

УДК 519.254
MSC2020 62-07

© М. А. Гузев¹, Е. Ю. Никитина²

Динамика «имперских хвостов» на примере коронавирусной инфекции

В работе на примере исследования заболеваемости COVID-19 в Приморском крае в 2020-2022 гг. обсуждается динамика ранговых распределений с учетом периодичности процесса заболеваемости и дается объяснение природы «имперских хвостов». Показано, что выбранный способ моделирования находится в рамках общего тренда исследований развития пандемического процесса, а найденные характеристические параметры близки к классическим оценкам.

Ключевые слова: ранговое распределение, закон Ципфа, имперский хвост.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202203>

Введение

Методы моделирования с помощью частотно-ранговых распределений давно используются при описании количественных характеристик наблюдаемых явлений. Среди классических сфер приложения этих методов можно указать предметные области демографии [1], биологии [2, 3], сейсмологии [4], лингвистики [5]. В [6] приводятся примеры из физики, наук о Земле, экологии, палеонтологии, компьютерных и информационных наук, инженерии, социальных наук и пр.

В классических ранговых распределениях (Ципфа, Парето, Лотки, Мандельброта) рассматриваются только целая величина — ранг (номер) объекта — и частота встречаемости рассматриваемой характеристики объекта: задается ранг и ему сопоставляется частота встречаемости.

Закон Ципфа связывает эти характеристики следующим образом: $\omega r = const$. Модификации закона Ципфа имеют представление общей формулой вида $r\omega^\gamma = const$, в котором изменяется только параметр распределения γ .

Однако классические ранговые распределения плохо «работают» на реальных наборах накопленных данных, многие исследователи, отмечая это, предлагали уточнения для этого закона [7–11].

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

² Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, о. Русский, нп. Аякс, 10.
Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru (М. А. Гузев), nikitina.eyu@dvfu.ru (Е. Ю. Никитина).

В настоящее время модель реальных ранговых распределений реализована в работах В.П. Маслова. В [12] представлена общая теорема об оценке числа неэквивалентных отображений между двумя множествами, применяемая в частотной теории вероятностей. Для упорядоченных значений x_i случайной величины вводится n_i — число «выпадений» значения x_i , тогда распределение величин определяется через кумулятивную вероятность $P_s = \sum_{i=1}^s n_i/N$, где $N = \sum_{i=1}^k n_i$ — число испытаний и $s \leq k$. Согласно теореме В.П. Маслова, если все варианты наборов $\{n_i\}$, для которых $\sum_{i=1}^s x_i n_i \leq M$ равновероятны, то распределение $\sum_{i=1}^s n_i = N_s$ определяется зависимо-
 стью

$$N_s = \sum_{k=1}^s \frac{1}{e^{\beta x_k + \sigma} - 1}, \tag{1}$$

где параметры β и σ задаются условиями нормировки.

Возможности своего подхода для решения различных задач В.П. Маслов представил в работах [13–15]. В [13] В.П. Маслов вводит виртуальную частоту встречаемости события $\tilde{\omega}_i$, которая больше исходной частоты, это позволяет учитывать в итоговой модели процесса скрытые, утраченные, незафиксированные данные. Тогда при вычислении ранга с помощью формулы (1) следует использовать $\tilde{\omega}_i$ вместо x_i .

Выбирая параметризацию в виде $\tilde{\omega}_i = \omega_i(1 + \alpha\omega_i^\gamma)$, где $\alpha, \gamma > 0$, в [15] В.П. Маслов, Т.В. Маслова получили логарифмический закон

$$r_l = A \ln \frac{\omega_l^\gamma}{1 + \alpha\omega_l^\gamma} + c. \tag{2}$$

Возможность использования логарифмического закона (2) для анализа различных систем авторами данной статьи описана в работе [16].

Однако заметим, что методология частотно-ранговых распределений, предполагающая перегруппировку данных в соответствии с принципом «ранг – частота», в ситуации общего положения исключает из анализа время (исключением является случай, когда ранг монотонно зависит от времени). Учесть время можно при анализе факторов, определяющих состояние однородных по свойствам объектов, динамика которых разделена временным интервалом. В качестве примера следует привести ранговый анализ жизненного цикла политий [17], для которых занимаемая площадь является характеристикой империй и государств. Дело в том, что характер линии является отражением структурных характеристик и динамики крупных политий. Чем сложнее внутренняя структура политики и продолжительнее её существование, тем ближе ранговая кривая распределения её площадей к классическому виду ципфовской кривой. Такая кривая, в частности, характерна для древних империй, сохранивших свою целостность, например, Китая. Для империй, подвергшихся необратимому распаду: Древнего Рима, Османской империи и др. — наблюдается резкий рост значений рангов для больших значений площадей.

