

УДК 517.95

MSC2020 35Q93 + 78A46

© Ю. Э. Спивак^{1,2}

Численная оптимизация в задачах проектирования многослойных магнитных маскировочных оболочек

Решается многопараметрическая оптимизационная задача магнитной маскировки для двумерной модели магнитостатики. Указанная задача возникает при проектировании цилиндрических многослойных маскировочных устройств, заполненных анизотропными или изотропными магнитными средами с тензорными, в общем случае, магнитными проницаемостями. С помощью оптимизационного метода решения обратных задач рассматриваемая задача магнитной маскировки сводится к конечномерной экстремальной задаче. Результаты применения разработанного численного алгоритма, основанного на методе роя частиц для решения экстремальной задачи, подтверждают его высокую эффективность и позволяют установить важное свойство релейности, которым обладают полученные оптимальные решения.

Ключевые слова: *модель магнитостатики, магнитная маскировка, экстремальная задача, метод роя частиц, принцип релейности.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202323>

Введение

Последнее десятилетие в области невидимости и маскировки можно наблюдать активный переход исследователей к разработке и анализу оптимизационных методов решения обратных задач (к классу которых и относятся задачи маскировки) [1, 2] вместо методов прямого дизайна, например, “transformation thermodynamics” для статической маскировки [3, 4]. Указанный переход обусловлен тем, что устройства, спроектированные методами прямого дизайна, обладают существенными недостатками, в частности, невозможностью практической реализации. Для преодоления этого недостатка исследователи обратились к оптимизационным методам [5, 6], которые продемонстрировали высокую эффективность при теоретическом и численном решении задач маскировки [7–9].

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 680041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

² Дальневосточный федеральный университет, 680922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: uliyaspivak@gmail.com (Ю. Э. Спивак)

В настоящей работе описывается технология эффективного численного решения обратных задач дизайна многослойных маскировочных устройств для двумерной модели магнитостатики. Указанная технология с помощью оптимизационного метода решения обратных задач и метода роя частиц позволяет установить важное свойство оптимальных решений, которое при надлежащем выборе множества управлений дает возможность проектировать высокоэффективные маскировочные оболочки, обладающие простотой технической реализации.

1. Постановка задачи сопряжения

Начнем с постановки магнитостатической задачи сопряжения, рассматриваемой во всей плоскости \mathbb{R}^2 , заполненной однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$. В плоскость \mathbb{R}^2 вносится магнитная оболочка $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, состоящая из конечного числа колец $\Omega_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m\}$, $m = \overline{1, M}$, одинаковой ширины $d = (b - a)/M$, где $R_0 = a$, $R_M = b$ — положительные константы. Предполагается, что каждый из этих слоев заполнен однородной анизотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью в виде тензора $\boldsymbol{\mu}_m = \text{diag}(\mu_{rm}, \mu_{\varphi m})$, $\mu_{rm}, \mu_{\varphi m} = \text{const} > 0$, $m = \overline{1, M}$. Определяются внутренность $\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\}$ и внешность $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$ области Ω , заполненные одной и той же однородной изотропной средой с магнитной проницаемостью μ_0 .

Предполагается, что вне некоторого круга $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$ радиусом R , содержащего внутри себя Ω_0 и Ω_m , сосредоточены источники, создающие внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, отвечающее потенциалу Φ_a . Наличие оболочек Ω_m в поле \mathbf{H}_a приводит к появлению дополнительного поля Φ_s в Ω_e^∞ , а также полей Φ_m , являющихся сужениями $\Phi|_{\Omega_m}$ полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ на под-области Ω_m , $m = \overline{0, M}$ и $\Phi_{M+1} = \Phi|_{\Omega_{M+1}}$, где $\Omega_{M+1} = \Omega_e^\infty \cap B_R$. Тогда прямая задача нахождения полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ сводится к нахождению $M+2$ полей Φ_m в Ω_m , $m = \overline{0, M}$, и Φ_s в Ω_e^∞ , путем решения следующей задачи магнитного сопряжения:

$$\Delta\Phi_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \nabla \cdot (\boldsymbol{\mu}_m \nabla\Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad \Delta\Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty. \quad (1)$$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_0 \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} = \mu_{r1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r},$$

$$\mu_{rm} \frac{\partial\Phi_m}{\partial r} = \mu_{r(m+1)} \frac{\partial\Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad \mu_{rM} \frac{\partial\Phi_M}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial\Phi_{M+1}}{\partial r}. \quad (2)$$

