Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 2. С. 257–267

УДК 512.534+512.58
MSC2020 18F20+20M30

© Е. Е. Скурихин[1]

Обобщённая теорема Дилуорса – Глисона

Рассматриваются функторы со значением в категории предпучков множеств на категории K/D, где D — предпучок множеств на категории K. Доказывается обобщённая теорема Дилуорса – Глисона.

Ключевые слова: *предпучки множеств, действия полугрупп на множествах, квазиупорядоченные множества.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202122

Введение

Тот факт, что мощность множества подмножеств произвольного множества X строго больше, чем мощность X, может показаться довольно грубым и интуитивно ясным. Однако приводящее к нему рассуждение — канторовский диагональным процесс — не случайно кажется неожиданным для впервые с ними знакомящихся, и результаты, которые он позволяет получать, не всегда так понятны. Одним из примеров служит обобщённая теорема Кантора, доказаная в работе [1]. Она может быть сформулирована так [2].

Теорема Дилуорса – Глисона. *Пусть K частично упорядоченное множество, $L \subset K$, $I(K)$ упорядоченное по включению множество всех левых отрезков K, $F : L \to I(K)$ — монотонное отображение. Тогда F не является сюръективным.*

Данный результат относится далеко не только к общим свойствам частичных порядков. Применим его, например, к случаю вполне упорядоченного множества K. Поскольку упорядоченное по включению множество отличных от K левых отрезков изоморфно K, то мы убеждаемся, что не существует сюръективного монотонного отображения вполне упорядоченного множества K на множество, полученное добавлением к K верхней грани, то есть элемента, который больше каждого элемента из K. Для линейно упорядоченных множеств легко привести примеры таких отображений. Таким образом, непосредственное применение теоремы Дилуорса – Глисона приводит к результату, относящемуся к специфическим свойствам вполне упорядоченных множеств.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный Федеральный Университет 690922, г. Владивосток, п. Аякс, 10. Электронная почта: `eeskur@gmail.com`

В рамках теории категорных топологических пространств мы рассматриваем функторы со значением в категории предпучков множеств на категории K/D. Последняя играет важную роль в построении теории топосов Гротендика и их когомологий [3]. Устанавливаются свойства характеристической функции, сопоставляющей каждому предпучку на K/D подпредпучок предпучка D. Полученные результаты используются для доказательства обобщённой теоремы Дилуорса – Глисона, частные случаи которой относятся к предпучкам множеств, упорядоченным множествам и действиям полугрупп на множествах. В качестве следствия доказывается отсутствие комонотонного отображения категории L в категорию K в случае, если имеется слабо сюръективный функтор из категории L в категорию предпучков множеств $\hat{K}$ на категории K.

Полученные результаты не допускают прямого обобщения на случай пучков, но можно ставить вопрос об описании субканонических топологий Гротендика τ, для которых не существует слабо сюръективного функтора из K в категорию τ-пучков множеств на K.

1. Обозначения и термины

Категории и предпучки множеств.

Мы будем пользоваться стандартными результатами, относящимися к категориям и предпучкам множеств, содержащимися, например, в работах [3,4,5]. Зафиксируем некоторые обозначения.

Пусть K — категория. Через $Ob(K)$ обозначается класс всех объектов K, через $Hom(K)$ — класс всех морфизмов между объектами категории K, через K^o — дуальная категория. Если $k,l \in Ob(K)$, то $Hom_K(k,l)$ обозначает множество всех морфизмов из k в l.

Класс объектов R категории K называется решетом K, если для любого $k \in R$ и любого $k' \in Ob(K)$ из того, что $Hom_K(k',k) \neq \emptyset$ следует, что $k' \in R$.

