Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 1. С. 3–11

УДК 511.42
MSC2020 11J83

© В. И. Берник[1], А. С. Кудин[1], А. В. Титова[1]

Различие мер Хаара цилиндров в теореме Дирихле для поля p-адических чисел

Принцип ящиков Дирихле дает удивительно точные результаты в задачах о приближении действительных чисел рациональными, трансцендентных чисел действительными алгебраическими. Каждый многочлен, принимающий малые значения в данной точке x, принимает малые значения и в её окрестности. Часто возникает проблема изучения подобных окрестностей и получения возможных значений мер Лебега для них. В данной статье мы решаем эту проблему в p-адическом случае, используя последние результаты метрической теории диофантовых приближений.

Ключевые слова: *диофантовы приближения, мера Хаара, p-адические числа, теорема Дирихле.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202301

Теория диофантовых приближений — раздел теории чисел, в котором исследуются проблемы приближения действительных чисел рациональными числами, трансцендентных чисел алгебраическими числами [1–4]. Принято считать, что первой теоремой этой теории стал результат Дирихле. Также в теории диофантовых приближений рассматривается обобщение теоремы Дирихле на поля действительных, комплексных, p-адических чисел, а также на совместные приближения.

Теорема Дирихле. Для любых действительных чисел x и натуральных чисел $Q > 1$ всегда найдутся целые числа p и q, $1 \leqslant q \leqslant Q$, при которых верны неравенства

$$|x - \frac{p}{q}| < q^{-1}Q^{-1} \text{ или } |qx - p| < Q^{-1}. \tag{1}$$

Неравенство (1) усиливалось и обобщалось во многих направлениях. Кратко изложим основные результаты, близкие к данной работе. Пусть $\mu_1(A)$ и $\mu_2(B)$ — меры Лебега и Хаара измеримых множеств $A \subset R$ и $B \subset Q_p$ (поле p-адических чисел), $I \subset R$ — интервал, $K \subset Q_p$ — цилиндр в Q_p [1, 4], $\psi(x)$ — монотонно убывающая функция действительного аргумента $x > 0$.

[1] Институт математики НАН Беларуси, 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11.
Электронная почта: `bernik.vasili@mail.ru` (В. И. Берник), `knxd@yandex.ru` (А. С. Кудин), `anastasia.titova111@gmail.com` (А. В. Титова).

Теорема Хинчина [5]. Обозначим через $L_1(\psi)$ множество действительных чисел $x \in I$, для которых неравенство

$$|qx - p| < \psi(q) \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в целых p, q. Тогда

$$\mu_1 L_1(\psi) = \begin{cases} 0, \text{если } \sum\limits_{q=1}^{\infty} \psi(q) < \infty \\ \mu I, \text{если } \sum\limits_{q=1}^{\infty} \psi(q) = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

В работе [6] Малер предложил рассматривать неравенство (2) в полиномах произвольной степени n и множества действительных чисел $L_n(\psi)$, для которых неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-n+1}\psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P_n(x)$ степени $deg P \leqslant n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ (a_j — коэффициенты $P(x)$). Малер доказал, что $\mu_1(L_n(\psi)) = 0$ при $\psi(x) = x^{-w}, w > 4n$ и предположил справделивость своей теоремы уже при $w > n$. После ряда усилений результата Малера [1, 7], его гипотезу доказал Спринджук [1,2]. При произвольной функции $\psi(x)$ в работах [8,9] получен результат, обобщающий теорему Хинчина на многочлены произвольной степени:

$$\mu_1 L_n(\psi) = \begin{cases} 0, \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty \\ \mu I, \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Кривая $\Gamma = \left(x, x^2, \dots, x^n\right)$ — полиномиальная. Что произойдет, если кривую Γ заменить на кривую $G = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ произвольного вида? Назовём кривую G невырожденной, если $f_j(x) \in C^{n+1}(I)$ и вронскиан $W\left(f_1', f_2', \dots, f_n'\right) \neq 0$ для почти всех x. В работах [10–12] для кривой G доказана теорема, обобщающая (4) на произвольные невырожденные кривые и поверхности.

Параллельно с метрической теорией диофантовых приближений в поле действительных чисел рассматривались аналогичные проблемы в полях комплексных и p-адических чисел [1, 13].

