

УДК 517.95

MSC2020 35K59 + 80A21

© Н. М. Пак^{1,2}, А. Е. Ковтанюк^{1,2}

Итерационный алгоритм решения начально-краевой задачи для квазилинейной модели сложного теплообмена

В работе рассматривается начально-краевая задача для системы квазилинейных уравнений сложного теплообмена, описывающей процесс внутривенной лазерной абляции. Предлагается итерационный алгоритм нахождения решения и доказывается его сходимости. Эффективность вычислительного алгоритма демонстрируется на примере.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения радиационного теплообмена, итерационный алгоритм, нелокальная разрешимость.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202320>

Введение

В ограниченной трехмерной области Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega$ рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую процесс внутривенной лазерной абляции (ВВЛА):

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) - b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad (1)$$

$$- \operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = g, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + \mu(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \quad (3)$$

Здесь θ есть нормализованная температура, φ — нормализованная средняя интенсивность излучения. Положительные параметры b , α , β , γ и μ описывают оптические и термодинамические свойства среды [1]. Величина σ равна произведению плотности на удельную теплоемкость, $k(\theta)$ — коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры, функции f и g описывают мощности источников тепла и излучения, которые в контексте процедуры ВВЛА имеют одинаковую локализацию, совпадающую с движущимся наконечником оптоволоконка. В данной заметке анонсируются результаты теоретического анализа, заключающиеся в разрешимости начально-краевой задачи (1)–(3) и обосновании сходимости итерационного алгоритма ее решения.

¹ Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

² Амурский государственный университет, 675027, г. Благовещенск, Игнатъевское шоссе, 21.
Электронная почта: nipak90@gmail.com (Н. М. Пак), kovtanyuk.ae@dvfu.ru (А. Е. Ковтанюк).

1. Формализация начально-краевой задачи

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial\Omega$; $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Через L^p , $1 \leq p \leq \infty$, обозначаем пространство Лебега, через H^1 — пространство Соболева W_2^1 , а через $L^p(0, T; X)$ — пространство Лебега функций класса L^p , определенных на $(0, T)$, со значениями в банаховом пространстве X .

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $\alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega)$; $b = r\beta$, $r = \text{const} > 0$; $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$, $\sigma \geq \sigma_0$, $\alpha_0, \beta_0, \sigma_0 = \text{const} > 0$.
- (ii) $0 < k_0 \leq k(s) \leq k_1$, $|k'(s)| \leq k_2$, $s \in \mathbb{R}$, $k_j = \text{Const}$.
- (iii) $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$, $0 \leq \theta_{in} \in L^\infty(\Omega)$; $\gamma_0 \leq \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\mu_0 \leq \mu \in L^\infty(\Gamma)$, $\gamma_0, \mu_0 = \text{const} > 0$.
- (iv) $0 \leq f, g \in L^\infty(Q)$.

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. Через V' обозначаем пространство, сопряженное с V . Пространство H отождествляем с пространством H' , так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H , а через (h, v) — значение функционала $h \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $h \in H$. Также будем использовать пространство

$$W = \{y \in L^2(0, T; V) : \sigma y' = \sigma dy/dt \in L^2(0, T, V')\}.$$

Введем обозначение $[s]^q = |s|^q \text{sign} s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Отметим, что функция $[s]^q$ является монотонной.

Определим операторы $A_1 : V \rightarrow V'_0$, $A_2 : V \rightarrow V'$, используя равенства: $\forall \theta, \varphi, v$

$$(A_1(\theta), v) = \left(k(\theta) \nabla \theta, \nabla v \right) + \int_{\Gamma} \mu \theta v \, d\Gamma = (\nabla h(\theta), \nabla v) + \int_{\Gamma} \mu \theta v \, d\Gamma,$$

$$(A_2 \varphi, v) = \left(\alpha \nabla \varphi, \nabla v \right) + \int_{\Gamma} \gamma \varphi v \, d\Gamma.$$

Здесь $h(s) = \int_0^s k(r) dr$. В качестве нормы функции v в пространстве V будем использовать $(A_2 v, v)^{1/2}$.