Контравариантный функтор $D: K^o \to Sets$ из категории K в категорию множеств $Sets$ называется предпучком множеств на K. Таким образом, D — это отображение, сопоставляющее каждому $k \in Ob(K)$ множество $D(k)$ и каждому морфизму $f: k_1 \to k_2$ отображение $D(f): D(k_2) \to D(k_1)$, так что если $\mathrm{g}: k_2 \to k_3$, то $D(\mathrm{g} \circ f) = D(f) \circ D(\mathrm{g})$ и $D(1_k) = 1_{D(k)}$. Последние равенства показывают, что операцию $D(f)(s)$ можно рассматривать как частичное правое действие частичной полугруппы $Hom(K)$ на множестве $\cup\{D(k) \mid k \in Ob(K)\}$, в связи с чем мы обозначаем $D(f)(s) = sf$.

Класс всех предпучков на K обозначается $\hat{K}$ и рассматривается как категория, объекты которой — это все предпучки множеств, а морфизмы — естественные преобразования функторов, которые будем называть гомоморфизмами предпучков. Таким образом, $u: D \to E$ — гомоморфизм предпучков, если $u = \{u(k): D(k) \to E(k) \mid k \in Ob(K)\}$ — такое семейство отображений множеств, что для любого $f: k_1 \to k_2$, $u(k_1) \circ D(f) = E(f) \circ u(k_2)$. В только что введённых обозначениях это равенство, то есть определение гомоморфизма предпучков множеств, может быть переписано так: $\forall s \in D, u(sf) = u(s)f$ в том случае, когда левая, а значит, и правая части определены.

Пусть D — предпучок множеств на категории K. Выражение $A \subset D$ будем использовать для обозначения того факта, что A является подпредпучком D, то есть что A — предпучок множеств на K, $\forall k \in Ob(K)$, $A(k) \subset D(k)$ и семейство включений $x(k): A(k) \to D(k)$ является гомоморфизмом предпучков множеств. Если A – подпредпучок D, то $\forall k \in Ob(K)$, $\forall s \in A(k)$, $\forall f: l \to k$, $D(f)(s) = A(f)(s) \in A(l)$. Наоборот, если $A = \{A(k \subset D(k) \mid k \in Ob(K)$ семейство подмножеств и $\forall k \in Ob(K)$, $\forall s \in A(k)$, $\forall f{:}l \to k$, $D(f)(s) \in A(l)$, то, полагая $A(f)(s) = D(f)(s)$, получаем предпучок множеств A, являющийся подпредпучком D.

Через K_D обозначается множество всех подпредпучков предпучка D. Соотношение $A \subset B$ для предпучков обозначает, что A — подпредпучок B.

Через $\mathrm{Y}^K: K \to \hat{K}$ будем обозначать функтор Йонеды [4], который сопоставляет каждому объекту k категории K предпучок множеств $\mathrm{Y}^K(k): K^o \to Sets$, определяемый так: $\mathrm{Y}^K(k)(l) = Hom_K(l,k)$, и для $f: l_1 \to l_2$, отображение

$$\mathrm{Y}^K(k)(f) : \mathrm{Y}^K(k)(l_2) = Hom_K(l_2, k) \to Hom_K(l_1, k) = \mathrm{Y}^K(k)(l_1)$$

задаётся равенством $\mathrm{Y}^K(k)(f)(h) = (h \circ f{:}l_1 \to k) \in \mathrm{Y}^K(k)(l_1)$, если $(h{:}l_2 \to k) \in i^K(k)(l_2)$. Если $\mathrm{g}{:}k \to k'$ морфизм категории K, то гомоморфизм (естественное преобразование) предпучков $\mathrm{Y}^K(\mathrm{g}): \mathrm{Y}^K(k) \to \mathrm{Y}^K(k')$ задаётся как семейство отображений

$$\mathrm{Y}^K(\mathrm{g}) = \{\mathrm{Y}^K(\mathrm{g})(l) : \mathrm{Y}^K(k)(l) \to \mathrm{Y}^K(k')(l) \mid l \in Ob(L)\},$$

где $\mathrm{Y}^K(\mathrm{g})(l)(v) = \mathrm{g} \circ v$, если $v: l \to k$.

