sigma$  среды, заполняющей  $\Omega$ , из двух независимых условий:

$$\nabla U = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad U = U^e \text{ в } \Omega_e. \quad (3)$$

Здесь  $U = (u_i, u, u_e)$  — решение задачи (1)–(2), а  $U^e$  — заданное поле.

Ниже мы рассмотрим важный частный случай, когда оболочка  $(\Omega, \sigma)$  состоит из  $M$  концентрических кольцевых слоев  $\Omega_j = \{r_{j-1} < r = |\mathbf{x}| < r_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , где  $r_0 = a$ ,  $r_M = b$ . Каждый из этих слоев заполнен однородной изотропной средой, описываемой постоянной проводимостью  $\sigma_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Проводимость  $\sigma$  в этом случае есть скалярная кусочно-постоянная функция, принимающая значение  $\sigma_j$  в интервале  $(r_{j-1}, r_j)$ . В результате обратная задача сводится к нахождению неизвестных проводимостей  $\sigma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , образующих  $M$ -мерный вектор проводимостей  $\mathbf{s} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$  из условий маскировки (3).

## 2. Постановка обратной задачи

Для нахождения вектора  $\mathbf{s} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$ , который принадлежит ограниченному множеству

$$S = \{\mathbf{s} : 0 < \sigma_{min} \leq \sigma_j \leq \sigma_{max}, j = 1, 2, \dots, M\},$$

называемому множеством управлений, мы применим оптимизационный метод. В результате обратная задача сводится к решению многопараметрической экстремальной задачи. В качестве искомого управлений выбираются неизвестные параметры среды  $\sigma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , которые изменяются в интервале  $[\sigma_{min}, \sigma_{max}]$ .

В качестве минимизируемого функционала качества выбирается неотрицательный квадратичный функционал  $J$ , который связан обратной зависимостью с маскировочной эффективностью оболочки  $(\Omega, \sigma)$ , отвечающей оптимальному решению. Определим три функционала:

$$J_i(\mathbf{s}) = \frac{\|\nabla U[\mathbf{s}]\|_{L^2(\Omega_i)}}{\|\nabla U^e\|_{L^2(\Omega_i)}}, \quad J_e(\mathbf{s}) = \frac{\|U[\mathbf{s}] - U^e\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|U^e\|_{L^2(\Omega_e)}}, \quad J(\mathbf{s}) = J_e(\mathbf{s}) + J_i(\mathbf{s})$$

и сформулируем следующую задачу управления:

$$J(\mathbf{s}) = J_e(\mathbf{s}) + J_i(\mathbf{s}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{s} \in S. \quad (4)$$

Для решения задачи (4) мы применим метод роя частиц (см. [8]) по схеме, предложенной в [3].

### 3. Результаты вычислительных экспериментов

Численные эксперименты были выполнены для стандартных значений параметров  $N=25$  (количество частиц роя),  $L=50$  (максимальное число итераций),  $\omega=0.4$ ,  $c_1=1$ ,  $c_2=1.5$ , входящих в метод роя частиц, и следующих данных:

$$a = 1\text{м}, \quad b = 2\text{м}, \quad x_0 = y_0 = 3\text{м}, \quad u_1 = 100\text{в}, \quad u_2 = 0\text{в}, \quad \sigma_0 = 1\text{См/м}.$$

Здесь См — сокращенное обозначение величины сименс, являющейся единицей электропроводности в СИ.

Сначала мы исследуем маскировочную эффективность многослойной оболочки, спроектированной при помощи так называемого чередующегося дизайна, т. е. состоящей из чередующихся слоев двух природных материалов. Для определенности в качестве двух тестовых материалов мы выбираем углерод и медь. В этом случае проводимости  $\sigma_j$  определяются соотношениями

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \dots = \sigma_{M-1} = 1 \cdot 10^4 \sigma_0, \quad \sigma_2 = \dots = \sigma_M = 5.9 \dots 10^7 \sigma_0.$$

Мы предполагаем, что  $\sigma_b = 1.45 \cdot 10^6 \sigma_0$  (нержавеющая сталь). Так как все параметры заданы, нам остается только определить маскировочную эффективность оболочки  $(\Omega, \mathbf{s}^{alt})$ , где  $\mathbf{s}^{alt} = (\sigma_{min}, \sigma_{max}, \dots, \sigma_{min}, \sigma_{max})$ , путем вычисления значений  $J(\mathbf{s}^{alt})$ ,  $J_i(\mathbf{s}^{alt})$ ,  $J_e(\mathbf{s}^{alt})$ . Эти значения вместе со значением  $\sigma_M/\sigma_0 = 5.9 \cdot 10^7$  представлены в табл. 1 для четырех различных оболочек, отвечающих случаям  $M=2, 6, 10$  и 12. В частности, из данных табл. 1 следует, что  $J(\mathbf{s}^{alt})$  принимает значение  $4.43 \cdot 10^{-2}$  при  $M=12$ . Эти результаты демонстрируют относительно низкую маскировочную эффективность оболочки  $(\Omega, \mathbf{s}^{alt})$ , полученной на основе чередующегося дизайна.