Определение. Пара $\theta \in W$, $\varphi \in L^2(0, T; V)$ называется решением задачи (1)–(3), если

$$\sigma \theta' + A_1(\theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \text{ п.в. на } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_{in}. \quad (4)$$

$$A_2 \varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g, \text{ п.в. на } (0, T). \quad (5)$$

Здесь

$$f_b, g_b \in L^2(0, T; V'), \quad (f_b, v) = \int_{\Gamma} \mu \theta_b v \, d\Gamma, \quad (g_b, v) = \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 v \, d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Замечание. Следуя [2, Лемма 1], отметим, что поскольку $\theta \in W$, то $\theta \in C([0, T]; H)$, и поэтому начальное условие имеет смысл.

2. Сходимость итерационного алгоритма

Определим операторы $F_1 : L^\infty(\Omega) \rightarrow V$, $F_2 : L^\infty(Q) \times L^2(0, T; V) \rightarrow W$. Полагаем $\varphi = F_1(\theta)$, если

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g. \quad (6)$$

Далее, $\theta = F_2(\zeta, \varphi)$, если

$$\sigma\theta' + A(\zeta, \theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \text{ п.в. на } (0, T), \quad \theta(0) = \theta_{in}. \quad (7)$$

Здесь

$$(A(\zeta, \theta), v) = (k(\zeta)\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \mu\theta v d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Однозначная разрешимость линейной эллиптической задачи (6) и параболической задачи с монотонной нелинейностью (7) хорошо известны.

Пусть $\theta_0 = \theta_{in}$, $\varphi_0 = F_1(\theta_0)$. Определим рекуррентно последовательности $\theta_m \in W$ и $\varphi_m \in L^2(0, T; V)$:

$$\theta_m = F_2(\theta_{m-1}, \varphi_{m-1}), \quad \varphi_m = F_1(\theta_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Отметим, что из определения последовательностей φ_m, θ_m следуют равенства

$$A_2\varphi_m + \beta(\varphi_m - [\theta_m]^4) = g_b + g, \quad (9)$$

$$\sigma\theta'_m + A(\theta_{m-1}, \theta_m) + b([\theta_m]^4 - \varphi_{m-1}) = f_b + f \text{ п.в. на } (0, T), \quad \theta_m(0) = \theta_0. \quad (10)$$

Построенные последовательности ограничены в $L^\infty(Q)$ и в $L^2(0, T; V)$, и последовательность θ_m компактна в $L^2(0, T; H)$. Тогда, переходя при необходимости к подпоследовательностям, можно доказать, что существуют функции $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ такие, что

$$\theta_m \rightarrow \hat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \quad \varphi_m \rightarrow \hat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0, T; V). \quad (11)$$

Результатов сходимости (11) достаточно для предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ в равенствах (9), (10) и доказательства того, что предельные функции $\hat{\theta}, \hat{\varphi} \in L^2(0, T; V)$ таковы, что $\sigma\hat{\theta}' \in L^2(0, T; V')$ и для них выполняются равенства (4), (5). В результате получаем разрешимость задачи (1)–(3).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно решение.

Можно показать, что в классе функций с ограниченным градиентом температуры решение единственно. Это позволяет обосновать сходимость итерационной процедуры.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i)–(iv). Если θ_*, φ_* – решение задачи (1)–(3) такое, что $\theta_*, \nabla\theta_* \in L^\infty(Q)$, то не существует других ограниченных решений этой задачи. Более того, для последовательностей (8) справедливы сходимости

$$\theta_m \rightarrow \theta_* \text{ в } L^2(0, T; V), \quad \varphi_m \rightarrow \varphi_* \text{ в } L^2(0, T; V).$$

3. Итерационная схема и численный эксперимент

Процесс ВВЛА будем рассматривать в области, состоящей из четырех частей, которые интерпретируются как кровь, вена, перивенозная ткань и оптическое волокно. Схематическое представление вычислительной области в цилиндрических координатах в случае радиальной симметрии показано на рис. 1 (линейные размеры в миллиметрах).

