УДК 512.534.3
MSC2020 20M30 + 08A35

© И. Б. Кожухов[1,2], А. С. Сотов[2]

Канторовость квазиунитарных полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами

Универсальную алгебру A назовём канторовой, если для любой алгебры B той же сигнатуры наличие инъективных гомоморфизмов $A \to B$ и $B \to A$ влечёт за собой изоморфизм алгебр A и B. Правый полигон X над полугруппой S назовём квазиунитарным, если $X = XS$. В работе доказано, что любой квазиунитарный полигон над вполне простой полугруппой, а также квазиунитарный полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой являются канторовыми.

Ключевые слова: *полигон над полугруппой, универсальная алгебра, условие конечности.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202304

Хорошо известная теорема Кантора – Шрёдера – Бернштейна утверждает, что если для двух множеств X и Y существуют инъективные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, то существует взаимно однозначное отображение $h : X \to Y$ (см., например, [1, гл. 1, §3, теорема 2]). Зададимся вопросом, верно ли аналогичное утверждение для универсальных алгебр, если брать не произвольные отображения, а только гомоморфизмы? Иными словами, не будут ли изоморфными две универсальные алгебры одной сигнатуры, если существуют изоморфные вложения их друг в друга? В общем случае ответ отрицательный: например, свободные группы с двумя и с тремя образующими изоморфно вкладываются друг в друга, но не изоморфны. Для некоторых алгебр теорема, аналогичная теореме Кантора – Шрёдера – Бернштейна, верна: например, она верна для линейных пространств над телом. Назовём универсальную алгебру A *канторовой*, если для любой алгебры B той же сигнатуры наличие изоморфных вложений $A \to B$ и $B \to A$ влечёт за собой изоморфизм $A \cong B$. Отметим, что канторовость является *условием конечности* — всякая конечная алгебра является канторовой. В работе [2] было доказано, что унитарные полигоны

[1] Национальный исследовательский университет «МИЭТ», 124498, г. Москва, г. Зеленоград, площадь Шокина, д. 1.
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Ленинские горы, д. 1.
Электронная почта: kozhuhov_i_b@mail.ru (И. Б. Кожухов), alexandersotov@yandex.ru (А. С. Сотов).

над группой являются канторовыми (неунитарные — необязательно). Цель данной работы — обобщить этот результат на квазиунитарные полигоны над вполне (0-)простыми полугруппами.

Пусть X — множество, S — полугруппа. *Действием полугруппы* S на множестве X назовём отображение $X\times S\to X$. *Полигоном над полугруппой* S называется множество с определённым на нём действием полугруппы S, если $x(s_1s_2)=(xs_1)s_2$ для всех $x\in X,\ s_1,s_2\in S$ (см. [3, 4]). Полигон называется унитарным, если полугруппа S имеет единичный элемент (обозначим его через e) и $xe=x$ для всех $x\in X$. Назовём полигон X *квазиунитарным*, если $X=XS$. Легко увидеть, что для полугрупп с единицей понятия квазиунитарности и унитарности полигонов совпадают. Таким образом, понятие квазиунитарного полигона обобщает понятие унитарного полигона с моноидов (полугрупп с единицей) на произвольные полугруппы. Нетрудно проверить, что для любого полигона X над полугруппой S множество XS является подполигоном, а если полугруппа S такова, что $S^2=S$, то XS — наибольший квазиунитарный подполигон. Назовём его *квазиунитарной частью* полигона X.

Если S — полугруппа с нулём, то естественно рассматривать над ней полигоны с нулём, т.е. считать, что полигон X имеет нулевой элемент θ такой, что $x\cdot 0=\theta\cdot s=\theta$ для всех $x\in X,\ s\in S$ (здесь 0 — нулевой элемент полугруппы S).

Полигон X над полугруппой S назовём *простым*, если он не имеет подполигонов, отличных от X. Полигон X с нулём называется *0-простым*, если $XS\neq\{0\}$ и X не имеет подполигонов, отличных от $\{0\}$ и X.

