

УДК 517.933,517.938
MSC2020 39A21,39A27

© А. И. Гудименко¹, А. В. Лихошерстов²

Задача о колебаниях гармонической цепи демпфирующей и антидемпфирующей границами

Рассматривается задача о колебаниях конечной однородной цепи связанных гармонических осцилляторов при специальных граничных условиях, обеспечивающих устойчивый переток энергии от одного конца цепи к другому. Задача охватывает в качестве частных случаев классическую задачу о колебаниях цепи со свободным и закрепленным концами, а также задачу о колебаниях цепи с поглощающей и антипоглощающей границами. Поглощающие граничные условия используются при численном моделировании распространения волн для минимизации влияния нефизических границ.

Получено точное аналитическое решение рассматриваемой задачи. Проведено ее исследование как динамической системы. В частности, дано описание инвариантных подпространств системы в исходных переменных. Исследованы колебательные свойства системы. Обнаружено и изучено явление значительного увеличения амплитуды низкочастотных колебаний при наличии в пространственных частотах изменения начальных данных максимальной частоты.

Задача решается в переменных Шредингера. Решение представлено как в терминах бесконечных рядов бесселевых функций, так и в терминах конечных рядов элементарных функций, то есть посредством собственных колебаний системы.

Ключевые слова: *цепь гармонических осцилляторов, точно решаемая динамика, переменные Шредингера, тепловой поток.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202314>

Введение

Цепь связанных гармонических осцилляторов, или — кратко — гармоническая цепь, является традиционной моделью одномерной упругой среды. Эта модель ши-

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

² Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10. Электронная почта: gudimenko@iam.dvo.ru (А. И. Гудименко), likhoshertov.02@mail.ru (А. В. Лихошерстов).

роко используется для изучения механических, тепловых и волновых свойств вещества. Она привлекает своей наглядностью и возможностью в ряде случаев получить точные аналитические решения рассматриваемых задач. Исторический обзор использования этой модели можно найти в [1]. Здесь же отметим, что с ней ассоциируются имена Ньютона, Бернулли, Лагранжа, Коши, Гамильтона, Эйнштейна, Дебая, Шредингера и многих других выдающихся ученых. В текущее время интерес к этой модели связан в основном с проблемой аналитического обоснования закона теплопроводности Фурье [2–5].

В настоящей статье рассматривается задача о колебаниях однородной гармонической цепи, когда на концах цепи заданы особые граничные условия, обеспечивающие устойчивый, колебательного характера, переток энергии от одного конца цепи к другому. Эти условия зависят от параметра, одному из предельных значений которого отвечает цепь со свободным и закрепленным концами, а другому — цепь с поглощающей и антипоглощающей границами. Полагают, что поглощающие граничные условия обеспечивают безотражательное прохождение низкочастотных волн через границу в выбранном направлении (см. раздел 1).

Интерес к рассматриваемой задаче обусловлен следующими причинами. Во-первых, эта задача является точно решаемой, наряду с классическими задачами о колебаниях гармонической цепи типа упомянутой выше задачи о колебаниях цепи со свободным и закрепленным концами. Во-вторых, динамическая система, ассоциированная с задачей, относится к классу так называемых активных колебательных систем, то есть систем с внутренней сбалансированной генерацией и поглощением энергии (см. [6] и раздел 1). Такие системы в многомерном случае мало изучены и могут проявлять новые динамические свойства. Например, мы показываем в статье (см. раздел 4), что амплитуда низкочастотных колебаний осцилляторов в цепи с достаточно большим числом частиц сильно возрастает (пропорционально числу частиц) при $\alpha = -1$ и специальном выборе начальных данных. В-третьих, рассматриваемая задача интересна в части используемого в ней механизма генерации и диссипации энергии и его приложения к проблемам теплопереноса.

Задача формулируется и решается в переменных Шредингера [7]. Основное преимущество этих переменных перед натуральными состоит в том, что в них исходная дифференциальная система второго порядка по времени превращается в систему первого порядка. Это делает применение к задаче методов теории динамических систем прямым и естественным.

Скажем несколько слов о структуре статьи. Помимо вводной части статья содержит пять разделов. В разделе 1 обсуждается постановка задачи. В разделе 2 формулируется метод ее решения. В разделе 3 дается аналитическое решение задачи. Результат представляется в двух формах: посредством бесконечных рядов функций Бесселя и в терминах собственных колебаний, посредством конечных рядов элементарных функций. В разделе 4 изучаются динамические свойства системы, в том числе дается описание инвариантных подпространств системы, обсуждается механизм зависимости колебаний от начальных данных. Аналитические выводы иллюстрируются результатами численного анализа. В разделе 5 подводятся итоги.

1. Постановка задачи

В статье рассматривается начально-граничная задача

$$\frac{dx_l}{d\tau} = \frac{1}{2}(x_{l+1} - x_{l-1}), \quad l = 1 \dots, N, \quad N \text{ нечетное}, \quad (1)$$

$$x_l(0) = x_l^0, \quad l = 1 \dots, N, \quad (2)$$

$$\alpha x_0 + x_1 = 0, \quad \alpha x_N + x_{N+1} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha < 0. \quad (3)$$

Физически это задача о колебаниях конечной однородной цепи связанных гармонических осцилляторов, выраженная в переменных Шредингера, с граничными условиями, обеспечивающими ток энергии от правой границы цепи к левой. Математически это начальная задача для неконсервативной линейной динамической системы.