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad \Phi_{M+1}(\mathbf{x}) \rightarrow \Phi_a(\mathbf{x}) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В предположении, что внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$ является постоянным и описывается потенциалом $\Phi_a(\mathbf{x}) = -H_a(r/b) \cos\varphi$, где $H_a = \text{const}$, решение задачи (1)–(3) существует и его можно выписать, воспользовавшись методом Фурье, в виде следующих формул:

$$\Phi_0(r, \varphi) = A_0(r/b) \cos\varphi \text{ в } \Omega_0, \quad (4)$$

$$\Phi_m(r, \varphi) = (A_m(r/b)^{\gamma_m} + B_m(b/r)^{\gamma_m}) \cos\varphi \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad (5)$$

$$\Phi_{M+1}(r, \varphi) = (-H_a(r/b) + B_{M+1}(b/r)) \cos\varphi \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (6)$$

Приведенные выше формулы содержат неопределенные коэффициенты (произвольные константы) $A_0, A_m, B_m, B_{M+1}, m = \overline{1, M}$. Для их нахождения достаточно подставить поля (4)–(6) в граничные условия (2) и решить полученную систему из $2M+2$ линейных алгебраических уравнений, например, методом Гаусса, относительно $2M+2$ неизвестных коэффициентов $A_0, A_m, B_m, B_{M+1}, m = \overline{1, M}$.

В формулах (4)–(6) через γ_m обозначен коэффициент (степень) анизотропии среды в области Ω_m , определяемый формулой $\gamma_m = \sqrt{\mu_{\varphi m}/\mu_{r m}}, m = \overline{1, M}$. В частном случае полностью изотропной слоистой маскировочной оболочки данный коэффициент принимает вид $\gamma_m = \sqrt{\mu_{r m}/\mu_{r m}} = 1, m = \overline{1, M}$.

2. Оптимизационный метод и метод роя частиц

Для численного решения рассматриваемых задач магнитостатики разрабатывается численный оптимизационный алгоритм, основанный на методе роя частиц. Сначала вводится множество управлений (или, по-другому, пространство поиска решений, по которому частицы роя будут перемещаться в процессе поиска решения)

$$K = \{ \mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\varphi1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M}) \in \mathbb{R}^{2M} : 0 < \mu_{min} \leq (\mu_{r m}, \mu_{\varphi m}) \leq \mu_{max} \}. \quad (7)$$

Здесь заданные положительные константы μ_{min} и μ_{max} определяют нижнюю и верхнюю границы множества K .

Далее, согласно оптимизационному методу решения обратных задач [5], определяется целевая функция, которую требуется минимизировать:

$$J(\mathbf{m}) = 0.5 \frac{\|\nabla \Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|\nabla \Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}} + 0.5 \frac{\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}},$$

и формулируется экстремальная задача полной маскировки

$$J(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K. \quad (8)$$

Отметим, что выбранная целевая функция описывает среднеквадратичную ошибку выполнения следующих двух условий полной маскировки [6, с. 113]: $\nabla \Phi_0[\mathbf{m}] = 0$ в Ω_0 и $\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] = \Phi_a|_{\Omega_{M+1}}$ в $\Omega_{M+1} \equiv \Omega_e^\infty \cap B_R$.

Для решения поставленной экстремальной задачи мы применяем метод глобальной стохастической оптимизации — метод роя частиц (МРЧ) [10]. В стандартном МРЧ частицы взаимодействуют и перемещаются в пространстве поиска решений. Для частицы с точкой положения \mathbf{m}_j и скоростью \mathbf{v}_j обновление ее скорости на новом временном шаге происходит в два этапа по следующим двум формулам:

$$\mathbf{v}_j^{i+1} = w \mathbf{v}_j^i + c_1 d_1 (\mathbf{p}_j^i - \mathbf{m}_j^i) + c_2 d_2 (\mathbf{p}_g - \mathbf{m}_j^i), \quad \mathbf{m}_j^{i+1} = \mathbf{m}_j^i + \mathbf{v}_j^{i+1}. \quad (9)$$

Подбор (метаоптимизация) параметров МРЧ w, c_1, c_2, d_1, d_2 представляет собой отдельную актуальную ветвь исследований [11]. В данной работе используются так называемые “универсальные значения” этих параметров [12]: $w = 0.729, c_1 = 1.49445, c_2 = 1.49445, d_1, d_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Такой выбор значений параметров МРЧ обоснован тем, что именно эти значения были рекомендованы авторами для использования в МРЧ в ряде научных статей и, в частности, в [11, 12], связанных с проверкой широкого диапазона значений параметров МРЧ на наборе тестовых задач, и показали высокую эффективность при решении ряда задач поиска минимума.