Этот феномен резкого роста значения ранга и, как следствие, наличие «хвоста» у графика рангового распределения, был назван «имперским хвостом» [17]. Наша гипотеза заключается в том, что амплитуда и расположение «имперского хвоста»

зависят от динамики политий. Из-за ограниченности данных исследования дальнейшая верификация нашего утверждения была затруднительна. Однако пандемия COVID-19 дала динамический материал для исследования явления «имперского хвоста».

Раздел 2 включает информацию о применении ранговых распределений для анализа случаев заболевания COVID-19. В разделе 3 представлены результаты исследования коронавирусной инфекции в Приморском крае.

1. Степенное распределение случаев заболевания COVID-19

Научная литература, посвященная моделированию распространения коронавирусной инфекции, обширна. Достаточно полный и актуальный обзор по работам представлен в [18]. Укажем работу, в которой использовалось ранговое распределение [19]. Авторы применили «географический подход» с учетом скорости распространения заболевания в крупномасштабном (между странами) и мелкомасштабном (в пределах одной страны) темпе роста. Было показано, что распределение $P(n)$ случаев заболевания COVID-19 аппроксимируется степенным законом вида

$$P(n) \sim n^{-\mu},$$

где n — количество случаев COVID-19, $1 \leq n \leq n_{max}$. Динамика распространения заболевания дается зависимостью $n(t) \sim e^{r(t-\tau)}$, где r — скорость накопления случаев заболевания из предположения их экспоненциального роста, t и τ — параметры времени $0 \leq \tau \leq t$. При рассмотрении комбинации крупномасштабного распространения заболевания со скоростью r и мелкомасштабного распространения со скоростью s получена формула для параметра μ : $\mu = 1 + \frac{s}{r}$, а также оценка этого параметра в интервале $1,15 \leq \mu \leq 2$.

Автор отмечает, что его простая теория далеко не точно описывает настоящую пандемию и верна только в начальной фазе, а также признаёт, что предположение об экспоненциальном росте является всего лишь усреднением реальных показателей и выбрано для удобства, без учета волнового характера развития процесса. Но, несмотря на указанные допущения, сильной стороной предложенной модели как раз является её «грубая общность» — в ней не учитываются размеры стран, численность населения, частота тестирования, логистические связи между населенными пунктами внутри, — поэтому в качестве интересной перспективы для будущих исследований автор предлагает получить на её базе более реалистичные модели взаимосвязанных обществ.

2. Динамика ежедневных случаев заболеваемости новой коронавирусной инфекцией в Приморском крае

Наше исследование продолжалось 2 года и заключалось в наблюдении количества ежедневных зарегистрированных лабораторно доказанных случаев COVID-19 в Приморском крае (периоды обработки наблюдений указаны в соответствующих столбцах таблицы 1). В рамках обозначенных периодов (Рис. 1) были построены

ранговые распределения в соответствии с методом В. П. Маслова и зафиксированы параметры аппроксимирующей функции (2).

Таблица 1. Характеристики рангового распределения заболеваемости COVID-19 в Приморском крае

Волны	1 волна	2 волна	3 волна	4 волна	5 волна
Периоды в Приморском крае	23.03.2020 – 26.09.2020	27.09.2020 – 3.05.2021	4.05.2021 – 27.09.2021	28.09.2021 – 6.01.2022	7.01.2022 – по настоящее время (11.04.2022)
Продолжительность периода (мес.)	6	7	5	3	4+
Периоды в РФ в целом	17.03.2020 – 31.08.2020	1.09.2020 – 5.05.2021	6.05.2021 – 6.09.2021	7.09.2021 – 5.01.2022	6.01.2022 – по настоящее время (11.04.2022)
Степенной параметр	4	3,3	2,3	2	1,89
Точка перегиба	62	66	66	66	66
Вид функции	логарифм	логарифм	логарифм	логарифм	логарифм
Наличие «имперского хвоста»	нет	есть	есть	нет	нет

Процесс накопления статистики ежедневных случаев COVID-19 в Приморском крае во времени выглядит следующим образом (выделены пиковые значения выявленных случаев для каждой волны):

Использование метода ранговых распределений не предполагает учёта временной координаты для ряда значений случайной величины, но, так как мы имеем дело с развивающимся процессом, совершенно исключать учёт времени в развитии ситуации нельзя. Поэтому принято решение рассмотреть динамику процесса, сгруппировав значения в рамках отдельных волн, даты которых известны (Таблица 1).