Поясним физический аспект задачи. Напомним, что колебания осцилляторов однородной гармонической цепи описываются уравнением

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 q_l}{dt^2} - \frac{q_{l+1} - 2q_l + q_{l-1}}{h^2} = 0, \quad (4)$$

где q_l — отклонение l -го осциллятора от положения равновесия, c и h — константы. Например, для уравнения малых продольных колебаний цепи частиц массой m , соединенных последовательно пружинами жесткости k , $c = h\sqrt{k/m}$, где h — расстояние между соседними частицами ненапряженной цепи. Существуют и другие интерпретации уравнения (4). В частности, это уравнение описывает малые поперечные колебания упругой нити с бусинками равной массы — цепи Крейна–Стилтьеса [8]. Заметим, что само уравнение (4) по форме является полудискретным волновым уравнением. В этом случае q_l — смещение l -ой точки среды, h — шаг дискретизации, c — скорость распространения сигнала.

Переменные Шредингера вводятся выражениями

$$x_{2l} = \frac{1}{c} \frac{dq_l}{dt}, \quad x_{2l+1} = \frac{q_{l+1} - q_l}{h} \quad (5)$$

В этих переменных, относя t к $h/(2c)$ и x_l к h , уравнение колебаний принимает вид (1). По отношению к переменным Шредингера x_l исходные переменные q_l мы называем натуральными.

В натуральных переменных задаче (1)–(3) отвечает цепь длиной $L = (N+1)/2$, где под длиной цепи мы понимаем на единицу меньшее число задействованных в задаче осцилляторов, включая граничные условия. Последние в натуральных переменных имеют вид

$$\frac{\alpha}{c} \frac{dq_0}{dt} + \frac{q_1 - q_0}{h} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{dq_{(N+1)/2}}{dt} + \alpha \frac{q_{(N+1)/2} - q_{(N-1)/2}}{h} = 0. \quad (6)$$

В теории распространения волн каждое из условий (6) при $\alpha = -1$, будучи примененным к неограниченной цепи $l \in \mathbb{Z}$, относится к классу так называемых поглощающих граничных условий. По отдельности они обеспечивают безотражательное прохождение волн через границу в направлении справа налево. Такие граничные условия используются при численном решении задач о распространении волн в

неограниченной среде, когда изначально бесконечная область распространения волн ограничивается конечной подобластью [9, 10].

С энергетической точки зрения каждое из условий (6), примененное к неограниченной цепи, выступает для энергетического потока, движущегося к границе в направлении справа налево, как диссипативное, или демпфирующее [9]. Наоборот, в силу закона сохранения энергии, для энергетического потока, направленного от границы влево, эти условия выступают как генерирующие этот поток. Таким образом, вместе — для рассматриваемой в работе конечной цепи осцилляторов — граничные условия (6) обеспечивают диссипацию энергии на левом конце цепи и генерацию энергии на правом.

Тот факт, что первое из граничных условий (3) действительно задает диссипацию энергии, а второе — генерацию энергии, можно увидеть непосредственно, вычисляя производную по τ от полной энергии цепи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \sum_{l=1}^N \frac{x_l^2}{2} &= \sum_{l=1}^N x_l \frac{dx_l}{d\tau} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N x_l (x_{l+1} - x_{l-1}) = \\ &= -\frac{x_1 x_0}{2} + \frac{x_N x_{N+1}}{2} = \frac{\alpha^{-1} x_1^2}{2} - \frac{\alpha x_N^2}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где при получении второго равенства мы использовали подстановку (1), а при получении последнего — подстановку (3). Первое слагаемое в результирующем выражении выкладки (7), ответственное за изменение энергии на левой границе цепи, всегда отрицательно, что соответствует поглощению энергии на этой границе. Второе слагаемое, напротив, всегда положительно, что отвечает генерации энергии на правой границе цепи. Аналогичные вычисления могут быть проделаны и отдельно для каждого из граничных условий (3). В этом случае первое граничное условие применяется к цепи, полубесконечной вправо ($l \geq 1$), а второе — к цепи, полубесконечной влево ($l \leq N$).

Параметр α в граничных условиях (3) играет двоякую роль. Во-первых, он согласует между собой левое и правое граничные условия. Во-вторых, он ограничивает диссипацию и генерацию энергии в системе. Например, случаю $\alpha = 0$ при нечетном N соответствует цепь со свободным левым и закрепленным правым концами (см. раздел 4). В такой цепи вообще отсутствует диссипация и накачка энергии через границы. Кроме того, при $\alpha \neq -1$ нарушается баланс перетока энергии. Например, при $\alpha < -1$ генерация энергии в среднем превалирует над ее диссипацией.

Принципиальным моментом в постановке задачи является выбор четности параметра N , так как это свойство определяет характер правого граничного условия. Например, упомянутому выше случаю $\alpha \rightarrow -0$ при четном N отвечает цепь с обоими свободными концами. В настоящей статье N нечетно.

Целью статьи является получение приемлемых форм аналитического решения задачи (1)–(3) и анализ решения на предмет установления основных, главным образом колебательных, свойств динамической системы задачи.

2. Метод решения

Для решения используется метод редукции начально-граничной задачи для системы конечной гармонической цепи к начальной задаче для системы бесконечной гармонической цепи. Этот метод использовался, например, в работах [11, 12]. Мы не стали применять для решения метод нормальных мод (собственных колебаний) по двум причинам. Во-первых, чтобы сохранить преемственность с исследованием одного из авторов [13], где методом редукции решалась аналогичная задача для полубесконечной цепи. Во-вторых, применение метода редукции дает дополнительную информации о структуре изучаемой динамической системы.

Начальная задача для системы бесконечной цепи формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_l}{d\tau} &= \frac{1}{2}(x_{l+1} - x_{l-1}), \quad l \in \mathbb{Z}, \\ x_l(0) &= x_l^0, \quad l \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (8)$$

и имеет решение

$$x_l = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} x_\nu^0 J_{\nu-l}(\tau). \quad (9)$$

Классы последовательностей x_l , $l \in \mathbb{Z}$, на которых решение (9) существует и единственно, обсуждаются в [14]. Таковыми являются, например, класс $l^2(\mathbb{Z})$ квадратично суммируемых последовательностей и класс $s'(\mathbb{Z})$ последовательностей медленно-го роста. Далее в тексте мы не будем уточнять, о каком конкретно функциональном классе идет речь, а будем просто говорить о фазовом пространстве динамической системы (8).