3. Результаты

Обсудим здесь результаты численного решения экстремальной задачи (8) с использованием разработанного оптимизационного алгоритма на основе МРЧ для следующих исходных данных: $a=0.05$ м, $b=0.06$ м, $\mu_0=1$, $R=1$ м и двух пар значений $(0.02; 50)$ и $(0.01; 100)$, определяющих границы μ_{min} и μ_{max} множества управлений K в (7). Ширина слоев $d=(b-a)/M$, размер роя частиц $N=25$, количество итераций $L=100$, магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, где $\Phi_a(r, \varphi) = -H_a(r/b)\cos\varphi$, $H_a = |\mathbf{H}_a| = 1$ А/м.

Первый вычислительный тест связан с решением (8) для полностью анизотропной оболочки (Ω, \mathbf{m}) для пары $\mu_{min}=0.02$ и $\mu_{max}=50$. В табл. 1 приведены найденные с помощью разработанного алгоритма оптимальные значения $\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt}$ магнитных проницаемостей. Они удовлетворяют соотношениям $\mu_{rM}^{opt} = \mu_{min}$, $\mu_{\varphi M}^{opt} = \mu_{max}$ при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с $\mu_r^{opt} = \mu_{min}$, $\mu_\varphi^{opt} = \mu_{max}$. При этом выполняется соотношение $J(\mathbf{m}^{opt}) = 6.59 \cdot 10^{-5}$, соответствующее достаточно высокой маскировочной эффективности спроектированной анизотропной оболочки (см. рис. 1а). Но реализация такого устройства связана с техническими трудностями в силу высокой анизотропии ($\gamma_m = 50$) среды в оболочке Ω . Поэтому в настоящей работе предлагается заменить анизотропные магнитные среды в слоях оболочки на изотропные — легко доступные инженерные или природные среды с постоянной магнитной проницаемостью.

Для второго вычислительного теста в системе (4)–(6) положим $\gamma_m=1$ ввиду изотропности каждого слоя и далее решим задачу (8), как в предыдущем тесте, для пары значений $\mu_{min}=0.01$, $\mu_{max}=100$. Здесь $\mu=0.01$ отвечает относительной магнитной проницаемости инженерного сверхпроводника [13], а $\mu=100$ отвечает относительной магнитной проницаемости углеродистой стали. Применение разработанного алгоритма приводит к результатам, приведенным в табл. 2 в виде оптимальных значений магнитных проницаемостей $\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt}, \mu_{M-1}^{opt}, \mu_M^{opt}$ и соответствующего им минимального значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ целевой функции J для четных $M = \overline{2, 16}$. Из данных табл. 2 следует, что для оптимального решения \mathbf{m}^{opt} задачи маскировки (8) значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ уменьшается от $2.08 \cdot 10^{-2}$ при $M=2$ до значения $8.44 \cdot 10^{-5}$ при $M=16$, которое соответствует высокой маскировочной эффективности магнитной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$ (см. рис. 1б). Основной результат второго теста состоит в том, что для оптимальных решений 2D задачи маскировки (как и 2D задачи экранирования [8]), справедлив принцип релейности для пары μ_{min}, μ_{max} , являющейся границами множества K (см. рис. 1в). Однако в отличие от задачи экранирования, принцип релейности для задачи маскировки справедлив для всех управлений, кроме

Таблица 1. Численная оптимизация слоистой анизотропной маскировочной оболочки при $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.02, 50)$, контрасте $\mu_{max}/\mu_{min} = 2500$ и $\gamma_m = 50$, $m = \overline{1, M}$.

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\varphi2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphiM}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
$\overline{1, 16}$	$(0.02, 50)$	$(0.02, 50)$...	$(0.02, 50)$	$6.59 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2. Численная оптимизация слоистой изотропной маскировочной оболочки при $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.01, 100)$ и контрасте $\mu_{max}/\mu_{min} = 10000$.

M	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	...	μ_{M-1}^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.01	100				$2.08 \cdot 10^{-2}$
4	0.01	100	...	0.01	18.4655	$4.54 \cdot 10^{-3}$
8	0.01	100	...	0.01	28.8004	$5.13 \cdot 10^{-4}$
12	0.01	100	...	0.01	34.5017	$2.17 \cdot 10^{-4}$
16	0.01	100	...	0.01	37.9227	$8.44 \cdot 10^{-5}$

последнего μ_M^{opt} , которое принимает любое значение из интервала $[\mu_{min}, \mu_{max}]$. Использование такой схемы позволяет упростить численное решение экстремальных задач маскировки в случае изотропных многослойных оболочек, поскольку появляется возможность заменить многопараметрический оптимальный поиск поиском последнего параметра, а остальные задавать по принципу релейности (см. табл. 2). Более того, все оптимальные проницаемости, приведенные в табл. 2, кроме μ_M^{opt} , соответствуют только двум легкодоступным изотропным магнитным материалам с постоянной магнитной проницаемостью. Поэтому спроектированное маскировочное устройство в виде цилиндрической оболочки технически легко реализуемо.