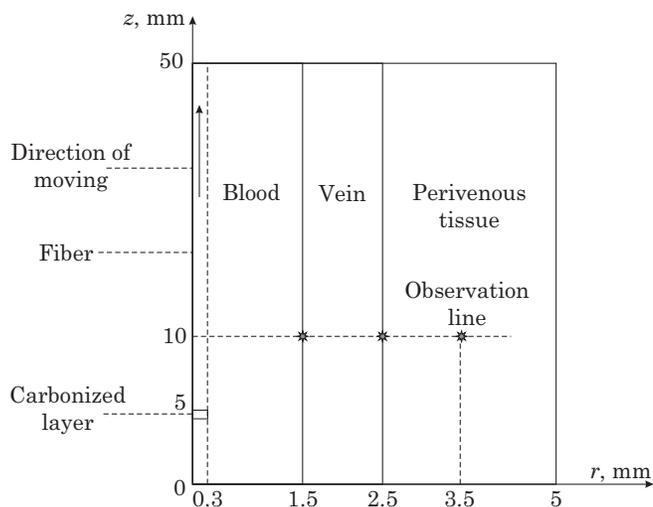


Рис. 1. Вычислительная область.

Для того чтобы найти решение начально-краевой задачи (1)–(3), дискретизируем интервал времени $(0, T)$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Для каждого момента времени $t = t_l = l\Delta t$, $l = 1, 2, \dots, N$, используется итерационная процедура нахождения решения соответствующей краевой задачи такая, что ее n -ый шаг ($n = 1, 2, \dots, M$) имеет вид

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi_n) + \beta(\varphi_n - \theta_{n-1}^3 |\theta_{n-1}|) = g, \quad (12)$$

$$\sigma \partial \theta_n / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta_{n-1}) \nabla \theta_n) - b(\theta_{n-1}^3 |\theta_n| - \varphi_n) = f, \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

$$k(\theta_{n-1}) \partial_n \theta_n + p(\theta_n - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi_n + \gamma(\varphi_n - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (14)$$

где производная по времени в (13) аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} \simeq \frac{\theta_n|_{t=t_l} - \theta_M|_{t=t_{l-1}}}{\Delta t},$$

и функции $\theta_n, \theta_{n-1}, \varphi_n$ в (12)–(14) являются аппроксимациями решения соответствующего момента времени $t = t_l$. Нижний индекс у функций θ_n, θ_{n-1} и φ_n означает номер итерации.

Для инициализации итерационной процедуры мы задаем начальное приближение температуры в каждый момент времени:

$$\theta_0|_{t=t_l} = \theta_M|_{t=t_{l-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad \theta_M|_{t=t_0} = \theta_{in}. \quad (15)$$

В уравнениях (12) и (13), $g = P_\varphi \chi / M_\varphi$, $f = P_\theta \chi / M_\theta$, где P_φ есть мощность источника, идущая на излучение; P_θ — мощность источника, идущая на нагревание наконечника оптоволокну; χ — характеристическая функция части области, где находится наконечник оптоволокну; M_φ и M_θ — нормирующие множители для получения из φ и θ средней интенсивности излучения и абсолютной температуры.

Для нахождения решения на каждом шаге итерационной процедуры (12)–(15) применялся метод конечных элементов, который был реализован с помощью пакета FreeFEM++ (<https://freefem.org/>). Оптические и термофизические параметры сред взяты из [3]. Параметры θ_b и θ_{in} соответствуют температуре 37°C , коэффициент γ взят равным 1, начальное расположение наконечника оптоволокну $(r, z) = (0, 5)$, скорость его вытягивания равна 2 мм/с. Следуя [3], будем моделировать перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на наконечнике оптоволокну, следующим образом: если температура в некоторой точке подобласти, заполненной кровью, достигает 95°C и выше, коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Эффективность процедуры лазерной абляции может оцениваться по поведению температурных профилей в различных точках области. Выбор оптимальных параметров излучения заключается в том, чтобы обеспечить внутри вены температуру, достаточную для облитерации, в то же время в окружающей ткани должен сохраняться достаточно безопасный уровень температуры. На рис. 2 демонстрируется поведение температурных профилей в точках (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10). Соотношение P_φ/P_θ взято равным 7/3, скорость вытягивания оптоволокну равна 2 мм/с, мощность излучения равна 11 Вт, длина волны — 1064 нм.