По лемме Йонеды [4] функтор Йонеды является полным строгим, что позволяет рассматривать произвольную категорию как подкатегорию категории предпучков множеств, а произвольный объект категории снабжать теоретико-множественными структурами.

Квазиупорядоченные множества.

Любое рефлексивное транзитивное отношение $\leqslant$ называется квазипорядком, а если оно ещё и антисимметрично, — то частичным порядком. Подмножество $R \subset K$ квазиупорядоченного множества $(K, \leqslant)$ называется решетом, или левым отрезком K, если $\forall x \in R$ из того, что $y \in K$ и $y \leqslant x$ следует $y \in R$.

Действия полугрупп.

Моноидом называется полугруппа с единицей. Если S моноид, то (правым) S-множеством или (правым) S-полигоном называется любое множество, на котором зафиксировано правое действие моноида S. Если A — S-множество, то результат действия элемента $s \in S$ на $a \in A$ обозначается as.

2. Предварительные результаты

Пусть K — категория, D — предпучок множеств на K. Рассмотрим категорию K/D [3], играющую важную роль в построении теории топосов Гротендика и их когомологий. Объектами этой категории являются гомоморфизмы предпучков множеств $u: \mathrm{Y}^K(k) \to D$. Если $u': \mathrm{Y}^K(k') \to D$, то морфизмом $u \to u'$, то есть элементом $Hom_{K/D}(u,u')$ является тройка (u, f, u'), где $f: k \to k'$ такой морфизм категории K, что $u' \circ \mathrm{Y}^K(f) = u$. Если $(u', \mathrm{g}, u''): u' \to u''$ то суперпозиция определяется равенством

$$(u', \mathrm{g}, u'') \circ (u, f, u') = (u, \mathrm{g} \circ f, u'') : u \to u''.$$

Таким образом [3], определён функтор $j_D : K/D \to K$, сопоставляющий каждому объекту $u : \mathrm{Y}^K(k) \to D$ категории K/D объект k категории K и каждому морфизму (u, f, u') — морфизм f.

Определим также категорию $\tilde{D}$, полагая $Ob(\tilde{D}) = \coprod\{D(k) \mid k \in Ob(K)\}$. Если $s \in D(k)$, $s' \in D(k')$ — объекты категории $\tilde{D}$, то морфизмом $s \to s'$, то есть элементом $Hom_{\tilde{D}}(s, s')$ является тройка (s, f, s'), где $f : k \to k'$ такой морфизм категории K, что $s = s'f$. Если $(s', \mathrm{g}, s'') : s' \to s''$ то суперпозиция определяется равенством

$$(s', \mathrm{g}, s'') \circ (s, f, s') = (s, \mathrm{g} \circ f, s'') : s \to s''.$$

Лемма 1. *Пусть D — предпучок множеств на категории K,*

$$\varphi(k) : Hom_{\hat{K}}(\mathrm{Y}^K(k), D) \to D(k)$$

— отображение, сопоставляющее каждому гомоморфизму предпучков $u : \mathrm{Y}^K(k) \to D$ элемент $\varphi(u) = u(k)(1_k) \in D(k)$.

1) a) Отображение $\varphi(k)$ биективно;

b) отображение $m = m(k) : D(k) \to Hom_{\hat{K}}(\mathrm{Y}^K(k), D)$, обратное к $\varphi(k)$, задаётся равенством $m(k)(s)(k')(h) = sh$ и определяется условием $m(k)(s)(k)(1_k) = s$. Таким образом, каждый гомоморфизм предпучков $u : \mathrm{Y}^K(k) \to D$ равен $m(s)$, где $s = u(k)(1_k) \in D(k)$, и $u = v \Leftrightarrow u(k)(1_k) = v(k)(1_k)$;

c) если $D = \mathrm{Y}^K(k')$, $(s = f : k \to k') \in D(k) = \mathrm{Y}^K(k')(k)$, то $m(s) = \mathrm{Y}^K(f)$.