Метод редукции состоит в том, что начальные условия для конечной цепи продолжают на бесконечную цепь так, чтобы полученная начальная задача для бесконечной цепи была эквивалентна исходной задаче для конечной цепи. Подходящее продолжение начальных условий обеспечивается требованием, чтобы решение (9) удовлетворяло граничным условиям исходной задачи. В терминах теории динамических систем [15–17] это означает, что в фазовом пространстве системы бесконечной цепи выделяется инвариантное относительно потока этой системы подпространство, динамика на котором эквивалентна динамике системы конечной цепи.

3. Решение задачи

Граничные условия задачи (1)–(3) выделяют в фазовом пространстве системы бесконечной цепи (8) инвариантное подпространство — поточечное объединение всех фазовых траекторий (9) системы (8), которые сохраняют эти условия.

Предложение 1. *Указанное подпространство определяется рекуррентными соотношениями*

$$\alpha x_l + x_{l+1} + (-1)^l (\alpha x_{-l} + x_{-l+1}) = 0, \quad (10)$$

$$\alpha x_{l+N} + x_{l+N+1} + (-1)^l (\alpha x_{-l+N} + x_{-l+N+1}) = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Покажем сначала, что подпространство (10), (11) инвариантно относительно потока системы (8). Для этого требуется показать [17, 18], что производная Ли вдоль векторного поля системы (производная в силу системы) от левых частей равенств (10), (11) равна нулю при условии выполнения этих равенств. Итак, подействуем векторным полем системы

$$u = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (x_{l+1} - x_{l-1}) \partial_l$$

на левую часть уравнения (10) и ограничим результат на (10). Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_{k-1}) \partial_k [\alpha x_l + x_{l+1} + (-1)^l (\alpha x_{-l} + x_{-l+1})] = \\ & = \alpha (x_{l+1} - x_{l-1}) + (x_{l+2} - x_l) + (-1)^l \alpha (x_{-l+1} - x_{-l-1}) + (-1)^l (x_{-l+2} - x_{-l}) = 0, \end{aligned}$$

то есть (10) инвариантно. Аналогично поступаем с соотношением (11).

Покажем теперь, что фазовая кривая (9) удовлетворяет соотношениям (10), (11) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (3). Пусть (9) удовлетворяет первому из условий (3). Тогда

$$\begin{aligned} 0 = \alpha x_0 + x_1 &= \sum_{l' \in \mathbb{Z}} \alpha x_{l'}^0 J_{l'}(\tau) + \sum_{l' \in \mathbb{Z}} x_{l'}^0 J_{l'-1}(\tau) = \sum_{l' \in \mathbb{Z}} (\alpha x_{l'}^0 + x_{l'+1}^0) J_{l'}(\tau) = \\ &= \sum_{l' \geq 1} [\alpha x_{l'}^0 + x_{l'+1}^0 + (-1)^{l'} (\alpha x_{-l'}^0 + x_{-l'+1}^0)] J_{l'}(\tau), \end{aligned}$$

то есть выполняется (10). Аналогично рассматривается второе из условий (3). Пусть, наоборот, решение (9) удовлетворяет соотношениям (10), (11). Тогда, полагая в последних $l=0$, мы получаем, что это решение подчинено условиям (3). \square

Предложение 2. Система (10), (11) эквивалентна системе соотношений

$$x_{l+2N+1} + \alpha x_{l+2N} - (-1)^N (x_{l+1} + \alpha x_l) = 0, \quad (12)$$

$$x_{l+N} = (-\alpha)^{l-1} \left[\alpha^{-l} x_{N-l+1} - (1 + \alpha^2) \sum_{l'=1}^l \alpha^{-l'} x_{N-l'+1} \right]. \quad (13)$$

Доказательство. Соотношение (12) получено исключением из (10), (11) комбинации $\alpha x_{-l} + x_{-l+1}$. Соотношение (13) — одна из возможных форм решения соотношения (11). \square

Наша ближайшая цель — решить систему соотношений (12), (13), то есть выразить переменную x_l , $l \in \mathbb{Z}$, через переменные x_1, \dots, x_N . Результат вычислений приведен в предложении 3.

Лемма 1. При нечетном N характеристический многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^{2N+1} + \alpha \lambda^{2N} + \lambda + \alpha,$$

отвечающий соотношению (12), имеет корни

$$\lambda_0 = -\alpha, \quad \lambda_m = e^{\frac{i\pi(2m+1)}{2N}}, \quad m = 1, \dots, 2N. \quad (14)$$

Эти корни различны и связаны соотношением

$$\lambda_m^{l+2Nk} = (-1)^k \lambda_m^l, \quad m \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Доказательство. Заметим, что $p(\lambda) = (\lambda + \alpha)(\lambda^{2N} + 1)$, откуда следует (14). Тожество (15) проверяется непосредственно. \square

Лемма 2. Матрица (λ_m^l) , $m, l = 0, 1, \dots, 2N$ — невырожденная матрица Вандермонда. Элементы обратной к ней матрицы (a_{mn}) вычисляются как коэффициенты разложения по степеням λ базисных многочленов Лагранжа:

$$\ell_m(\lambda) = \frac{p(\lambda)/(\lambda - \lambda_m)}{[p(\lambda)/(\lambda - \lambda_m)]_{\lambda = \lambda_m}} = \sum_{n=0}^{2N} a_{mn} \lambda^n, \quad m = 0, 1, \dots, 2N. \quad (16)$$