При этом многочлены и невырожденные функции рассматривались в классе полиномов и функций

$$\mathscr{P}_n(Q) = \{P(t) \in Z[t], deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\}.$$

Обозначим через $B_n(\psi)$ множество p-адических чисел $w \in Q_p$, для которых неравенство

$$|P_n(x)|_p < H^{-n}\psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(w)$ p-адической переменной w с целыми рациональными коэффициентами. Фолькман [7] доказал аналог гипотезы

Малера в Q_p для многочленов третьей степени, а Спринджук [1, 4] — для произвольной степени n. В работах [4, 13] Бересневич, Берник, Ковалевская получили полный аналог (3) для ω из некоторого цилиндра $K \subset Q_p$.

Теорема 1. *При любом n справедливо равенство*

$$\mu_2 B_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty \\ \mu K, & \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty. \end{cases}$$

В статье [14] при $w > n+1$ найдена размерность Хаусдорфа множества $\omega \in Q_p$, для которых неравенство

$$|P(\omega)| < H^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в $P(\omega) \in Z[\omega]$. Она оказалась равной $\frac{n+1}{w}$.

В работе [1] доказано, что в действительном случае при выполнении неравенства $|P(x)| < Q^{-n}$ множество его решений $\sigma(P)$ может иметь меру, равную Q^{-n-1+v}, для любого $0 \leqslant v < 1$. В данной работе мы устанавливаем p-адическую версию этого результата.

Теорема 2. *Обозначим через B_1 множество p-адических чисел $\omega \in K \subset Q_p$, для которых выполняется неравенство Дирихле $|P(\omega)|_p < Q^{-n-1}$. Тогда при любом $0 \leqslant v < \frac{1}{2}$ найдутся полиномы $P(\omega) \in \mathscr{P}_n(Q)$, для которых справедливо неравенство $\mu_2 \sigma(P) \asymp Q^{-n-1+v}$.*

Для доказательства необходимо несколько лемм. Через $c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать величины, зависящие от n и не зависящие от Q. Если $S_1 < c_1 S_2$ и $S_2 < c_2 S_1$, то будем записывать $S_1 \asymp S_2$.

Лемма 1 [1, 4]. *Пусть γ_1 — ближайший корень полинома $P(\omega)$ к ω, то есть*

$$|\omega - \gamma_1|_p = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} |\omega - \gamma_j|_p.$$

Тогда

$$|\omega - \gamma_1|_p \leqslant |P(\omega)|_p |P'(w)|_p^{-1}, \quad |\omega - \gamma_1|_p \leqslant |P(\omega)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1},$$
$$|\omega - \gamma_1|_p \leqslant (|P(\omega)|_p |P'(\gamma_1)|_p |\gamma_1 - \gamma_2|_p)^{1/2}.$$

Лемма 2 [1, 4]. *Если $|a_n|_p > c_3$, то при любом $1 \leqslant j \leqslant n$ верно неравенство*

$$|\gamma_j|_p < c_4.$$

Лемма 3. *При $|P'(\omega)|_p > n^2 Q^{-\omega_1}$, $\omega_1 > \frac{n}{2}$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}|P'(\omega)|_p < |P'(\gamma_1)|_p < 2|P'(\omega)|_p.$$

Лемма 3 — аналог результата в [15].

Лемма 4 (Лемма Гензеля, [4]). *Пусть $P(\omega)$ — полином с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ и $\xi = \xi_0 \in \mathbb{Z}_p$. Пусть $|P'(\xi)|_p < |P'(\xi)|_p^2$. Тогда при $n \longrightarrow \infty$ последовательность*

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{P(\xi_n)}{P'(\xi_n)}$$

стремится к некоторому корню $\beta \in Q_p$ полинома $P(\omega)$ и

$$|\beta - \xi|_p \leqslant |P(\xi)|_p |P'(\xi)|_p^{-2} < 1.$$

Лемма 5 [1]. *Если $P(\omega) = t_1(\omega) t_2(\omega)$, то*

$$c_5 H(P) < H(t_1) H(t_2) < c_6 H(P).$$

Лемма 6 [4]. *Если $|P(\omega)|_p < Q^{-w}$ для $\omega \in B_2$, $\mu_2 B_2 > \frac{1}{2}\mu_2 K$, то для всех $\omega \in K$ верно неравенство $|P(\omega)|_p < c_7 Q^{-\omega}$.*