2) Пусть $f : k \to k'$ морфизм категории K, $s' \in D(k')$. Тогда $m(s') \circ \mathrm{Y}^K(f) = m(s'f)$.

3) Отображение $m : \tilde{D} \to K/D$: $s \mapsto m(s)$, $(s, f, s') \mapsto m(s, f, s') = (m(s), f, m(s'))$ является изоморфизмом категорий $\tilde{D}$ и K/D.

Доказательство. 1) Данный результат является переформулировкой и непосредственным следствием леммы Йонеды.

2) В силу результатов пункта 1)b), достаточно доказать, что

$$(m(s') \circ \mathrm{Y}^K(f))(k')(1_{k'}) = m(s'f)(k')(1_{k'}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(m(s') \circ \mathrm{Y}^K(f))(k')(1_{k'}) &= (m(s')(k') \circ \mathrm{Y}^K(f)(k'))(1_{k'}) = \\ = m(s')(k')(\mathrm{Y}^K(f)(k')(1_{k'})) &= m(s')(k')(f) = s'f = m(s'f)(k')(1_{k'}).\end{aligned}$$

Требуемое равенство доказано.

3) Прямо следует из 1) и 2).

□

Лемма 2. *Пусть D — предпучок множеств на категории K.*

1) Изоморфизм категорий

$$m : \tilde{D} \to K/D : s \mapsto m(s), (s, f, s') \mapsto m(s, f, s') = (m(s), f, m(s'))$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех решёт категории K/D и множеством K_D всех подпредпучков предпучка D. А именно, если $A \subset Ob(\tilde{D})$, то $m(A)$ является решетом K/D тогда и только тогда, когда A является подпредпучком D.

2) Пусть $D = 1$ — такой предпучок множеств, что для всякого $k \in Ob(K)$, $1(k)$ — одноэлементное множество. Тогда:

a) функтор $j_D = j_1 : K/1 \to K$ является изоморфизмом категорий;

b) изоморфизм категорий $m : \tilde{1} \to K/1 = K$ устанавливает изоморфизм между частично упорядоченным по включению множеством всех решёт категории K и множеством K_1 всех подпредпучков предпучка 1;

c) зададим квазипорядок на классе $Ob(K)$, полагая $k \leqslant k' \Leftrightarrow Hom_K(k, k') \neq \emptyset$. Тогда множество всех решёт $(Ob(K), \leqslant)$ совпадает с множеством всех решёт K и находится во взаимно однозначном соответствии с множеством K_1 всех подпредпучков предпучка 1.

Доказательство. Все результаты данной леммы получаются путём сопоставления соответствующих определений с помощью леммы 1. □

Обозначения. Пусть D — предпучок множеств на категории K, $P : (K/D)^o \to Sets$ — предпучок множеств на K/D. Обозначим через $\chi(P)(k) \subset D(k)$ множество, задаваемое условием: $s \in \chi(P)(k) \Leftrightarrow P(m(s)) \neq \emptyset$, а через $\chi(P)$ — семейство множеств

$$\chi(P) = \{(\chi(P)(k) \mid k \in Ob(K)\}.$$

Пусть $E \subset D$ – подпредпучок D. Обозначим через P^E семейство множеств

$$P^E = \{P^E(u) \subset P(u) \mid u \in Ob(K/D)\},$$

где для $u = m(s)$, $P^E(m(s)) = P(m(s))$, если $s \in E$ и $P^E(m(s)) = \emptyset$, если $s \notin E$. Таким образом, $P^E(m(s)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (P(m(s)) \neq \emptyset$ и $s \in E) \Rightarrow P^E(m(s)) = P(m(s))$.