В частности, при $m = 0$

$$a_{00} = a_{0,2N} = \frac{1}{\alpha^{2N} + 1}, \quad a_{0n} = 0, \quad n = 1, \dots, 2N - 1. \quad (17)$$

Доказательство. Определение и свойства матриц Вандермонда можно найти в [19, р. 94–96]. В частности, любая такая матрица обратима, когда порождающие ее элементы (в нашем случае — корни характеристического многочлена) различны. Из общих свойств матриц Вандермонда следует также формула (16). Равенства (17) получены применением этой формулы. \square

Предложение 3. При нечетном N решение системы рекуррентных соотношений (12), (13) имеет вид

$$x_{2Nk+l} = (-1)^k x_l + (-\alpha)^l \frac{\alpha^{2Nk} - (-1)^k}{\alpha^{2N} + 1} (x_0 + x_{2N}), \quad l = 1, \dots, 2N, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (18)$$

где x_l при $l = N + 1, \dots, 2N$ определяется посредством (13), в частности,

$$x_{2N} + x_0 = -(1 + \alpha^{-2}) \sum_{l=1}^N \alpha^l x_l. \quad (19)$$

Доказательство. Так как корни характеристического уравнения различны, то решение рекуррентного соотношения (12), согласно [20], представляется в виде

$$x_l = \sum_{m=0}^{2N} c_m \lambda_m^l = \sum_{n=0}^{2N} x_n \sum_{m=0}^{2N} a_{mn} \lambda_m^l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (20)$$

где от произвольных постоянных $c_m \in \mathbb{C}$ мы перешли к их разложению

$$c_m = \sum_{n=0}^{2N} a_{mn} x_n$$

по переменным x_l , $l=1, \dots, 2N$. Тогда при $l=1, \dots, 2N$ и произвольном $k \in \mathbb{Z}$, используя леммы и (20), получаем

$$\begin{aligned}
 x_{2Nk+l} &= \sum_{n=0}^{2N} x_n \sum_{m=0}^{2N} a_{mn} \lambda_m^{l+2Nk} = \sum_{n=0}^{2N} x_n a_{0n} \lambda_0^{l+2Nk} + (-1)^k \sum_{n=0}^{2N} x_n \sum_{m=1}^{2N} a_{mn} \lambda_m^l = \\
 &= \sum_{n=0}^{2N} x_n a_{0n} \lambda_0^{l+2Nk} + (-1)^k \sum_{n=0}^{2N} x_n \sum_{m=0}^{2N} a_{mn} \lambda_m^l - (-1)^k \sum_{n=0}^{2N} x_n a_{0n} \lambda_0^l = \\
 &= \sum_{n=0}^{2N} x_n a_{0n} \lambda_0^{l+2Nk} + (-1)^k x_l - (-1)^k \sum_{n=0}^{2N} x_n a_{0n} \lambda_0^l = \\
 &= (-1)^k x_l + (-\alpha)^l \frac{\alpha^{2Nk} - (-1)^k}{\alpha^{2N} + 1} (x_0 + x_{2N}),
 \end{aligned}$$

что и требовалось показать. \square

Перейдем к основным результатам раздела — двум формам решения начально-граничной задачи (1)–(3). Начнем с представления решения в терминах бесконечных рядов бesselевых функций.

Теорема 1. *Решение начально-граничной задачи (1)–(3) имеет вид*

$$\begin{aligned}
 x_l &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N x_{l'}^0 J_{2Nk+l'-l} + \\
 &+ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N \alpha^{l'-1} x_{l'}^0 (-1)^{l-1} \left[\alpha^{-l'} J_{2Nk+l'+l-1} - (1+\alpha^2) \sum_{l''=1}^{l'} \alpha^{-l''} J_{2Nk+l''+l-1} \right] + \\
 &+ (-1)^l (x_0^0 + x_{2N}^0) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l'=1}^{2N} \alpha^{l'} \frac{\alpha^{-2Nk} - (-1)^k}{\alpha^{2N} + 1} J_{2Nk-l'+l}.
 \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Представим решение начальной задачи для бесконечной цепи (формула (9)) в виде

$$x_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l'=1}^{2N} x_{2Nk+l'}^0 J_{2Nk+l'-l}$$

и выполним подстановку (18). После простых преобразований получим

$$\begin{aligned}
 x_l &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N x_{l'}^0 J_{2Nk+l'-l} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N x_{l'+N}^0 J_{2Nk+N+l'-l} + \\
 &+ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l'=1}^{2N} (-\alpha)^{l'} \frac{\alpha^{2Nk} - (-1)^k}{\alpha^{2N} + 1} (x_0^0 + x_{2N}^0) J_{2Nk+l'-l}.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Далее следуем цепочке равенств

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N x_{l'+N}^0 J_{2Nk+N+l'-l} = \\
 = & \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N (-\alpha)^{l'-1} \left[\alpha^{-l'} x_{N-l'+1}^0 - (1+\alpha^2) \sum_{l''=1}^{l'} \alpha^{-l''} x_{N-l''+1}^0 \right] J_{2Nk+N+l'-l} = \\
 = & \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N (-\alpha)^{-l'-1} \left[\alpha^{l'} x_{l'}^0 - (1+\alpha^2) \sum_{l''=l'}^N \alpha^{l''} x_{l''}^0 \right] J_{2Nk+2N-l'-l+1} = \\
 = & - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N (-\alpha)^{-l'-1} \alpha^{l'} x_{l'}^0 J_{2Nk-l'-l+1} + \\
 + & \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N \sum_{l''=l'}^N (-\alpha)^{-l'-1} (1+\alpha^2) \alpha^{l''} x_{l''}^0 J_{2Nk-l'-l+1} = \\
 = & - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N (-\alpha)^{-l'-1} \alpha^{l'} x_{l'}^0 J_{2Nk-l'-l+1} + \\
 + & \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N \sum_{l''=1}^{l'} (-\alpha)^{-l''-1} (1+\alpha^2) \alpha^{l'} x_{l''}^0 J_{2Nk-l''-l+1} = \\
 = & \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N \alpha^{l'-1} x_{l'}^0 \left[(-\alpha)^{-l'} J_{2Nk-l'-l+1} - (1+\alpha^2) \sum_{l''=1}^{l'} (-\alpha)^{-l''} J_{2Nk-l''-l+1} \right].
 \end{aligned}$$