С другой стороны, мы не можем изменять ранг, уже присвоенный определённому значению в определённую дату, так как это нарушает принцип однозначности при построении рангового распределения — различные значения не могут иметь одинаковый ранг. В связи с этим, начиная со второй волны, ранговые распределения строились по накопительному принципу с учётом предыдущих значений рангов и частот. Это позволило сохранить уже присвоенные ранее значения ранга и обеспечить единственность этого соответствия в паре (s, r) , где s — количество выявленных случаев, r — ранг. Для построения ранговых кривых использовалась модель, описанная в [16] и [17]:

$$r(s) = \begin{cases} \frac{c_1}{\gamma\sqrt{D}} \ln \left| \frac{(2as^\gamma + 1 - \sqrt{D})(1 + \sqrt{D})}{(2as^\gamma + 1 + \sqrt{D})(1 - \sqrt{D})} \right|, & D \geq 0 \\ \frac{2c_1}{\gamma\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{2as^\gamma + 1}{\sqrt{-D}}, & D < 0. \end{cases}$$

Построенные для каждой волны графики и соответствующие аппроксимирующие функции представлены на рисунках 1–6.



Рис. 1. Динамика обнаружения COVID-19 в Приморском крае

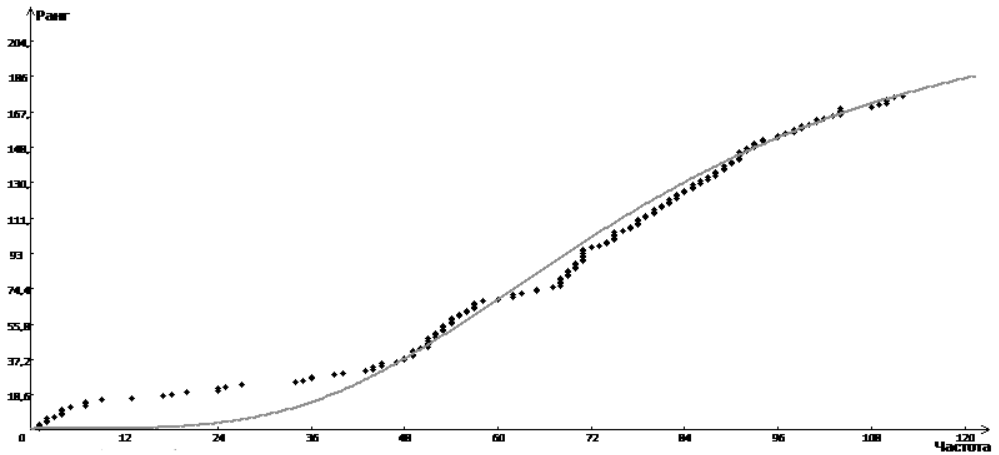


Рис. 2. 1 волна заболеваемости COVID-19 в Приморском крае (23.03.2020 – 26.09.2020) $r(s) = 21.3946 \ln \frac{(2.5641 \cdot 10^{-8} s^4 + 0.2)}{(0.1429 \cdot 10^{-8} s^4 + 0.2)}$

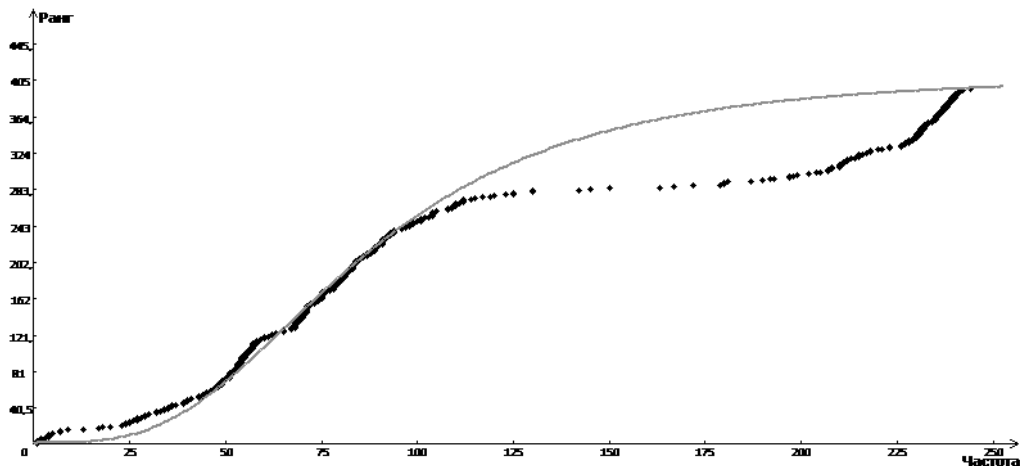


Рис. 3. 2 волна заболеваемости COVID-19 в Приморском крае (27.09.2020 – 3.05.2021)