Следующие два определения взяты из [5, §2.7]. Вполне простой полугруппой называется полугруппа S, имеющая единственный идеал S и содержащая примитивный идемпотент. Полугруппа S с нулём называется вполне 0-простой, если она не имеет нетривиальных идеалов (т.е. единственными её идеалами являются $\{0\}$ и S), имеет ненулевой примитивный идемпотент и $S^2\neq\{0\}$. Известная теорема Сушкевича–Риса (см. [5, теоремы 3.3 и 3.5]) утверждает, что вполне простые полугруппы — это в точности полугруппы, изоморфные какой-либо рисовской матричной полугруппе $\mathcal{M}(G,I,\Lambda,P)$, а вполне 0-простые полугруппы — полугруппы, изоморфные какой-либо регулярной рисовской матричной полугруппе с нулём $\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda,P)$, то есть такой, что сэндвич-матрица P не содержит нулевых строк и нулевых столбцов. Полигоны над вполне простой полугруппой $\mathcal{M}=\mathcal{M}(G,I,\Lambda,P)$ и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda,P)$ были описаны в работе [6].

Двойственным (в смысле теории категорий) к понятию прямого произведения универсальных алгебр является понятие *копроизведения*. В случае полигонов над полугруппой копроизведение X полигонов X_i $(i\in I)$ — это объединение попарно непересекающихся полигонов X_i (если полигоны X_i имеют непустые пересечения, то вместо них возьмём их изоморфные копии, попарные пересечения которых пусты). Тот факт, что X — копроизведение полигонов X_i, будем обозначать так: $X=\coprod\limits_{i\in I}X_i$. Если X — полигон с нулём θ над полугруппой с нулём 0, причём X является объединением подполигонов X_i таких, что $X_i\cap X_j=\{\theta\}$ при $i\neq j$, то будем называть X *0-копроизведением* полигонов X_i и писать $X=\coprod\limits_{i\in I}{}^0X_i$. В работах [7, 8] было доказано, что если X — полигон над $\mathcal{M}$, то его квазиунитарная часть XS является копроизведением простых подполигонов, а если X — полигон с нулём над $\mathcal{M}^0$, то XS — 0-копроизведение 0-простых подполигонов.

Если полугруппа S является объединением правых идеалов, являющихся простыми справа полугруппами, то всякий квазиунитарный полигон над ней является объединением простых, а значит копроизведением простых.

Теорема 1. *Если полигон является объединением простых полигонов, то он канторов.*

Доказательство. Пусть X — полигон, являющийся объединением простых, над полугруппой S, а Y — полигон над той же полугруппой такой, что существуют инъективные гомоморфизмы $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$.

По условию $X = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, где X_γ — простые полигоны. Так как ψ — вложение, то $Y \cong \psi(Y)$. Так как X_γ — простые полигоны, то всякий подполигон полигона X является копроизведением простых полигонов. Применяя это соображение к полигону $\psi(Y)$, получаем, что полигон $\psi(Y)$ (а значит и полигон Y), является копроизведением простых. Запишем: $Y = \coprod\limits_{\mu\in M} Y_\mu$, где Y_μ – простые полигоны. Покажем, что если $x \in X_\gamma$ и $\varphi(x) \in Y_\mu$, то $\varphi(X_\gamma) = Y_\mu$. Действительно, так как X_γ простой, то он порождается любым своим элементом, потому $X_\gamma = xS$. Отсюда следует, что $\varphi(X_\gamma) = \varphi(xS) = \varphi(x)S = Y_\mu$ (последнее равенство имеет место вследствие простоты полигона Y_μ).