Лемма 3. *Пусть D — предпучок множеств на категории K, E подпредпучок D, $P : (K/D)^o \to Sets$ — предпучок множеств на K/D.*

1) a) Семейство множеств $\chi(P) = \{(\chi(P)(k) \mid k \in Ob(K)\}$ является подпредпучком предпучка D, так что определено отображение $\chi : Ob(\widehat{K/D}) \to K_D$, где K_D — множество всех подпредпучков предпучка D. Если имеется гомоморфизм $w : P \to P'$ предпучков множеств, то $\chi(P) \subset \chi(P')$, то есть $\chi(P)$ является подпредпучком $\chi(P')$;

b) семейство множеств $P^E = \{P^E(u) \mid u \in Ob(K/D)\}$ является подпредпучком предпучка P.

2) Имеются следующие соотношения:

a) если $E \subset F \subset D$, $Q \subset P$, то $Q^E \subset P^F \subset P^D = P$;

b) $\chi(P^E) = \chi(P) \cap E$;

c) если E, F подпредпучки D, то $P^F \subset P^E \Leftrightarrow \chi(P^F) \subset \chi(P^E) \Leftrightarrow \chi(P^F) \subset E$. В частности: $P^E = P^F \Leftrightarrow \chi(P^E) = \chi(P^F)$, $P = P^E \Leftrightarrow \chi(P) = \chi(P^E) \Leftrightarrow \chi(P) \subset E$, так что $P^{\chi(P)} = P$.

3) a) $P^{\cap\{E_i \mid i \in I\}} = \cap\{P^{E_i} \mid i \in I\}$;

b) $P^{\cup\{E_i|i\in I\}} = \cup\{P^{E_i} \mid i \in I\}$;
c) $(P^E)^F = P^E \cap P^F = P^{E\cap F}$.

Доказательство. 1) a) Пусть $s \in \chi(P)(k)$, то есть $s \in D(k)$ и $P(m(s)) \neq \emptyset$, и пусть $f : l \to k$ — морфизм категории K. Нужно доказать, что $sf \in \chi(P)(l)$. По лемме 1 $m(s) \circ \mathrm{Y}^K(f) = m(sf)$, так что $(m(sf), f, m(s)) : m(sf) \to m(s)$ — морфизм категории K/D и значит $P((m(sf), f, m(s))) : P(m(s)) \to P(m(sf))$ — отображение множеств. Поскольку $P(m(s)) \neq \emptyset$, то и $P(m(sf)) \neq \emptyset$. Так как $sf \in D(l)$, то $sf \in \chi(P)(l)$.

Пусть $w : P \to P'$ — гомоморфизм предпучков на K/D. Если $s \in \chi(P)(k)$, то $P(m(s)) \neq \emptyset$, и так как имеется отображение $w(m(s)) : P(m(s)) \to P'(m(s))$, то и $P'(m(s)) \neq \emptyset$, то есть $s \in \chi(P')(k)$. Таким образом, $\chi(P) \subset \chi(P')$.

b) Пусть $r \in P^E(u)$, $(v, f, u) : v \to u$ — морфизм категории K/D. Нужно доказать, что $P(v, f, u)(r) \in P^E(v)$. Так как $P^E(u) \neq \emptyset$, то $u = m(s), s \in E(k)$ По определению категории K/D, $u : \mathrm{Y}^K(k) \to D$, $v : \mathrm{Y}^K(l) \to D$ – гомоморфизмы предпучков множеств, $u \circ \mathrm{Y}^K(f) = v$. По лемме 1 $u \circ \mathrm{Y}^K(f) = m(s) \circ \mathrm{Y}^K(f) = m(sf)$, то есть $m(sf) = v$. Так как E – подпредпучок D, то $sf \in E(l)$, и значит, $P(v) = P(m(sf)) = P^E(m(sf)) = P^E(v)$, откуда $P(v, f, u)(r) \in P(v) = P^E(v)$.