$$r(s) = 66.4929 \ln \frac{(4.493 \cdot 10^{-7} s^{3.3} + 0.3343)}{(0.4555 \cdot 10^{-7} s^{3.3} + 0.3343)}$$

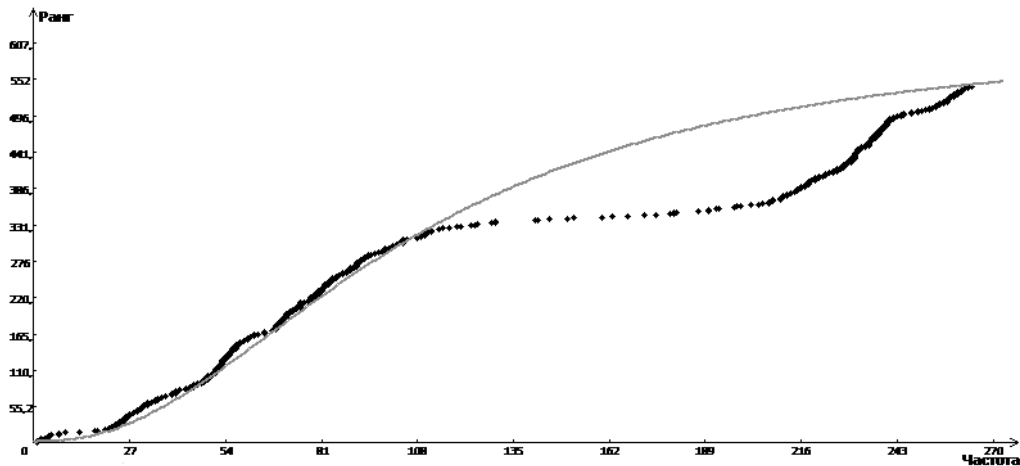


Рис. 4. 3 волна заболеваемости COVID-19 в Приморском крае (04.05.2021 – 27.09.2021)

$$r(s) = 240.3452 \ln \frac{(2.7366 \cdot 10^{-5} s^{2.3} + 0.5433)}{(0.5294 \cdot 10^{-5} s^{2.3} + 0.5433)}$$

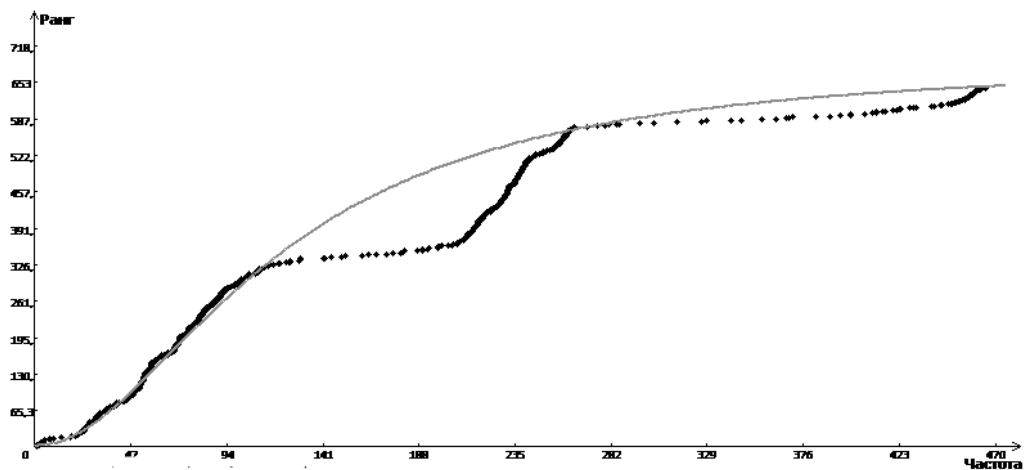


Рис. 5. 4 волна заболеваемости COVID-19 в Приморском крае (28.09.2021 – 6.01.2022)

$$r(s) = 487.643 \ln \frac{(8.9474 \cdot 10^{-5} s^2 + 0.6875)}{(2.531 \cdot 10^{-5} s^2 + 0.6875)}$$