Рассмотрим множества $P_1 = (X\backslash\psi(Y))$, $P_2 = \psi(\varphi(P_1))$ и так далее, то есть $P_{n+1} = \psi(\varphi(P_n))$ при всех n. Так как ψ и φ — гомоморфизмы, то P_k — подполигоны полигона X. При $n \geqslant 2$ имеем: $P_n \subseteq \psi(Y)$, поэтому $P_1 \cap P_n = \varnothing$ при $n \geqslant 2$. Докажем индукцией по k, что $P_k \cap P_m = \varnothing$ при всех $m > k$. Для $k = 1$ это уже доказано. Пусть для некоторого k это выполнено, т. е. $P_k \cap P_m = \varnothing$ при $m > k$. Так как $\psi\varphi$ — инъективное отображение, то $\psi(\varphi(P_k)) \cap \psi(\varphi(P_m)) = \emptyset$. Таким образом, $P_{k+1} \cap P_{m+1} = \varnothing$ при $m + 1 > k + 1$.

Положим $P = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} P_k$. Вследствие только что доказанного получаем: $P = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} P_k$.

Определим отображение $\sigma : X \mapsto Y$ по формуле

$$\sigma(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in P, \\ \psi^{-1}(x), & \text{если } x \notin P. \end{cases}$$

Определение корректно, так как при $x \notin P$ мы имеем $x \notin P_1$, откуда $x \in \psi(Y)$, поэтому существует $\psi^{-1}(x)$. Докажем, что $\sigma : X \mapsto Y$ — взаимно однозначное отображение.

Вначале докажем сюръективность отображения σ. Пусть $y \in Y$. Если $y \in \varphi(P)$, то $y = \varphi(x)$ при некотором $x \in P$, а значит, $y = \sigma(x)$. Пусть $y \notin \varphi(P)$. Положим $x = \psi(y)$. Так как $x \in \psi(Y)$, то $x \notin P_1$. Если $x \in P$, то $x \in P_n$ при некотором $n \geqslant 2$. В этом случае $x = \psi(\varphi(x'))$ для некоторого $x' \in P_{n-1}$. Так как $x = \psi(y)$, $x = \psi(\varphi(x'))$ и ψ инъективно, то $y = \varphi(x') \in \varphi(P)$, что противоречит предположению. Таким образом, $x \notin P$. Отсюда $\sigma(x) = \psi^{-1}(x) = y$.

Теперь докажем, что σ инъективно. Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$. Если $x_1, x_2 \in P$, то $\varphi(x_1) = \sigma(x_1) = \sigma(x_2) = \varphi(x_2)$, и вследствие инъективности $\varphi(x)$ получаем $x_1 = x_2$.

Если $x_1,x_2\notin P$, то $\psi^{-1}(x_1)=\sigma(x_1)=\sigma(x_2)=\psi^{-1}(x_2)$, откуда также $x_1=x_2$. Пусть теперь $x_1\in P, x_2\notin P$. Тогда $\sigma(x_1)=\varphi(x_1), \sigma(x_2)=\psi^{-1}(x_2)$. Так как $x_1\in P$, то $x_1\in P_n$ при некотором n, а значит,

$$x_2=\psi(\psi^{-1}(x_2))=\psi(\sigma(x_2))=\psi(\sigma(x_1))=\psi(\varphi(x_1))\in P_{n+1},$$

что противоречит соотношению $x_2\notin P$.

Осталось доказать, что σ — гомоморфизм. Пусть $x\in X,\ \ s\in S$. Если $x\in P$, то также $xs\in P$, и мы имеем: $\sigma(xs)=\varphi(xs)=\varphi(x)s=\sigma(x)s$. Если $x\notin P$, то вследствие соотношения $X=P\sqcup(X\setminus P)$ также $x\mathrm{g}\notin P$, поэтому $\sigma(x)=\psi^{-1}(x), \sigma(xs)=\psi^{-1}(xs)$. Положим $y=\psi^{-1}(x),\ y'=\psi^{-1}(xs)$. Имеем $\psi(y)=x,\psi(y')=xs$. Далее, $\psi(y')=xs= =\psi(y)s=\psi(ys)$, откуда $y'=ys$, т.е. $\sigma(xs)=\sigma(x)s$. □

Отметим некоторый класс полугрупп, над которыми квазиунитарные полигоны являются объединениями простых.