Первое равенство в этой цепочке мы получили с помощью (13), во втором изменили индекс суммирования во второй ($l' \rightarrow N - l' + 1$), а затем в третьей ($l'' \rightarrow N - l'' + 1$) суммах, в третьем раскрыли скобки и сдвинули k на единицу, в четвертом поменяли порядок суммирования в двойной сумме.

Теперь для получения выражения (21) нужно подставить результат представленной цепочки равенств в формулу (22) и поменять, где необходимо, порядок бесселевых функций на противоположный. \square

Суммируя в формуле (21) бесконечные ряды, получаем представление решения в терминах конечных рядов элементарных функций.

Теорема 2. *Справедливо выражение*

$$\begin{aligned}
 x_l = & \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{i\omega_k \tau} \left[e^{i\phi_k l} - (-1)^l \frac{\alpha + e^{i\phi_k}}{\alpha - e^{-i\phi_k}} e^{-i\phi_k l} \right] \sum_{l'=1}^N x_{l'}^0 e^{-i\phi_k l'} - \\
 & - I(0) (-\alpha)^l \frac{1 + \alpha^{-2}}{1 + \alpha^{2N}} e^{-\frac{\tau}{2}(\alpha - \alpha^{-1})},
 \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\omega_k = \sin \phi_k, \quad \phi_k = \frac{\pi(2k-1)}{2N}, \quad I(0) = \sum_{l=1}^N \alpha^l x_l^0. \tag{24}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l'=1}^{2N} (-1)^l \alpha^{l'} \alpha^{-2Nk} J_{2Nk-l'+l} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l'=1}^{2N} (-\alpha)^{l'} \alpha^{2Nk} J_{2Nk+l'-l} = \\ &= \sum_{l' \in \mathbb{Z}} (-\alpha)^{l'} J_{l'-l} = (-\alpha)^l \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\alpha - \alpha^{-1}) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где мы использовали известное выражение для производящей функции бesselевых функций целого порядка [21]. Таким образом, мы просуммировали один из бесконечных рядов из третьей строки формулы (21).

Остальные бесконечные ряды из (21) суммируются с помощью формулы [12]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2Nk+l}(x) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \exp[i(\omega_k \tau - \phi_k l)]. \quad (26)$$

Прямое применение (26) к (21) дает с учетом (25)

$$\begin{aligned} x_l &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{i\omega_k \tau} e^{i\phi_k l} \sum_{l'=1}^N x_{l'}^0 e^{-i\phi_k l'} - \\ &- \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{i\omega_k \tau} (-1)^l e^{-i\phi_k l} \sum_{l'=1}^N \alpha^{l'-1} x_{l'}^0 \left(\alpha^{-l'} e^{i\phi_k(1-l')} - (1+\alpha^2) \sum_{l''=1}^{l'} \alpha^{-l''} e^{i\phi_k(1-l'')} \right) + \\ &+ I(0) \frac{1+\alpha^{-2}}{1+\alpha^{2N}} \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{i\omega_k \tau} (-1)^l e^{-i\phi_k l} \sum_{l'=1}^{2N} \alpha^{l'} e^{i\phi_k l'} - \\ &- I(0) \frac{1+\alpha^{-2}}{1+\alpha^{2N}} (-\alpha)^l \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\alpha - \alpha^{-1}) \right]. \end{aligned}$$

Суммируя здесь геометрические прогрессии

$$\sum_{l''=1}^{l'} \alpha^{-l''} e^{-il''\phi_k} = e^{-i\phi_k} \frac{1 - \alpha^{-l'} e^{-il'\phi_k}}{\alpha - e^{-i\phi_k}}, \quad \sum_{l'=1}^{2N} \alpha^{l'} e^{il'\phi_k} = -\alpha \frac{1 + \alpha^{2N}}{\alpha - e^{-i\phi_k}}$$

и преобразуя результат с учетом (19), получаем (23). \square

4. Анализ решения

Области ограниченной и неограниченной динамики. Из выражения для решения в форме (23) прямо следует, что свойство ограниченности решения определяется функцией

$$I(\tau) = I(0) \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\alpha - \alpha^{-1}) \right]. \quad (27)$$

Мы видим, что при $I(0) \neq 0$ область изменения параметра α подразделяется на три подмножества:

$$\text{dom } \alpha = (-\infty, -1) \cup \{-1\} \cup (-1, 0).$$

В первом амплитуда колебаний экспоненциально возрастает с ростом t , в последнем — убывает, стабилизируясь к некоторой предельной “траектории” — функции $x_l^*(\tau)$, которая получается из $x_l(\tau)$ устранением в (23) последнего слагаемого. Точка -1 особая, при переходе через нее характер движения меняется. Предельная точка 0 также является особой. При $I(0) = 0$ динамика ограничена.

Поведение фазового объема. Отметим, что указанное выше поведение решения обычным образом согласуется с поведением фазового объема системы. Положим

$$v = \sum_{k=2}^{N-1} (x_{k+1} - x_{k-1})\partial_k + (x_2 + \alpha^{-1}x_1)\partial_1 + (\alpha x_N - x_{N-1})\partial_N,$$

$$d^N x = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$$

для векторного поля и фазового объема системы. Обозначим ∂_v производную Ли вдоль поля v .