Лемма 7 [4]. *Пусть полиномы $P_1(\omega), P_2(\omega)$ степени $n \geqslant 2$ без общих корней в цилиндре $K \subset Q_p$, $\mu K = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, принимают значения $\max\Big(|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p\Big) < Q^{-\theta}$, $\theta > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ верно неравенство*

$$\theta + 2 \sum_{k=1}^{n} \max(\theta - k\eta, 0) < 2n + \delta.$$

Корни многочленов $P(\omega) \in \mathscr{P}_n(Q)$ обозначим $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ и упорядочим следующим образом:

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \leqslant |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leqslant \ldots \leqslant |\gamma_1 - \gamma_n|_p.$$

Для достаточно малого $\epsilon_1 > 0$ и $T = [\epsilon_1^{-1}] + 1, [\epsilon_1^{-1}]$ — целая часть $\epsilon_1 > 0$, положим $H = H(P)$ и

$$|\gamma_1 - \gamma_i|_p = H^{-\rho_i}, \quad \frac{l_j - 1}{T} \leqslant \rho_i \leqslant \frac{l_j}{T}, \quad l_j \in Z,$$
$$p_1 = (l_2 + \ldots + l_n) T^{-1}, \quad p_j = (l_{j+1} + \ldots + l_{n-1}) T^{-1}, \quad 2 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Нетрудно доказать [1], что количество векторов $\bar{l} = (l_2 + \ldots + l_n) T^{-1}$ не зависит от H и Q.

Учитывая леммы, классификацию корней, а также начало доказательства проблем Малера [1] и Бейкера [4], в дальнейшем считаем, что выполнены неравенства

$$|\gamma_j|_p < c_8, \quad H > \frac{Q}{2}.$$

Основная лемма. *Обозначим через $B_3(\delta_0, s_0)$ множество $\omega \in K$, для которых выполняется система неравенств*

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |P(\omega)|_p < s_0 Q^{-v_0}, \ v_0 + v_1 = n + 1, \\ \delta_0 Q^{-v_1} < |P'(\omega)|_p < s_0 Q^{-v_1}, \ v_0 > 2v_1. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда существуют (δ_0, s_0), для которых

$$\mu B_3(\delta_0, s_0) > \frac{3}{4}\mu K.$$

Доказательство. Обозначим через $B_4(\delta_0, s_0)$ множество $\omega \in K$, для которых не выполняется система неравенств (5). Применив принцип ящиков Дирихле при $v_0 + v_1 = n+1$, легко найдем s_0, при котором верны верхние оценки в (5). Предположим, что в (5) невозможно найти δ_0, что неверна оценка в (5), например

$$Q^{-v_2} < |P'(\omega)|_p < \delta Q^{-v_1}, \quad v_2 > v_1,$$

поскольку это наиболее трудная часть леммы. На цилиндре $K_1, \mu_2 K_1 = H^{-\frac{l_2}{T}}$ разложим полиномы $P(\omega)$ в ряд Тейлора

$$P(\omega) = P(\gamma_1) + P'(\gamma_1)(\omega - \gamma_1) + \frac{1}{2}P''(\gamma_1)(\omega - \gamma_1)^2 + \dots. \tag{6}$$

Так как $P'(\gamma_1) = a_n(\gamma_1 - \gamma_2)\dots(\gamma_1 - \gamma_n)$, то по лемме 1

$$|P'(\gamma_1)|_p |(\omega - \gamma_1)|_p < c_9 Q^{-p_1 - v_0 + v_2}, \quad |P''(\gamma_1)|_p |(\omega - \gamma_1)|_p^2 < c_{10} Q^{-p_2 - 2v_0 + 2v_2}.$$

Остальные члены разложения в (6) имеют меньший порядок за счет возрастающих степеней $|\omega - \gamma_1|_p^k$, поэтому для всех $\omega \in K_1$ верно неравенство

$$|P(\omega)|_p < c_{11} Q^{-p_1 - l_2 T^{-1}}. \tag{7}$$

Предположим, что существует не более $c_{12} Q^{n+1-l_2T^{-1}-p_1-\epsilon}$ полиномов $P(\omega)$, $\deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q$, для которых выполняются неравенства (7) для всех $\omega \in K$, $\mu K = Q^{-l_2 T^{-1}}$. Обозначим множество решений (7) при фиксированном $P(\omega)$ через $\sigma(P)$. Имеем

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_n(Q)} \mu\sigma(P) < c_{13} Q^{-\epsilon}.$$

Если же количество таких многочленов превосходит

$$c_{14} Q^{n+1-l_2T^{-1}-p_1-\epsilon}, \quad n + 1 - l_2 T^{-1} - p_1 - \epsilon > 1,$$