Предложение 1. *Если полугруппа S является объединением минимальных правых идеалов, то всякий квазизиунитарный полигон над S является копроизведением простых полигонов.*

Доказательство. По условию $S=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}N_\gamma$, где N_γ — минимимальный правый идеал для каждого $\gamma\in\Gamma$. Пусть X — квазиунитарный полигон над S. Тогда $X=XS$. Возьмём любой элемент $x\in X$. Так как $X=XS$, то $x=x's$ при некотором $s\in S$. Так как $S=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}N_\gamma$, то $s\in N_\gamma$ при некотором $\gamma\in\Gamma$. Так как N_γ — минимальный правый идеал, то N_γ — простой подполигон полигона S. Отсюда следует, что $x'N_\gamma$, как гомоморфный образ простого полигона N_γ, также является простым. Так как $x=x's\in x'N_\gamma$, то вследствие произвольности элемента $x\in X$ мы получаем, что X — объединение простых полигонов. Очевидно, в этом случае X является копроизведением простых полигонов. □

Замечание 1. Нетрудно показать, что минимальный правый идеал полугруппы — это в точности правый идеал, являющнйся простой справа полугруппой.

Из теоремы 1 и предложения 1 можно получить следствие.

Следствие 1. *Если полугруппа S является объединением минимальных правых идеалов, то всякий квазиунитарный полигон над S канторов.*

Пусть теперь $S=\mathcal{M}(G,I,\Lambda,P)$ – вполне простая полугруппа. Положим для каждого $i\in I$

$$R_i=\{(\mathrm{g})_{i\lambda}|\mathrm{g}\in G,\lambda\in\Lambda\}.$$

Тогда R_i — простая справа полугруппа: как полугруппа, R_i изоморфна прямому произведению группы G и множества Λ, рассматриваемого как полугруппа правых нулей, т.е. $R_i\cong G\times\Lambda$ — правая группа. При этом $S=\coprod\limits_{i\in I}R_i$ — копроизведение полигонов над S. Отсюда получаем следствие 2.

Следствие 2. *Всякий квазиунитарный полигон над вполне простой полугруппой является канторовым.*

Так как группа является вполне простой полугруппой, то мы получаем следствие 3.

Следствие 3. *Всякий унитарный полигон над группой является канторовым [2, теорема 2].*

Замечание 2. Наряду с вполне простыми полугруппами существуют и другие полугруппы, являющиеся объединениями своих минимальных правых идеалов. Например, таковой является полугруппа Бэра–Леви (см. [5, §8.2]) и вообще любая простая справа полугруппа без идемпотентов.

Перейдём теперь к полигонам с нулём над полугруппой с нулём. Полигон X с нулём θ над полугруппой S с нулём 0 называется 0-простым, если $XS \neq \{\theta\}$ и X не имеет подполигонов, отличных от $\{\theta\}$ и X. Это равносильно, очевидно, следующему: $\{x\} \cup xS = X$ для любого $x \neq \theta$. Пусть теперь X – полигон, являющийся объединением 0-простых подполигонов. Очевидно, тогда X будет 0-копроизведением 0-простых подполигонов: $X = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 X_\gamma$, т.е. $X = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ и $X_\gamma \cap X_{\gamma''} = \{\theta\}$ при $\gamma \neq \gamma'$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для полигонов с нулём.

Теорема 2. *Пусть X — полигон с нулём θ над полугруппой S с нулём* 0*. Если X является объединением 0-простых полигонов, то X канторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что если X — объединение 0-простых подполигонов, то θ — общий нуль этих подполигонов и X является 0-копроизведением 0-простых подполигонов: $X = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\ 0} X_\gamma$. Пусть Y — произвольный полигон над S и существуют инъективные гомоморфизмы $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$. Так как ψ инъективно, то $Y \cong \psi(Y)$. Если $y \in \psi(Y)$, то $\theta = 0u \in \psi(Y)$, поэтому $\psi(Y)$ — полигон с нулём, а значит, Y — полигон с нулём. Обозначим этот нуль через θ_1. Очевидно, $\varphi(\theta) = \theta_1$ и $\psi(\theta_1) = \theta$.