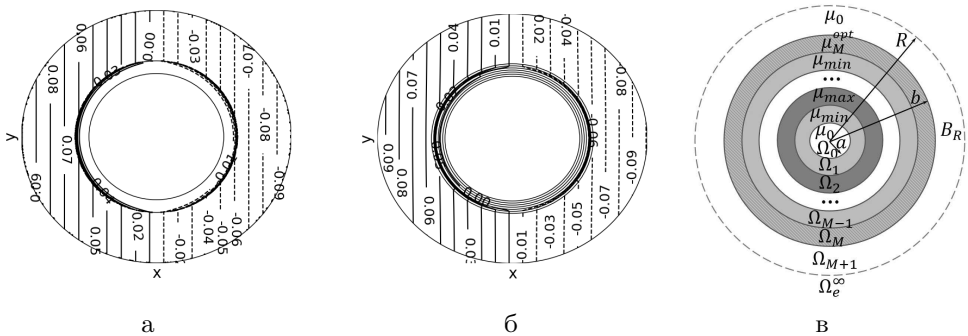


Рис. 1. Линии уровня магнитного потенциала $\Phi(x, y)$ для оптимизированной а) однослойной анизотропной оболочки при $(\mu_r^{opt}, \mu_\phi^{opt}) = (0.02, 50)$; б) шестислойной изотропной оболочки при $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) = (0.01, 100, 0.01, 100, 0.01, 24.4324)$. в) Принцип релейности оптимального решения в M -слойной изотропной оболочке.

Список литературы

- [1] A. Michaloglou, N.L. Tsitsas, “Feasible optimal solutions of electromagnetic cloaking problems by chaotic accelerated particle swarm optimization”, *Mathematics*, **9**, (2021), 2725:1–23.
- [2] Z. Yang, X. Huang, “An acoustic cloaking design based on topology optimization”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **152**, (2022), 3510–3521.

- [3] S. Guenneau, C. Amra, D. Veynante, “Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux”, *Opt. Express.*, **20**, (2012), 8207–8218.
- [4] B. Wood, J. B. Pendry, “Metamaterials at zero frequency”, *J. Phys.: Condens. Matter.*, **19**, (2007), 076208:1–9.
- [5] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.
- [6] Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко, *Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2021.
- [7] G. V. Alekseev, D. A. Tereshko, Y. V. Shestopalov, “Optimization approach for axisymmetric electric field cloaking and shielding”, *Inv. Prob. Sci. Eng.*, **29**, (2021), 40–55.
- [8] Y. E. Spivak, “Computer design of cylindrical cloaking shell for the magnetostatics model”, *Far Eastern Mathematical Journal*, **22:2**, (2022), 237–243.
- [9] G. V. Alekseev, A. V. Lobanov, “Optimization method for solving cloaking and shielding problems for a 3D model of electrostatics”, *Mathematics*, **11:6**, (2023), 1395:1–17.
- [10] J. Kennedy, R. Eberhart, “Particle Swarm Optimization”, *Proc. IEEE Int. Conf. on N.N.*, **IV**, (1995), 1942–1948.
- [11] Q. Bai, “Analysis of particle swarm optimization algorithm”, *Computer and Information Science*, **3:1**, (2010), 180–184.
- [12] Z. Bai, W. Li, L. Wang, “Emission Optimization Using Particle Swarm Algorithm”, *Proc. IPAC2011*, **1**, (2011), 2271–2273.
- [13] S. M. Anlage, “The physics and applications of superconducting metamaterials”, *J. Opt.*, **13**, (2011), 024001:1–10.

Поступила в редакцию
1 августа 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта
Российского научного фонда N 22-21-00271.

Spivak Yu. E.^{1,2} Numerical optimization in the problems of designing multilayer magnetic cloaking shells. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 264–269.

¹ Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

² Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

A multiparameter optimization problem of magnetic cloaking is solved for a two-dimensional model of magnetostatics. This problem arises when designing cylindrical multilayer cloaking devices filled with anisotropic or isotropic magnetic media with tensor, in the general case, magnetic permeabilities. Applying the optimization method for solving inverse problems the considered problem of magnetic cloaking is reduced to a finite-dimensional extremum problem. The results of applying the developed numerical algorithm based on the particle swarm optimization method to solve the extremum problem confirm its high efficiency and make it possible to establish the important property of the obtained optimal solutions.

Key words: *magnetostatic model, magnetic cloaking, extremum problem, particle swarm optimization, bang-bang principle.*