Предложение 4. *Справедливо равенство*

$$\partial_v d^N x = (\alpha^{-1} - \alpha)d^N x.$$

Доказательство. Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} \partial_v d^N x &= d(v \rfloor d^N x) = d \sum_{k=1}^N (x_{k+1} - x_{k-1})\partial_k \rfloor (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N) = \\ &= -dx_0 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx^N + dx_{N+1} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{N-1} = (\alpha^{-1} - \alpha)d^N x, \end{aligned}$$

что и требовалось показать. □

Положения равновесия динамической системы (1), (3), исключая тривиальный случай $x=0$, определяются условием равенства нулю определителя матрицы системы:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 1 & 0 & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix} = -(\alpha - \alpha^{-1}) = 0.$$

Мы видим, что нетривиальные положения равновесия существуют только при $\alpha = -1$. В этом случае единственным решением уравнения $Ax = 0$ является $x_l = c$, $l = 1, \dots, N$, где c — произвольная постоянная.

Инвариантные подпространства. Анализ собственных значений $(\alpha - \alpha^{-1})/2$ и $i\omega_k$ (см. выражения (23) и (24)) матрицы динамической системы (1), (3) показывает, что в интервале $(-\infty, -1)$ изменения параметра α фазовое пространство системы разлагается в прямую сумму центрального и неустойчивого подпространств, а в

интервале $(-1, 0)$ — центрального и устойчивого подпространств. При $\alpha = -1$ все фазовое пространство выступает как центральное.

Опишем центральное подпространство. Заметим, что если начальные условия задачи выбраны так, что $I(0) = 0$, то поведение решения не зависит от функции (27). Это позволяет предположить, что подпространство, определяемое уравнением

$$\sum_{l=1}^N \alpha^l x_l = 0, \quad (28)$$

является инвариантом рассматриваемой динамической системы.

Предложение 5. Подпространство (28) инвариантно относительно потока динамической системы (1), (3). При $\alpha = -1$ таковыми являются подпространства

$$\sum_{l=1}^N \alpha^l x_l = \text{const.}$$

Доказательство. В самом деле, при выполнении граничных условий (3)

$$\begin{aligned} \partial_v \left(\sum_{l=1}^N \alpha^l x_l - \text{const} \right) &= \sum_{k=1}^N (x_{k+1} - x_{k-1}) \partial_k \sum_{l=1}^N \alpha^l x_l = \sum_{l=1}^N \alpha^l (x_{l+1} - x_{l-1}) = \\ &= \alpha^{-1} \sum_{l=2}^{N+1} \alpha^l x_l - \alpha \sum_{l=0}^{N-1} \alpha^l x_l = (\alpha^{-1} - \alpha) \sum_{l=1}^N \alpha^l x_l - x_1 - \alpha x_0 + \alpha^N x_{N+1} + \alpha^{N+1} x_N = 0, \end{aligned}$$

если выполнено (28) или $\alpha = -1$. □

Предложение 6. Справедливо соотношение

$$I(\tau) = \sum_{l=1}^N \alpha^l x_l(\tau). \quad (29)$$

Доказательство. Доказательство сводится к прямому вычислению суммы (29) после подстановки в нее решения (23). □

Цепь со свободным левым и закрепленным правым концами. В случае $\alpha = 0$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_l &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \sum_{l'=1}^N x_{l'}^0 \left[J_{2Nk+l'-l} + (-1)^{l'} J_{2Nk-l'-l+2} \right] = \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{i\omega_k \tau} \left[e^{i\phi_k l} + (-1)^l e^{-i\phi_k(l-2)} \right] \sum_{l'=1}^N x_{l'}^0 e^{-i\phi_k l'}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $x_1 = x_{N+1} = 0$, то есть граничные условия, определяющие такую цепь, действительно выполнены.

Динамика при $N=1$. В случае $N=1$ имеем

$$x_1 = x_1^0 \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\alpha - \alpha^{-1}) \right]. \quad (30)$$

В натуральных переменных этому случаю отвечает цепь, состоящая из двух осцилляторов с номерами 0 и 1. Из (30) и (5) следует, считая $h=c=1$,

$$q_1 - q_0 = x_1^0 \exp [-t(\alpha - \alpha^{-1})], \quad q_0 = \frac{x_1^0}{\alpha^2 - 1} \exp [-t(\alpha - \alpha^{-1})].$$

Динамика при $\alpha = -1$. При $\alpha = -1$ решение имеет вид

$$x_l = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{i\omega_k \tau} \left[e^{i\phi_k l} + i(-1)^l \operatorname{tg} \frac{\phi_k}{2} e^{-i\phi_k(l-1)} \right] \sum_{l'=1}^N x_{l'}^0 e^{-i\phi_k l'} - I(0). \quad (31)$$

Характеристика колебаний в этом случае дана ниже. Отметим сразу интересное явление, возникающее в этом случае, — значительное, порядка N , увеличение амплитуды низкочастотных колебаний

Общая характеристика колебания при больших N . В общем случае временная частота и амплитуда колебаний цепи определяются функциями

$$\beta_l(k) = e^{i\phi_k l} - (-1)^l \frac{\alpha + e^{i\phi_k}}{\alpha - e^{-i\phi_k}} e^{-i\phi_k l},$$

$$x_F^0(k) = \sum_{l=1}^N x_l^0 e^{-i\phi_k l}$$

из выражения (23). Вторую из них назовем частотной функцией начальных данных. Она является пространственной характеристикой системы, в отличие от собственных частот системы, которые являются временной характеристикой.