Так как каждый элемент полигона X содержится в каком-либо 0-простом подполигоне, то $\psi(Y)$ — объединение 0-простых полигонов, а значит, Y — также объединение 0-простых полигонов, поэтому Y — 0-копроизведение 0-простых: $Y = \coprod\limits_{\mu\in M}^{\ 0} Y_\mu$.

Очевидно, $\varphi(\theta) = \theta_1$ и $\psi(\theta_1) = \theta$.

Покажем, что если $x \in X_\gamma \setminus \{\theta\}$ и $\varphi(x) = y \in Y_\mu$, то $\varphi(X_\gamma) = Y_\mu$. Действительно, так как X_γ 0-минимальный и $x \neq \theta$, то $X_\gamma = xS$. Так как $x \neq 0$, то $y \neq \theta_1$. Вследствие 0-минмальности полигона Y_μ имеем: $yS = Y_\mu$. Отсюда получаем: $\varphi(X_\gamma) = \varphi(xS) = \varphi(x)S = yS = Y_\mu$.

Аналогично получаем, что $\psi(Y_\nu) = X_\delta$ для любого $\nu \in M$ и подходящего (зависящего от ν) индекса $\delta \in \Gamma$.

Нетрудно увидеть, что всякий подполигон X' полигона X содержит θ и имеет вид $X = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma'}^{\ 0} X_\gamma$ для некоторого подмножества $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Рассмотрим множества $P_1 = (X \setminus \psi(Y))^0$, $P_2 = \psi(\varphi(P_n))$ и так далее, то есть $P_{n+1} = \psi(\varphi(P_n))$ при всех n. Так как ψ и φ — гомоморфизмы, то P_k — подполигоны полигона X.

При $n \geqslant 2$ имеем $P_n \subseteq \psi(Y)$, поэтому $P_1 \cap P_n = \varnothing$ при $n \geqslant 2$. Учитывая то, что φ

и ψ инъективны, индукцией по k нетрудно доказать, что $P_k \cap P_m = \{\theta\}$ при $m > k$. Положим $P = \bigcup\limits_{k\geqslant 2} P_k$. Вследствие только что доказанного получаем: $X = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} {}^0 P_k$.

Определим отображение $\sigma : X \mapsto Y$ по формуле

$$\sigma(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in P, \\ \psi^{-1}(x), & \text{если } x \notin P. \end{cases}$$

Аналогично теореме 1 доказывается, что σ — изоморфизм полигонов X и Y. □

Правый идеал N полугруппы S с нулём 0 называется 0-минимальным, если для любого правого идеала N' справедлива импликация $0 \subset N' \subseteq N \to N' = N$. Правый идеал N называется 0-простым, если N является 0-минимальным и $NS \neq \{0\}$. Очевидно, N — 0-простой в том и только том случае, если $aS = N$ для любого $a \in N \setminus \{0\}$.

Следующее утверждение является аналогом предложения 1 для полугрупп с нулём. В этом утверждении отмечается один класс полугрупп, над которыми любой квазиунитарный полигон является копроизведением 0-простых полигонов.

Предложение 2. *Если полугруппа S с нулём 0 является объединением 0-простых правых идеалов, то всякий квазиунитарный полигон X с нулём является 0-копроизведением 0-простых полигонов.*

Доказательство. По условию S — объединение 0-простых правых идеалов, т.е. $S = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma$, где N_γ — 0-простые правые идеалы. Пусть X — квазиунитарный полигон с нулём θ над полугруппой S. Напомним, что мы требуем выполнения равенств $x \cdot 0 = \theta \cdot s = \theta$ при всех $x \in X, s \in S$.