Таблица 1. Численные результаты для неоптимизированных многослойных оболочек ( $\sigma_{min} = 1 \cdot 10^4 \sigma_0$ ,  $\sigma_{max} = 5.9 \cdot 10^7 \sigma_0$ ).

$M$	$\sigma_M^{opt}/\sigma_0$	$J(\mathbf{s}^{alt})$	$J_i(\mathbf{s}^{alt})$	$J_e(\mathbf{s}^{alt})$
2	$5.9 \cdot 10^7$	$1.61 \times 10^{-1}$	$7.15 \times 10^{-3}$	$1.54 \times 10^{-1}$
6	$5.9 \cdot 10^7$	$9.14 \times 10^{-2}$	$7.92 \times 10^{-6}$	$9.14 \times 10^{-2}$
10	$5.9 \cdot 10^7$	$5.63 \times 10^{-2}$	$1.40 \times 10^{-7}$	$5.63 \times 10^{-2}$
12	$5.9 \cdot 10^7$	$4.43 \times 10^{-2}$	$3.28 \times 10^{-8}$	$4.43 \times 10^{-2}$

Для того чтобы спроектировать оболочку с более высокой маскировочной эффективностью, мы применим оптимизационный метод. В соответствии с названным методом мы решаем задачу (4) для тех же самых значений  $\sigma_{min} = 1 \cdot 10^4 \sigma_0$  и  $\sigma_{max} = 5.9 \cdot 10^7 \sigma_0$ , соответствующих углероду и меди. Используя PSO, мы получаем оптимальное решение  $\mathbf{s}^{opt} = (\sigma_1^{opt}, \sigma_2^{opt}, \dots, \sigma_M^{opt})$ , обладающее следующим важным свойством: все параметры  $\sigma_j^{opt}$  с нечетными индексами  $1, 3, \dots, M-1$  совпадают с  $\sigma_{min}$ , тогда как оптимальные параметры  $\sigma_2^{opt}, \sigma_4^{opt}, \dots, \sigma_{M-2}^{opt}$  с четными индексами совпадают с  $\sigma_{max}$ . Что касается параметра  $\sigma_M^{opt}$ , то оно принимает разные значения при разных  $M$ , изменяясь от  $5.9 \cdot 10^7 \sigma_0$  при  $M=2$  до  $2.92 \cdot 10^7 \sigma_0$  при  $M=12$ .

Оптимальные значения  $\sigma_M^{opt}$ ,  $J(\mathbf{s}^{opt})$ ,  $J_i(\mathbf{s}^{opt})$  и  $J_e(\mathbf{s}^{opt})$  представлены для четырех разных случаев  $M=2, 6, 10$  и 12 в табл. 2.

Таблица 2. Численные результаты для оптимизированных оболочек

$$(\sigma_{min} = 1 \cdot 10^4 \sigma_0, \sigma_{max} = 5.9 \cdot 10^7 \sigma_0).$$

$M$	$\sigma_M^{opt}/\sigma_0$	$J(\mathbf{s}^{alt})$	$J_i(\mathbf{s}^{alt})$	$J_e(\mathbf{s}^{alt})$
2	$5.9 \cdot 10^7$	$1.61 \times 10^{-1}$	$7.15 \times 10^{-3}$	$1.54 \times 10^{-1}$
6	$1.55 \cdot 10^7$	$2.11 \times 10^{-5}$	$1.46 \times 10^{-5}$	$6.52 \times 10^{-6}$
10	$2.11 \cdot 10^7$	$1.20 \times 10^{-5}$	$2.34 \times 10^{-8}$	$1.30 \times 10^{-5}$
12	$2.92 \cdot 10^7$	$7.47 \times 10^{-6}$	$4.21 \times 10^{-8}$	$7.43 \times 10^{-6}$

Последний тест относится к случаю, когда роль управлений играет, наряду с проводимостью последнего слоя, толщина  $h$  последнего слоя. В пр тесте значение  $h$ , как и значение  $\sigma_M$  проводимости последнего слоя, ищется с помощью оптимизационного метода, основанного на методе роя частиц, т.е. решается двухпараметрическая задача. Причем значения параметра  $h$  изменяются на отрезке  $[h_{min}, h_{max}]$ , где  $h_{min} = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $h_{max} = 5 \cdot 10^{-1}$ . Толщины остальных слоев в этом случае считаются одинаковыми и равными  $(b-a-h)/(M-1)$ , а параметры  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{M-1}$  выбираются в соответствии с правилом чередующегося дизайна.