Типичное поведение функции $\beta_l(k)$ демонстрирует рис. 1. Мы видим, что при

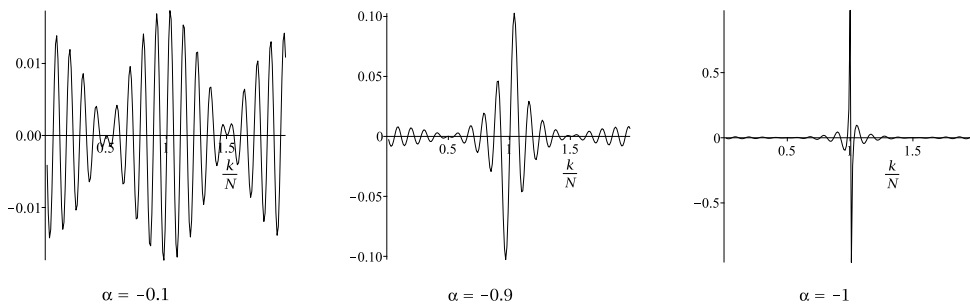


Рис. 1. Графики функции $\frac{\pi}{4N} \operatorname{Im} \beta_l(k)$ при различных значениях параметра α , $N = 99$ и $l = 19$. Действительная часть функции $\frac{\pi}{4N} \beta_l(k)$ имеет схожее поведение.

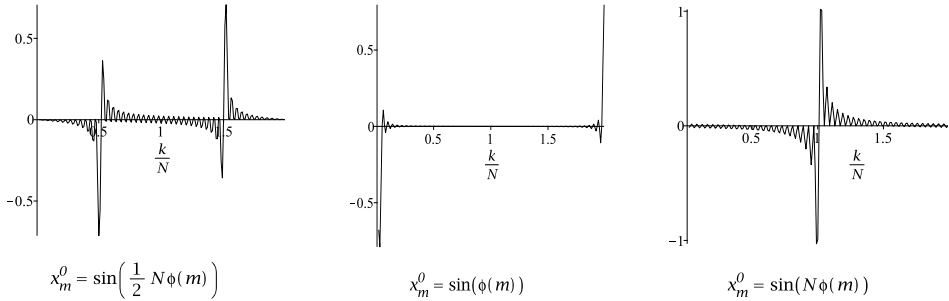


Рис. 2. Графики функции $\frac{\pi}{4N} \operatorname{Im} x_F^0(k)$ при различном выборе начальных условий и $N = 49$. Поведение действительной части частотной функции аналогично.

$N \rightarrow \infty$ и значениях α , близких к -1 , в системе выделяется пространственная частота $k/N = 1$. В этом случае функция $\beta_l(k)$ ведет себя как тангенс с нормированным на N аргументом (см. выражение (31)), то есть приблизительно как функция $\delta_{k,N} - \delta_{k-1,N}$, где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера. Данная частота будет вносить основной вклад в величину колебаний при отсутствии компенсации этого вклада со стороны частотной функции начальных данных. Поведение функции $x_F^0(k)$ при некоторых выборах начальных данных показано на рис. 2.

Приведем результаты численного исследования колебаний при больших N . Мы ограничимся значениями $N \leq 99$, так как с дальнейшим ростом N существенного изменения в динамике не наблюдается.

Рассмотрим сначала случай, когда пространственные частоты, близкие к единичной, отсутствуют или дают незначительный вклад в частотное поведение начальных данных. При относительно большом разбросе этих частот заслуживающей внимания регулярности в динамике колебаний не наблюдается. При этом амплитуда колебаний цепи по порядку величины совпадает с амплитудой изменения начальных данных. Если же среди этих частот превалирует отдельная частота, скажем $\nu = k/N$, то в колебаниях цепи оказывается превалирующей собственная частота $\omega_k = \omega_{\nu N}$. Амплитуды колебаний цепи и начальных данных снова сравнимы.

Рассмотрим теперь случай, когда пространственные частоты, близкие к единичной, вносят сравнимый с другими частотами вклад в частотное поведение начальных данных. Тогда превалирующей частотой колебаний цепи является собственная частота ω_N . Амплитуда колебаний цепи значительно превышает амплитуду изменения начальных данных и оказывается пропорциональной N . Такое поведение колебаний имеет нечто общее с резонансом, однако отражает самостоятельное явление, видимо, недостаточно изученное в теории линейных динамических систем, чтобы быть хорошо известным.

Предложенная характеристика колебаний цепи иллюстрируется графиками частотной функции начальных данных (см. рис. 2) и соответствующими им графиками решения (см. рис. 3). Заметим, что при $\nu = 1, 2$ собственные частоты по абсолютной величине равны $\sin[\pi/(2N)] \approx \pi/(2N)$.

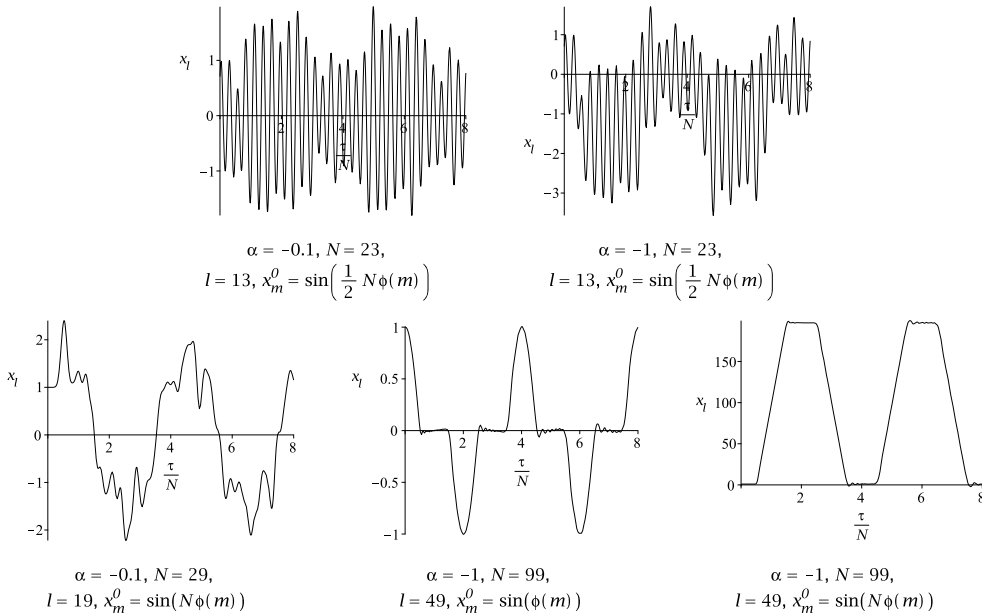


Рис. 3. Графики $x_l(\tau)$.