то применим принцип ящиков Дирихле. Окажется, что у $Q^m = Q^{l_2T^{-1}+p_1+2v-2+2n\epsilon}$ многочленов коэффициенты при старших степенях многочленов $P(\omega)$ совпадают. Возьмем разность таких многочленов. Получим не менее $c_{15} Q^{\epsilon}$ полиномов $R_j(\omega) = P_{j+1}(\omega) - P_0(\omega)$, удовлетворяющих на K неравенствам

$$|R_j(\omega)|_p < c_{16} Q^{-p_1 - l_2 T^{-1}}, \quad \deg R_j \leqslant l_2 T^{-1} + p_1 + 2v - 2 + 2n\epsilon.$$

Если среди таких многочленов окажется хотя бы два без общих корней, то применим лемму 7.

Применив затем лемму 4, получим, что $\gamma_1 \in Q_p$. Для полиномов $R_j(\omega), j = 1, \dots, Q^{\epsilon}$ без общих корней верны соотношения

$$\theta = l_2 T^{-1} + p_1, \quad 2\max\left(\theta - l_2 T^{-1}, p\right) = l_2 T^{-1} + 3p_1$$
$$\deg R_j \leqslant l_2 T^{-1} + p_1 + 2v - 2 + 2n\epsilon$$

при $v < \frac{1}{2}, 2v + \delta < 1$ и

$$l_2T^{-1} + 3p_1 > 2l_2R^{-1} + 2p_1 + \Delta + 4n\epsilon_1 - 1 + \delta + 2v. \tag{8}$$

При достаточно больших Q неравенство (8) противоречиво.

Если среди полиномов $R_j(\omega)$ не окажется полиномов без общих корней, то эти полиномы приводимы.

Положим

$$R_j(\omega) = t_1(\omega)t_2(\omega)$$

и введем обозначения, используя при этом лемму 5:

$$t_1(\omega) : \deg t_1 = n_1, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant m - 1, \quad m = l_2T^{-1} + p_1 + v - 1 - \theta\epsilon_1, \quad \theta < 4n\epsilon_1,$$

m — натуральное число. Введем число a, связанное с малостью $|t_1(\omega)|_p$:

$$|t_1(\omega)|_p < Q^{-a}, 0 \leqslant a \leqslant l_2T^{-1} + p_1.$$

Рациональное число $a = \frac{s}{T}$ определим из

$$\mu_2\left(\omega \in Q_p : |t_1(\omega)|_p < Q^{-a}\right) < \frac{1}{2}Q^{-l_2T^{-1}}, \quad H(t_1) = Q^{\lambda}, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

в цилиндре K_1, но уже неравенство

$$|t_1(\omega)|_p^{-a-\epsilon} \leqslant Q^{-a-\epsilon}$$

верно в цилиндре $K_2, \mu K_2 \leqslant \frac{1}{2}Q^{-l_2T^{-1}}$. Воспользуемся леммой 6. Тогда неравенство

$$|t_2(\omega)|_p < c_{17}Q^{-l_2T^{-1}-p_1+a+\epsilon} = c_{17}Q^{-\frac{m-a-\epsilon}{1-\lambda}(1-\lambda)}, \quad H(t_2) = c_{18}Q^{1-\lambda},$$

выполняется в цилиндре $K_3, \mu K_3 = c_{19}Q^{-l_2T^{-1}}$.

Если окажется, что

$$Q^{-a} = Q^{-\lambda\frac{a}{\lambda}} < H(t_1)^{-\frac{a}{\lambda}}, \quad \frac{a}{\lambda} > n_1, \tag{9}$$

то, согласно методу математической индукции, мера всех решений неравенства (9) не превосходит $Q^{-\epsilon_2}$. Если же верно неравенство

$$|t_2(\omega)|_p < Q^{-(1-\lambda)\frac{m-a-\epsilon}{1-\lambda}} < H(t_2)^{-\frac{m-a-\epsilon}{1-\lambda}}, \tag{10}$$

то с помощью метода математической индукции заключаем, что мера всех решений неравенства (10) также не превосходит $Q^{-\epsilon_2}$. Таким образом или лемма доказана, или остается случай выполнения системы неравенств

$$\begin{cases} a < \lambda n_1, \quad l_2T^{-1} + p_1 - a - \epsilon \leqslant (1-\lambda)(n - n_1), \\ 0 \leqslant a \leqslant l_2T^{-1} + p_1, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant m - 1. \end{cases} \tag{11}$$