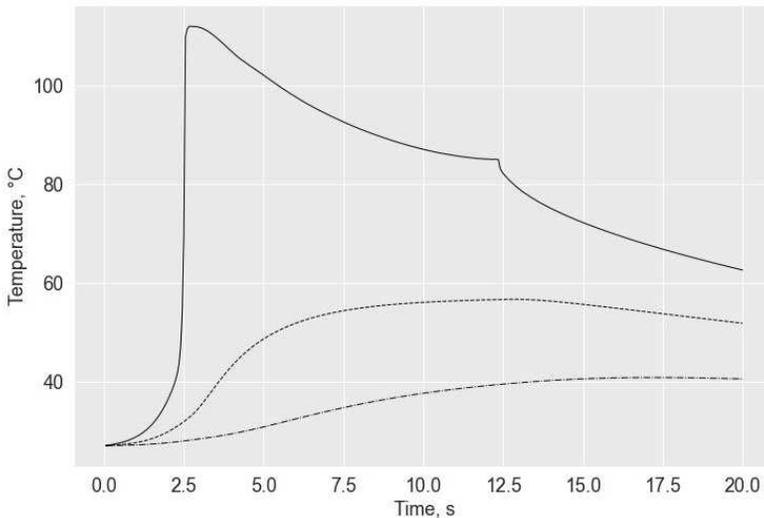


Рис. 2. Температурные профили в точках (1.5, 10) (сплошная), (2.5, 10) (штриховая) and (3.5, 10) (штрих-пунктирная). Длина волны 1064 нм, $(P_\varphi, P_\theta) = (7.7 \text{ Вт}, 3.3 \text{ Вт})$.

Поведение температурных профилей демонстрирует относительно безопасный температурный уровень в перивенозной ткани. С другой стороны, внутри вены уровень температуры является достаточным для ее облитерации (см. результаты моделирования в [3]).

Приведенный эксперимент демонстрирует эффективность предложенного алгоритма при выборе параметров излучения, обеспечивающих успешное выполнение процедуры ВВЛА.

Список литературы

- [1] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions”, *Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat.*, **57** (2018), 290–298.
- [2] A. Yu. Chebotarev, “Inhomogeneous problem for quasi-stationary equations of complex heat transfer with reflection and refraction conditions”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **63** (2023), 441–449.
- [3] A. A. Poluektova, W. S. J. Malskat, M. J. C. van Gemert, M. E. Vuylsteke, C. M. A. Bruijninx, H. A. M. Neumann, C. W. M. van der Geld, “Some controversies in endovenous laser ablation of varicose veins addressed by optical-thermal mathematical modeling”, *Lasers Med. Sci.*, **29** (2014), 441–452.

Поступила в редакцию
21 февраля 2023 г.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 122082400001-8 и соглашение № 075-02-2023-946).

Park N. M.^{1,2}, *Kovtanyuk A. E.*^{1,2} An iterative algorithm for solving an initial-boundary value problem for a quasi-linear model of complex heat transfer. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 240–245.

¹ Far Eastern Federal University, Far Eastern Center for Research and Education in Mathematics, Vladivostok, Russia

² Amur State University, Blagoveshchensk, Russia

ABSTRACT

An initial-boundary value problem for a system of quasilinear equations of radiative-conductive heat transfer, simulating the process of endovenous laser ablation, is considered. An algorithm for finding its solution is proposed and its convergence is proved. The efficiency of the algorithm is illustrated by numerical experiments.

Key words: *endovenous laser ablation, radiative-conductive heat transfer, iterative algorithm, nonlocal solvability.*