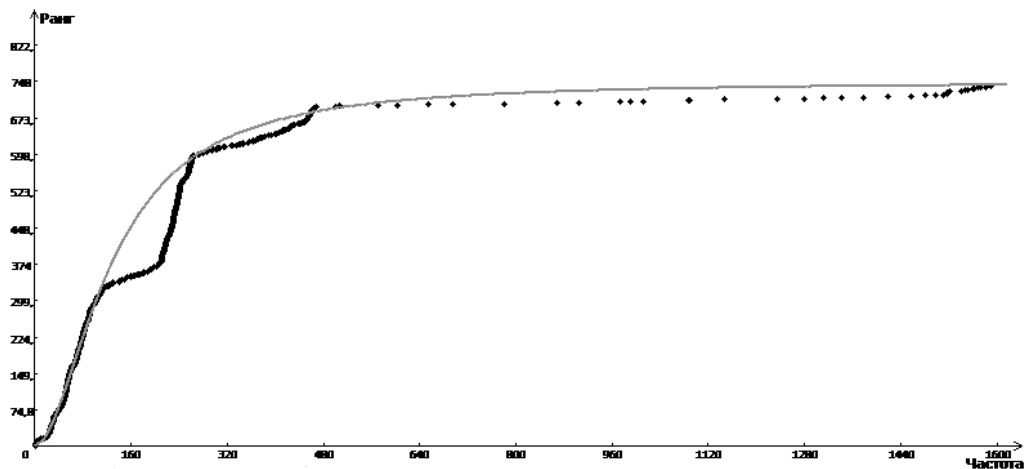


Рис. 6. 5 волна заболеваемости COVID-19 в Приморском крае (7.01.2022 – по настоящее время (11.04.2022))

$$r(s) = 766.9455 \ln \frac{(13.5123 \cdot 10^{-5} s^{1.89} + 0.7648)}{(4.686 \cdot 10^{-5} s^{1.89} + 0.7648)}$$

Результаты моделирования можно трактовать в поддержку допущений и выводов, высказанных в [19], с поправкой на вид функции распределения в форме (2). Также очевидно, что предположение об убывании степенного параметра μ с ростом случаев заболевания в работе [19] находит своё подтверждение и в модели В. П. Маслова для параметра γ . Примечательно, что практически совпала и предельная оценка степенного параметра $\gamma = 1.89$ для модели (2) и $\mu = 2$ в [19].

Наблюдение за развитием процесса во времени позволяет подтвердить феномен резкого роста значения ранга и, как следствие, появление «хвоста» у графика рангового распределения (Рис. 3 и 4). Ранее авторы уже сталкивались с подобным поведением функций ранговых распределений. Уникальная возможность наблюдать за развитием процесса во времени с самого его начала позволила выявить динамику накопления частот и зафиксировать момент появления «хвоста», а также и его исчезновения и сделать предположения о его природе.

3. Появление «имперских хвостов»

В разделе 1 указано, что первое появление такого «хвоста», названного нами «имперским», встречается при исследовании жизненных циклов политий [17]. Напомним, что задача исследования заключалась в определении степени влияния географического фактора (площади) на динамику империй и государств. Были отображены 46 обществ, для которых была возможность более или менее достоверно реконструировать размеры политий в различные периоды их существования. Источником данных послужили работы эстонского исследователя Р. Таагаперы, посвященные изучению динамики империй и государств на протяжении 5000 лет письменной истории.

Классические ципфовские логарифмические кривые характерны для наиболее крупных политий древности и средневековья, а у империй, подвергшихся необратимому распаду, обязательно наличие резкого роста значений рангов для больших значений площадей, именно такой случай был нами назван «имперской кривой». С момента опубликования работы (2017) до настоящего времени вопрос природы «имперского хвоста» оставался открытым, и только изучение пандемии коронавирусной инфекции позволило получить его понимание.

«Имперский хвост» появляется при активном накоплении различных значений наблюдаемой характеристики, с появлением большего количества одинаковых или сильно близких значений (т.е. большей частоты встречаемости) он постепенно сглаживается и выходит в итоге на плато (Рис. 5 и 6), приросты максимальных значений также максимальны — чем больше последующее значение, тем больше разница его с предыдущим — за счет этого формируется плато; прирост значения ранга замедляется — хвост уходит.