Покажем, что система неравенств (11) противоречива. Перепишем второе неравенство в (11) в виде

$$f(\lambda, n_1) = l_2T^{-1} + p_1 - a - \epsilon - (1-\lambda)(m - n_1) \leqslant 0$$

и убедимся, что уже при $a=\lambda n_1$ оно противоречиво. Рассмотрим функцию

$$l_2T^{-1}+p_1-\lambda n_1-\epsilon+(1-\lambda)(m-n_1)$$

при условиях (11). Наименьшее значение функция $\phi(\lambda,n_1)$ принимает или в точке экстремума, в которой $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=0$ и $\frac{\partial\phi}{\partial n_1}=0$, или в точках $(0,1),(0,m-1),(1,1),(1,m-1)$.

Найдем частные производные функции $\phi(\lambda,n_1)$ по λ и n_1:

$$\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=m-2n_1\\ \frac{\partial\phi}{\partial n_1}=1-2\lambda,\end{cases}\quad\begin{cases}n_1=\frac{m}{2}\\ \lambda=\frac{1}{2},\end{cases}\tag{12}$$

и вычислим ее значения при $n_1=\frac{m}{2}$, $\lambda=\frac{1}{2}$, а затем в вершинах прямоугольника (11). Получим

$$\phi\left(\frac{1}{2},\frac{m}{2}\right)=l_2T^{-1}-\epsilon,\quad \phi(0,m-1)=l_2T^{-1}+p_1-\epsilon-1,$$
$$\phi(0,1)=v+2-\epsilon,\ \phi(1,1)=l_2T^{-1}+p_1-\epsilon-1,\ \phi(1,m-1)=2v+1-\epsilon.$$

Используем (11). Все 5 неравенств в (12) противоречивы.

К неравенству $|P(\omega)|_p<Q^{-n-1+v}$ применим лемму 1. Получим два неравенства для $|\omega-\gamma_1|_p$:

$$|\omega-\gamma_1|_p<c_{20}Q^{-n-1+v+p_1},\quad |\omega-\gamma_1|_p<c_{21}Q^{-\frac{n+1-v-p_2}{2}}.\tag{13}$$

Первое неравенство в (13) будет сильнее, если

$$2n+2-2v-2p_1>n+1-v-p_2, n+1-v>p_1+l_2T^{-1},$$

так как $p_1-p_2=l_2T^{-1}$. Поэтому первое неравенство в (13) использовалось в предыдущем доказательстве леммы. Пусть теперь

$$l_2T^{-1}+p_1\geqslant n+1-v.\tag{14}$$

Предположим, что неравенству (14) удовлетворяют два и более многочлена $P_j(\omega)\in P_n(Q)$, $j\geqslant 2$ без общих корней, и пусть $\omega\in K$, с условием $\mu_2K=Q^{-\frac{n+1-p_2}{2}}$. Разложим эти многочлены на K в ряд Тейлора:

$$P_j(\omega)=P_j(\gamma_1)+P_j'(\gamma_1)(\omega-\gamma_1)+\frac{1}{2}P_j''(\gamma_1)(\omega-\gamma_1)^2+\dots\tag{15}$$

Так как

$$|P_j(\gamma_1)|_p<Q^{-n-1+v},\quad |P_j'(\gamma_1)|_p|\omega-\gamma_1|_p<Q^{-p_1-\frac{n+1-p_2}{2}}=Q^{-\frac{n+1+l_2T^{-1}+p_2}{2}},$$
$$|P_j''(\gamma_1)|_p|\omega-\gamma_1|_p^2<Q^{-p_2-n-1+p_2}=Q^{-n-1},$$

а остальные члены разложения в (15) имеют меньший порядок, то для всех $\omega\in K$ имеем

$$|P_j(\omega)|_p<c_{22}Q^{-n-1+v}.$$

Применим к многочленам $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$ из $P_n(Q)$ степени n лемму 7. Здесь

$$\theta = n+1-v, \quad 2\max\left(\theta - \frac{n+1-p_2}{2}, 0\right) = 2n+2-2v-1+p_2 = n+1-2v+p_2.$$

Левая часть в лемме 7 приобретает вид $2n+2-3v+p_2$, а правая $2n+\delta$. Так как $2-3v>\delta$, то при $v<\frac{1}{2}$ это неравенство становится противоречивым.