Пусть $x \in X$ и $x \neq \theta$. Так как X квазиунитарный, то $x = x's$ при некоторых $x' \in X, s \in S$. Так как $x \neq \theta$, то $s \neq 0$. Так как N_γ 0-простой, то $sS = N_\gamma$.

Докажем, что $x \in xS$. Действительно, $x = x's \in x'N_\gamma = x'sS = xS$. Возьмем любой элемент $u \in xS \setminus \{\theta\}$. Имеем $u = xt$ при некотором $t \in S$. Отсюда $u = x'st$. Так как $u \neq \theta$, то $st \neq 0$, а так как $s \in N_\gamma$, то $st \in N_\gamma$. Так как N_γ 0-простой и $st \neq 0$, то $stN_\gamma = N_\gamma$. Имеем $xS = x'sS = x'N_\gamma = x'stN_\gamma = uN_\gamma \subseteq uS \subseteq xS$. Отсюда следует, что $uS = xS$. Вследствие произвольности элемента u получаем, что xS — 0-простой подполигон полигона X. Учитывая, что $x \in xS$, получаем, что X — объединение 0-простых полигонов. Это влечёт за собой то, что X является 0-копроизведением 0-простых полигонов. □

Примерами полугрупп с нулём, являющихся объединениями 0-простых правых идеалов, служат вполне 0-простые полугруппы $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Действительно, $\mathcal{M}_0 = \bigcup\{R_i^0 | i \in I\}$, где $R_i^0 = \{(\mathrm{g})_{i\lambda} | \mathrm{g} \in G, \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$ — 0-простые правые идеалы. Таким образом, из теоремы 2 и предложения 2 можно вывести следствие 4.

Следствие 4. *Всякий квазиунитарный полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой канторов.*

В заключение отметим, что R_i^0, хотя и является 0-простым правым идеалом, но не является в общем случае 0-простой справа полугруппой в смысле [5, §2.5], так как если, скажем, $p_{\lambda i} = 0$, то $(R_i^0)^2 = 0$.

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.

[2] А. С. Сотов, "Теорема Кантора – Бернштейна для полигонов над группами", *Материалы VI Межд. конф. СИТОНИ-2019*, Изд-во ДонНТУ, Донецк, 2019, 120–123.

[3] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Monoids, acts and categories*, W. de Gruyter, Berlin – N.-Y., 2000.

[4] И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв, "Полигоны над полугруппами.", *Фундаментальная и прикладная математика*, **23**:3 (2020), 141–191.

[5] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. 1, 2, Мир, М., 1987.

[6] A. Yu. Avdeyev, I. B. Kozhukhov, "Acts over completely 0-simple semigroups", *Acta Cybernetica*, **14**:4 (2000), 523–531.

[7] И. Б. Кожухов, А. О. Петриков, "Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами", *Фундаментальная и прикладная математика*, **21**:1 (2016), 123–133.

[8] И. Б. Кожухов, А. О. Петриков, "Проективные и инъективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой", *Чебышёвский сб.*, **17**:4 (2016), 65–78.

Поступила в редакцию
29 марта 2022 г.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 22-11-00052.

Kozhuhov I. B.[1,2], *Sotov A. S.*[2] Cantor property of quasi-unitary acts over completely (0-)simple semigroups. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 1. P. 27–33.

[1] National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia
[2] Lomonosov Moscow State University, Russia

ABSTRACT

A universal algebra A is called cantorian if for any algebra B of the same signature, the existence of injective homomorphisms $A \to B$ and $B \to A$ implies an isomorphism of algebras A and B. A right act X over a semigroup S is called quasiunitary if $X = XS$. We prove that every quasiunitary act over a completely simple semigroup and also every quasiunitary act with zero over a completely 0-simple semigroup are cantorian.

Key words: *act over semigroup, universal algebra, finiteness condition.*