Таким образом, возвращаясь к результатам исследования площадей политий, можно констатировать, что империи, для которых было характерно наличие «имперских хвостов», не завершили цикл окончательного формирования и развития, прерванного по тем или иным причинам.

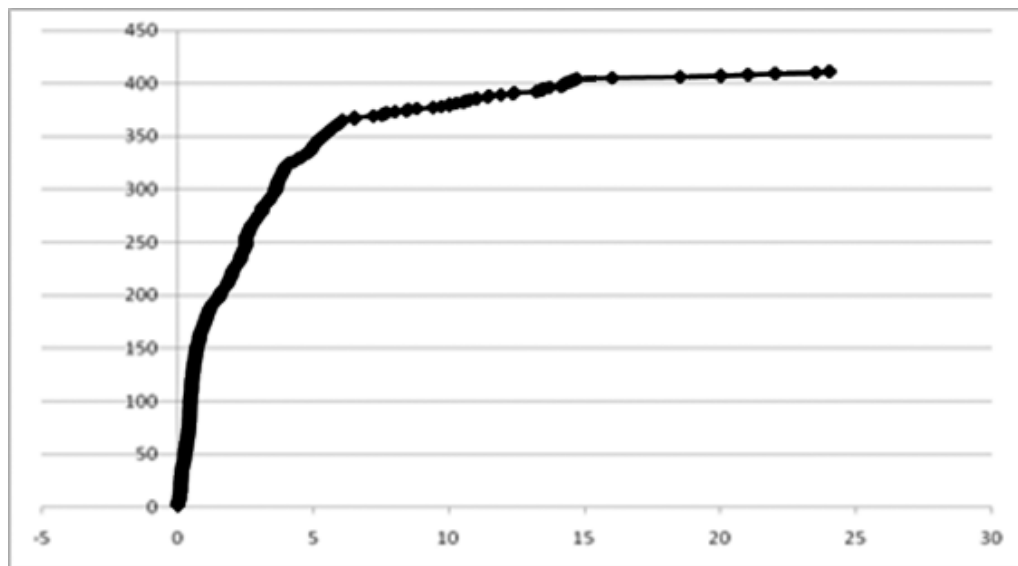


Рис. 7. Ранговое распределение площади Китая

В пользу этой гипотезы можно привести пример Китая как государства высококоразвитой структуры и организации и устойчивых пространственных рамок на протяжении многих веков. Рис. 7 демонстрирует полное отсутствие резкого роста рангов. Степенной параметр рангового распределения площади Китая $\gamma = 1.01$, что крайне близко к классическому ципфовскому распределению.

4. Сопутствующие промежуточные результаты и наблюдения

Проведенные исследования позволяют обозначить несколько существенных аспектов, касающихся применения метода ранговых распределений.

Во-первых, в части понимания характера и качества собираемых данных — они могут быть цензурированными, в этом случае распределение будет содержать много лакунарных областей. Это может быть связано с тем, что старт наблюдений за процессом, как правило, начинается с определенного момента, не совпадающего с началом процесса, либо рассматривается уже завершённый процесс, и тогда может оказаться, что не только утрачивается часть данных, но и неверно трактуется развитие процесса во времени и / или по периодам. В случае с пандемией мы находимся еще «внутри» процесса, и уже можно заметить, как заполняются лакуны от периода к периоду (Рис. 3-6).

Во-вторых, существует вопрос «неучтённости» временного параметра процесса, связанный со спецификой построения ранговых распределений. В [19] временной параметр был «защит» в степенной параметр как скорость прироста случаев заболевания.

В своём исследовании мы проводили анализ ранговых распределений с учётом периодичности волн (Таблица 1) и формировали ряды исследуемых величин с накоплением значений с учётом предыдущих периодов, сохраняя тем самым частоту назначенного ранга неизменной. Считаем, что такой способ не нарушает принципы построения рядов статистических наблюдений и что такую привязку ко времени возможно проводить при наличии точной информации о продолжительности отдельных периодов наблюдений.

Заключение

В заключение отметим важные особенности рангового распределения случаев заболевания COVID-19 и сделаем некоторые предположения о дальнейшем развитии ситуации на территории Приморского края.

1. Степенной параметр убывает от 4 до 1,89 (Таблица 1) и будет продолжать стремиться к классическим значениям, близким к 1; наименьшее значение параметра соответствует приближенному к цифровому классическому распределению с выходом на плато.