2) a) Соотношения $P^F \subset P = P^D$ очевидны. Если $Q^E(u) \neq \emptyset$, то $Q^E(u) = Q(u) \neq \emptyset$, $u = m(s)$, $s \in E$. Поэтому $s \in F$, так что $P^F(u) = P(u)$. В итоге, $Q^E(u) = Q(u) \subset P(u) = P^F(u)$.

b) $s \in \chi(P^E) \Leftrightarrow P^E(m(s)) \neq \emptyset \Leftrightarrow P(m(s)) \neq \emptyset$ и $s \in E \Leftrightarrow s \in \chi(P)$ и $s \in E \Leftrightarrow s \in \chi(P) \cap E$.

c) Импликации $P^F \subset P^E \Rightarrow \chi(P^F) \subset \chi(P^E) \Rightarrow \chi(P^F) \subset E$ следуют из 1)a) и 1)b). Докажем, что $\chi(P^F) \subset E \Rightarrow P^F \subset P^E$. Пусть $P^F(m(s)) \neq \emptyset$. Тогда $P(m(s)) \neq \emptyset$ и $s \in \chi(P^F) \subset E$. Поэтому $P^E(m(s)) = P(m(s))$, откуда $P^F(m(s)) \subset P(m(s)) = P^E(m(s))$.

3) a) Включение $P^{\cap\{E_i|i\in I\}} \subset \cap\{P^{E_i} \mid i \in I\}$ следует из 2)a). Пусть $(\cap\{P^{E_i} \mid i \in I\})(u) \neq \emptyset$, $u = m(s)$. Тогда $\cap\{P^{E_i}(u) \mid i \in I\} \neq \emptyset$, и значит, $\forall i \in I, P^{E_i}(m(s)) \neq \emptyset$, то есть $\forall i \in I, s \in E_i$. Таким образом, $s \in \cap\{E_i \mid i \in I\}$, следовательно,

$$P^{\cap\{E_i|i\in I\}}(m(s)) = P(m(s)) \supset \cap\left\{P^{E_i}(u) \mid i \in I\right\} = \cap\left\{P^{E_i} \mid i \in I\right\}(u).$$

b) Включение $\cup\{P^{E_i} \mid i \in I\} \subset P^{\cup\{E_i|i\in I\}}$ следует из 2)a). Пусть $(P^{\cup\{E_i|i\in I\}})(u) \neq \emptyset$. Тогда $(P^{\cup\{E_i|i\in I\}})(u) = P(u)$, $u = m(s)$ и $s \in \cup\{E_i \mid i \in I\}$, то есть имеется $i_0 \in I : s \in E_{i_0}$, и значит, $(P^{E_{i_0}})(u) = P(u) \neq \emptyset$. Поэтому

$$\left(\cup\left\{P^{E_i} \mid i \in I\right\}\right)(u) = \cup\left\{P^{E_i}(u) \mid i \in I\right\} = P(u) \supset \left(\cup\left\{P^{E_i} \mid i \in I\right\}\right)(u).$$

c) По 2)a), $(P^E)^F \subset P^E$ и $(P^E)^F \subset P^F$, откуда $(P^E)^F \subset P^E \cap P^F$. Равенство $P^E \cap P^F = P^{E\cap F}$ доказано в 3)a). Если $P^{E\cap F}(m(s)) \neq \emptyset$, то $s \in E \cap F$, откуда $P^E(m(s)) = P(m(s)) \neq \emptyset$. Так как $s \in F$, то $(P^E)^F(m(s)) = P^E(m(s)) = P(m(s))$, так что $P^{E\cap F}(m(s)) \subset P(m(s)) = (P^E)^F(m(s))$. Соотношения $(P^E)^F \subset P^E \cap P^F \subset P^{E\cap F} \subset (P^E)^F$ доказаны. $\square$

3. Основная теорема

Определение. Пусть K, L — категории. Назовём отображение $H : Ob(L) \to Ob(K)$ комонотонным, если для любых $l_1, l_2 \in Ob(L)$ из $Hom_K(H(l_1), H(l_2)) \neq \emptyset$ следует, что $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$.