5. Выводы

Результаты представленного исследования следующие.

1. Получено точное аналитическое решение задачи о колебаниях в цепи связанных линейных осцилляторов с демпфирующей и антидемпфирующей границами. Решение представлено в двух формах: с использованием бесконечных рядов функций Бесселя и в терминах нормальных мод.

2. На основе полученного решения проведен анализ динамической системы задачи. Описаны инвариантные подпространства системы, исследована их зависимость от параметра α системы. Показано, что при $\alpha \neq -1$ фазовое пространство разлагается в прямую сумму центрального гиперпространства и одномерного устойчивого (при $-1 < \alpha < 0$) или неустойчивого (при $\alpha < -1$) подпространств.

3. Численно и аналитически исследованы колебательные свойства системы. Показано, что при достаточно большой длине цепи частота колебаний определяется пространственной частотой изменения начальных данных. Указана форма этой зависимости. В частности, максимальной пространственной частоте изменения начальных данных отвечает минимальная собственная частота колебаний системы, обратно пропорциональная длине цепи. В этом случае при $\alpha = -1$ низкочастотные колебания системы обнаруживают значительный рост по амплитуде (пропорционально длине цепи). Дано аналитическое объяснение этому явлению.

Список литературы

- [1] A. Maradudin, E. Montroll, and G. Weiss, *Theory of lattice dynamics in the harmonic approximation*, Academic Press, New York and London, 1963.
- [2] *Thermal transport in low dimensions*, Lecture Notes in Physics, **921**, ed. S. Lepri, Springer International Publishing, 2016.
- [3] А. М. Кривцов, “Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле”, *Доклады академии наук*, **464**:2 (2015), 162–166.
- [4] O. S. Loboda, E. A. Podolskaya, D. V. Tsvetkov, and A. M. Krivtsov, “On the fundamental solution of the heat transfer problem in one-dimensional harmonic crystals”, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **33** (2021), 485–496.
- [5] М. А. Гузев, “Закон Фурье для одномерного кристалла”, *Дальневост. матем. журн.*, **20**:1 (2018), 34–38.
- [6] В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин, *Основы теории колебаний*, Наука, М., 1978.
- [7] E. Schrödinger, “Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme”, *Annalen der Physik*, **44** (1914), 916–934.
- [8] F. R. Gantmakher, M. G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*, AMS Chelsea Publishing, 2002.
- [9] L. Halpern, “Absorbing Boundary Conditions for the Discretization Schemes of the One-Dimensional Wave Equation”, *Mathematics of Computation*, **38**:158 (1982), 415–429.
- [10] I. Alonso-Mallo and A. M. Portillo, “A proof of the well posedness of discretized wave equation with an absorbing boundary condition”, *J. Numer. Math.*, **22**:4 (2014), 271–287.
- [11] E. Takizawa and K. Kobayasi, “Heat Flow in a System of Coupled Harmonic Oscillators”, *Chinese J. Phys.*, **1**:2 (1963), 59–73.
- [12] K. Kobayasi and E. Takizawa, “Effect of a Light Isotopic Impurity on the Energy Flow in a System of One-Dimensional Coupled Harmonic Oscillators”, *Chinese J. Phys.*, **2**:2 (1964), 68–79.
- [13] А. И. Гудименко, “Тепловой поток в одномерной полубесконечной гармонической решетке с поглощающей границей”, *Дальневост. матем. журн.*, **20**:1 (2020), 38–50.
- [14] J. L. van Hemmen, *Physics Reports*, **65**:2 (1980), 43–149.
- [15] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Изд. 6, URSS, 2017.
- [16] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Texts in Applied Mathematics 34, Springer, 2006.
- [17] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Graduate Studies in Mathematics. Volume XXX, AMS, Providence, Rhode Island, 2011.
- [18] М. В. Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1985.
- [19] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2007.
- [20] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, 2005.
- [21] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1944.

*Gudimenko A. I.*¹, *Lihosherstov A. V.*² The problem of vibrations in a harmonic chain with damping and anti-damping on the boundaries. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 161–177.

¹ Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

² Far Eastern Federal University, Russia

ABSTRACT

The problem of oscillations in a finite homogeneous chain of coupled harmonic oscillators is considered under special boundary conditions that ensure a stable flow of energy from one end of the chain to the other. The problem covers, as special cases, the classical problem of oscillations in a chain with free and fixed ends, as well as the problem of oscillations in a chain with absorbing and anti-absorbing boundaries. Absorbing boundary conditions are used in numerical simulation of wave propagation to minimize the influence of non-physical boundaries.

An exact analytical solution to the considered problem is obtained. The dynamical system of the problem is studied. In particular, a description of the invariant subspaces of the system is given. The oscillatory properties of the system are investigated. The phenomenon of a significant increase in the amplitude of low-frequency oscillations has been discovered and studied.

The problem is solved in Schrödinger variables. The solution is presented both in terms of infinite series of Bessel functions and in terms of natural oscillations (eigenmodes) of the system.

Key words: *harmonic chain, absorbing boundary conditions, exactly solvable dynamics, Schrödinger variables, heat flow.*