2. Точка перегиба стабилизировалась на 66 ежедневных случаях, начиная со второго периода, и более не изменяется.

3. Наличие «имперского хвоста» свидетельствует о незавершённости процесса и необходимости дальнейших наблюдений (если это возможно, как в случае с COVID-19) либо о прерывании развития процесса обстоятельствами непреодолимой силы (как в случае с такими политиями, как Древний Рим, Османская империя, Карфаген, Государство инков). Момент исчезновения «имперского хвоста» показывает, что произошла стабилизация процесса, параметры, задающие характер распределения, определены и уже не подвержены сильным колебаниям.

4. Последующий рост обнаружения случаев COVID-19 будет сохраняться, наступление шестой волны ожидается, но ежедневные случаи, наиболее вероятно, будут чаще встречаться в диапазоне от 150 до 480, увеличивая ранг значений этого диапазона и тем самым постепенно «выдавливая» вверх график распределения в соответствующих областях.

В очередной раз подтверждена универсальность метода ранговых распределений на основе подхода В. П. Маслова. Особенность и ценность настоящего исследования состоит в том, что наблюдения начались с самого начала процесса и будут продолжены вплоть до его окончания, что, несомненно, позволит получить новое понимание динамики ранговых распределений.

Список литературы

- [1] F. Auerbach, “The Law of Population Concentration”, *Petermann’s Geographical Communications*, 1913, <http://hdl.handle.net/11858/00-001M-0000-002A-4926-E>.
- [2] A. J. Lotka, “The Frequency Distribution of Scientific Productivity”, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, **16** (1926).

- [3] H. A. Gleason, “The Significance of Raunkiaer’s Law of Frequency”, *Ecology*, **10** (4) (1929), doi:10.2307/1931149.
- [4] B. Gutenberg and C. F. Richter, “Frequency of earthquakes in California”, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **34** (1944).
- [5] G. K. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1949.
- [6] A. Clauset, C. R. Shalizi and M. E. J. Newman, “Power-law distributions in empirical data”, *E-print: SIAM Rev.*, 2009, No 51, <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/070710111>.
- [7] S. T. Piantadosi, “Zipf’s word frequency law in natural language: A critical review and future directions”, *Psychonomic Bulletin & Review*, **21**(5) (2014), doi:10.3758/s13423-014-0585-6.
- [8] R. B. Lees, “Logic, language and information theory by Leo Apostel”, *Benoit Mandelbrot and Albert Morf Source: Language*, **35**(2) (1959), <https://doi.org/10.2307/410536>.
- [9] А. Н. олмогоров, “Три подхода к определению понятия "количество информации"”, *Пробл. передачи информ.*, **1**(1) (1965).
- [10] Ю. А. Шрейдер, “О возможности теоретического вывода статистических закономерностей текста (к обоснованию закона Ципфа)”, *Пробл. передачи информ.*, **3**:1 (1967).
- [11] В. Дунаев, “О ранговых распределениях в классификации”, *Научно-техническая информатика*, **2** (1984), <http://dunaevv1.narod.ru/other/classrunk.htm>.
- [12] V. P. Maslov, “On a General Theorem of Set Theory Leading to the Gibbs, Bose-Einstein, and Pareto Distributions as well as to the Zipf-Mandelbrot Law for the Stock Market”, *Mathematical Notes*, 2005, No 78(5).
- [13] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, М.: Наука, 2006.
- [14] В. П. Маслов, “Закон «отсутствия предпочтения» и соответствующие распределения в частотной теории вероятностей”, *Мат. заметки*, **80**:2 (2006).
- [15] В. П. Маслов, Т. В. Ёмаслова, “О законе Ципфа и ранговых распределениях в лингвистике и семиотике”, *Мат. заметки*, **80**:5 (2006).
- [16] М. А. Guzev, E. Yu. Nikitina, E. V. Chernysh, “V.P.Maslov’s Approach to the Analysis of Rank Distributions”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **28**:1 (2021).
- [17] М. А. Guzev, N. N. Kradin, E. Yu. Nikitina, “The Imperial Curve of Large Polities”, *Social Evolution & History*, **16**:2 (2017).
- [18] О. И. Криворотько, С. И. Кабанихин, “Математические модели распространения COVID-19”, *ArXiv.org*, **2112.05315v2** (2022), <https://arxiv.org/pdf/2112.05315.pdf>.
- [19] B. Blasius, “Power-law distribution in the number of confirmed COVID-19 cases”, *Chaos*, **30** (2020), <https://doi.org/10.1063/5.0013031>.