Таблица 3. Численные результаты для оптимизированных многослойных оболочек (управление толщиной последнего слоя и его проводимостью при чередующемся

$$\text{дизайне остальных слоев } \sigma_{min} = 1 \cdot 10^4 \sigma_0,$$

$$\sigma_{min} = 5.9 \cdot 10^7 \sigma_0, h_{min} = 5 \cdot 10^{-2}, h_{max} = 5 \cdot 10^{-1}).$$

$M$	$\sigma_M^{opt}/\sigma_0$	$h$	$J(\mathbf{s}^{alt})$	$J_i(\mathbf{s}^{alt})$	$J_e(\mathbf{s}^{alt})$
2	$2.83 \cdot 10^7$	$9.89 \times 10^{-2}$	$1.98 \times 10^{-2}$	$1.98 \times 10^{-2}$	$7.48 \times 10^{-6}$
6	$2.67 \cdot 10^7$	$9.87 \times 10^{-2}$	$1.85 \times 10^{-5}$	$1.11 \times 10^{-5}$	$7.47 \times 10^{-6}$
10	$1.14 \cdot 10^7$	$2.09 \times 10^{-1}$	$6.76 \times 10^{-6}$	$4.29 \times 10^{-7}$	$6.36 \times 10^{-6}$
12	$1.12 \cdot 10^7$	$2.11 \times 10^{-1}$	$6.42 \times 10^{-6}$	$1.23 \times 10^{-7}$	$6.30 \times 10^{-6}$

#### 4. Выводы и заключение

Подчеркнем, что спроектированная маскировочная оболочка  $(\Omega, \mathbf{s}^{opt})$  из табл 2 отличается от оболочки  $(\Omega, \mathbf{s}^{alt})$  из табл 1, спроектированной по принципу чередующегося дизайна, только значением проводимости последнего слоя  $\sigma_M$ . В то же время оптимальное значение  $J(\mathbf{s}^{opt})$  функционала  $J$ , отвечающее оболочке  $(\Omega, \mathbf{s}^{opt})$ , на несколько порядков меньше значения  $J(\mathbf{s}^{alt})$ , соответствующего оболочке  $(\Omega, \mathbf{s}^{alt})$ . С одной стороны, это говорит об очень сильном влиянии проводимости последнего слоя  $\sigma_M$  на маскировочную эффективность оболочки  $(\Omega, \mathbf{s}^{opt})$ . С другой стороны, это означает, что нет необходимости решать численно общую  $M$ -мерную экстремальную задачу относительно проводимостей  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$  для того, чтобы найти требуемое оптимальное решение. Вместо этого достаточно решить однопараметрическую задачу управления относительно последнего параметра  $\sigma_M$ . Как показали расчеты, применение для этой цели PSO алгоритма приводит к значениям  $\sigma_M$ , представленным в табл. 2.

Более того, применение предложенного в этой работе нового подхода, основанного на отыскании как толщины  $h$  последнего слоя, так и его проводимости  $\sigma_M$ , дает еще меньшее значение  $J(\mathbf{s}^{opt})$  функционала  $J$ , которому отвечает еще большее значение эффективности маскировочной оболочки  $(\Omega, \mathbf{s}^{opt})$  (см. табл. 3).

Предложенный подход дизайнера высокоэффективных и легко реализуемых маскировочных оболочек можно распространить на случай трех измерений, а также на задачи проектирования концентраторов и других функциональных устройств, служащих для управления электрическими полями.

## Список литературы

- [1] Pendry J., Shurig D., Smith D. R., “Controlling electromagnetic field”, *Science*, **312**, (2006).
- [2] Alu A., Engheta N., “Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings”, *Phys. Rev. E.*, **72**:016623, (2005).
- [3] Alekseev G. V., Lobanov A. V., “Optimization analysis of electrostatic cloaking problems”, *Appl. Ind. Math.*, **14**, (2020).
- [4] Alekseev G. V., Spivak Y. E., “Optimization-based numerical analysis of three-dimensional magnetic cloaking problems”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **61**, (2021).
- [5] Alekseev G. V., Tereshko D. A., “Theoretical analysis of cloaking problem for 3D model of heat conduction”, *J. Inv. Ill-Posed Probl*, **27**, (2019).
- [6] Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А., *Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел*, Физматлит, М., 2021.
- [7] Tikhonov A. N., Arsenyev V. Ya., *Solutions of Ill-Posed Problems, 1 st ed.*, 1977.
- [8] Poli R., Kennedy J., “Particle swarm optimization: an overview”, *Swarm Intell*, **1**, (2007).

Поступила в редакцию  
1 августа 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00271.

---

*Bakhtin K. E.*<sup>1,2</sup>, *Savinov P. A.*<sup>2</sup> Optimization method of solving cloaking problem for 2D electrical conductivity model. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2024. V. 24. No 1. P. 3–8.

<sup>1</sup>Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup>Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

## ABSTRACT

The problems of designing multilayer cloaking shells for a 2D model of electrical conductivity are considered. It is assumed that these shells consist of a finite number of annular layers filled with isotropic media. Using the optimization method, the problems under consideration were reduced to extremal problems, their properties are studied. An efficient numerical algorithm based on the particle swarm method (PSO) has developed. The results of the performed computational experiments were discussed.

Key words: *electrical conductivity, optimization method, inverse problems, cloaking, multilayer shell, particle swarm method.*