Если среди многочленов $P_j(\omega)$ не найдется двух многочленов без общих корней, то, выделяя общий делитель $d(\omega)$, среди многочленов $P_j(\omega)=d(\omega)t_j(\omega)$ можно найти $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$ такие, что $t_1(\omega)$ и $t_2(\omega)$ не имеют общих корней. Применим к $t_1(\omega)$ и $t_2(\omega)$ те же рассуждения, что и для $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$ в случае отсутствия общих корней. Лемма доказана. □

Закончим доказательство теоремы. Так как $\mu_2 B_4<\frac{1}{4}\mu K$, то $\mu_2 B_3\geqslant\frac{3}{4}\mu K$. Возьмем $\omega_1\in B_3$. Тогда найдется $\gamma_1\in Q_p$, для которого верно неравенство

$$|\omega_1-\gamma_1|_p < Q^{-n-1+2v}. \tag{16}$$

Пусть $B_5\subset Q_p$ — множество решений неравенства (16). Рассмотрим множество

$$B_{31} = K\backslash B_5 \tag{17}$$

и возьмем $\omega_2\in B_{31}$. Вновь можно найти $\gamma_2\in Q_p$ и

$$|\omega_2-\gamma_2|_p < c_{23}Q^{-n-1+2v}.$$

Процедуру построения новых корней $\gamma_3,\dots,\gamma_t$ можно продолжить до тех пор, пока цилиндрами не исчерпаем множество с мерой $\frac{3}{4}\mu K$. Поэтому

$$t > \frac{3\mu_2 K}{4Q^{-n-1+2v}} = \frac{3}{4}Q^{n+1-2v}\mu_2 K.$$

Несколько уменьшим цилиндры (17). Будем рассматривать только $\omega\in Q_p$, для которых выполняется неравенство

$$|\omega-\gamma_i|_p < Q^{-n-1}. \tag{18}$$

Цилиндр (18) — цилиндр Дирихле, и таких цилиндров не менее $c_{24}Q^{n+1-2v}\mu_2 K$, что и доказывает теорема.

Список литературы

[1] В. Г. Спринджук, *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Москва, 1967.

[2] В. Г. Спринджук, *Метрическая теория диофантовых приближений*, Москва, 1977.

[3] B. Volkmann, “The real cubic case of Mahler's conjecture”, *Mathematika*, 1961.

[4] V. Bernik, F. Götze, *Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals*. V. 79, 2015.

[5] K. Mahler, “Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen”, *Mathematische Annalen*, 1932.

[6] V. I. Bernik, M. M. Dodson, “Metric Diophantine approximation on manifolds”, *Cambridge Tracts in Math*, 1999.

[7] A. Khintchine, “Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der Diophantischen approximationen”, *Mathematische Annalen*, **92** (1924).

[8] В. И. Берник, “О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов”, *Acta Arithmetica*, **53** (1989).

[9] V. Beresnevich, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers”, *Acta Arithmetica*, 1999.

[10] V. Beresnevich, “A Groshev type theorem for convergence on manifolds”, *Acta Mathematica Hungarica*, 2002.

[11] V. Bernik, D. Kleinbock, G. Margulis, “Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions”, *International Mathematics Research Notices*, 2001.

[12] Y. Bugeaud, “On the approximation to algebraic numbers by algebraic numbers”, *Cambridge Tracts in Math*, 2004.

[13] V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, E. I. Kovalevskaya, “On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers”, *Journal of Number Theory*, **111** (2005).

[14] В. И. Берник, И. Л. Мороцкая, “Диофантовы приближения в Q_p и размерность Хаусдорфа”, *Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук*, 1986.

[15] В. И. Берник, И. А. Корлюкова, А. С. Кудин, А. В. Титова, “Целочисленные многочлены и теорема Минковского о линейных формах”, *Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы*, 2022.

Поступила в редакцию
3 октября 2022 г.

Bernik V. I.[1] *Kudin A. S.*[1], *Titova A. V.*[1] Distinction of measures of Haar cylinders in the Dirichlet theorem for the field of p-adic numbers. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 1. P. 3–11.

[1] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus

ABSTRACT

The Dirichlet box principle gives surprisingly accurate results in problems of approximation of real numbers by rational numbers, transcendental numbers by real algebraic numbers. Every polynomial taking small values at a given point x also takes small values in its neighborhood. A problem of studying such neighborhoods and obtaining possible Lebesgue measure values arises frequently. In this paper we solve the problem in the p-adic case using recent results of the metric theory of Diophantine approximations.

Key words: *Diophantine approximations, Haar measure, p-adic numbers, Dirichlet theorem.*