Guzev M. A.¹, Nikitina E. Y.² The dynamics of “imperial tails” on the example of coronavirus infection. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2022. V. 22. No 1. P. 38–50.

¹ Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

² Far Eastern Federal University, Russia

ABSTRACT

In the paper the dynamics of rank distributions is discussed on the example of a study of the incidence of COVID-19 in Primorsky Krai in 2020-2022, taking into account the periodicity of the morbidity process, and an explanation of the nature of “imperial tails” is given. It is shown that the chosen modeling method is within the framework of the general trend of research into the development of the pandemic process, and the found characteristic parameters are close to classical estimates.

Key words: *rank distributions, Zipf’s Law, imperial tail.*

References

- [1] F. Auerbach, “The Law of Population Concentration”, *Petermann’s Geographical Communications*, 1913, <http://hdl.handle.net/11858/00-001M-0000-002A-4926-E>.
- [2] A. J. Lotka, “The Frequency Distribution of Scientific Productivity”, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, **16** (1926).
- [3] H. A. Gleason, “The Significance of Raunkiaer’s Law of Frequency”, *Ecology*, **10** (4) (1929), doi:10.2307/1931149.
- [4] B. Gutenberg and C. F. Richter, “Frequency of earthquakes in California”, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **34** (1944).
- [5] G. K. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1949.
- [6] A. Clauset, C. R. Shalizi and M. E. J. Newman, “Power-law distributions in empirical data”, *E-print: SIAM Rev.*, 2009, No 51, <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/070710111>.
- [7] S. T. Piantadosi, “Zipf’s word frequency law in natural language: A critical review and future directions”, *Psychonomic Bulletin & Review*, **21**(5) (2014), doi:10.3758/s13423-014-0585-6.
- [8] R. B. Lees, “Logic, language and information theory by Leo Apostel”, *Benoit Mandelbrot and Albert Morf Source: Language*, **35**(2) (1959), <https://doi.org/10.2307/410536>.
- [9] A. N. olmogorov, “Tri podkhoda k opredeleniiu poniatia ”kolichestvo informatsii””, *Probl. peredachi inform.*, **1**(1) (1965).
- [10] Iu. A. Shreider, “O vozmozhnosti teoreticheskogo vyvoda statisticheskikh zakonomernostei teksta (k obosnovaniiu zakona Tsipfa)”, *Probl. peredachi inform.*, **3**:1 (1967).
- [11] V. Dunaev, “O rangovykh raspredeleniiakh v klassifikatsii””, *Nauchno-tekhnicheskaja informatsiia*, **2** (1984), <http://dunaevv1.narod.ru/other/classrunk.htm>.
- [12] V. P. Maslov, “On a General Theorem of Set Theory Leading to the Gibbs, Bose-Einstein, and Pareto Distributions as well as to the Zipf-Mandelbrot Law for the Stock Market”, *Mathematical Notes*, 2005, No 78(5).
- [13] V. P. Maslov, *Kvantovaia ekonomika*, M.: Nauka, 2006.

- [14] V.P. Maslov, “Zakon «otsutstviia predpochteniiia» i sootvetstvuiushchie raspredeleniia v chastotnoi teorii veroiatnostei”, *Mat.zametki*, **80**:2 (2006).
- [15] V.P. Maslov, T. V.EMaslova, “O zakone Tsipfa i rangovykh raspredeleniakh v lingvistike i semiotike”, *Mat.zametki*, **80**:5 (2006).
- [16] M.À. Guzev, E. Yu. Nikitina, E. V. Chernysh, “V.P.Maslov’s Approach to the Analysis of Rank Distributions”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **28**:1 (2021).
- [17] M. A. Guzev, N. N. Kradin, E. Yu. Nikitina, “The Imperial Curve of Large Polities”, *Social Evolution & History*, **16**:2 (2017).
- [18] O. I. Krivorot’ko, S. I. Kabanikhin, “Matematicheskie modeli rasprostraneniia COVID-19”, *ArXiv.org*, **2112.05315v2** (2022), <https://arxiv.org/pdf/2112.05315.pdf>.
- [19] B. Blasius, “Power-law distribution in the number of confirmed COVID-19 cases”, *Chaos*, **30** (2020), <https://doi.org/10.1063/5.0013031>.