Лемма 4. *Пусть K, L — категории, D — предпучок множеств на K, $H : Ob(L) \to Ob(K/D)$ — отображение, $s_l \in D(k_l)$ — такой элемент, что $H(l) = m(s_l) : \mathrm{Y}^K(k_l) \to D$.*

1) Следующие условия эквивалентны:

(1) H комонотонно;

(2) $\forall l_1, l_2 \in Ob(L)$, таких, что $s_{l_1} = s_{l_2} f$, $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$.

2) Пусть P — предпучок множеств на K/D. Тогда $P(H(l)) \neq \emptyset \Leftrightarrow s_l \in \chi(P)$.

В частности, если $F : L \to \widehat{K/D}$ — функтор, то $F(l_1)(H(l_2)) \neq \emptyset \Leftrightarrow s_{l_2} \in \chi(F(l_1))$.

Доказательство. 1) (1)⇒(2) Если $s_{l_1} = s_{l_2} f$, то по лемме 2 $m(s_{l_1}) \circ \mathrm{Y}^K(f) = m(s_{l_2})$, то есть $(m(s_{l_1}), f, m(s_{l_2}))$ — морфизм категории K/D. Таким образом, $Hom_{K/D}(H(l_1), H(l_2)) \neq \emptyset$, и так как H комонотонно, то $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$.

(2)⇒(1) Пусть $Hom_{K/D}(H(l_1), H(l_2)) \neq \emptyset$, то есть имеется морфизм $(H(l_1), f, H(l_2)) : H(l_1) \to H(l_2)$ категории K/D. Так как $H(l) = m(s_l)$, то $m(s_{l_1}) = m(s_{l_2}) \circ i^K(f)$, и значит, по лемме 1 $s_{l_1} = s_{l_2} f$. По условию $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$.

2) Прямо следует из определения χ и равенства $H(l) = m(s_l)$. □

Теорема 1. *Пусть K, L — категории, D — предпучок множеств на K и $H : Ob(L) \to Ob(K/D)$ — комонотонное отображение. Обозначим через $s_l \in D(k_l)$ такой элемент, что $H(l) = m(s_l) : \mathrm{Y}^K(k_l) \to D$.*

1) Пусть $F : L \to \widehat{K/D}$ — функтор, $T_{F,H} = \{l \in Ob(L) \mid F(l)(H(l)) = \emptyset\}$, $D_{F,H}$ — подпредпучок предпучка D, порождённый семейством $\{s_l \mid l \in T_{F,H}\}$. Тогда

a) для любого $l \in Ob(L)$, $\chi(F(l)) \neq D_{F,H}$;

b) если U — предпучок множеств на категории K/D и $\chi(U) = D_{F,H}$, то $\forall l \in Ob(K)$, либо $Hom_{K/D}(F(l), U) = \emptyset$, либо $Hom_{K/D}(U, F(l)) = \emptyset$;

c) всегда существует такой предпучок U на K/D, такой, что $\chi(U) = D_{F,H}$. А именно, пусть A предпучок множеств на категории K, $E = D_{F,H} \subset A \subset D$, $U = (j_D^* A)^E$. Тогда $\chi(U) = D_{F,H}$.

2) Пусть $G : L \to K_D$ такое отображение, что из $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$ следует $G(l_1) \subset G(l_2)$. Обозначим через $T_{G,H} = \{l \in Ob(L) \mid s_l \notin G(l)\}$, а через $D_{G,H}$ — подпредпучок D, порождённый семейством $\{s_l \mid l \in T_{G,H}\}$. Тогда для каждого $l \in Ob(L), G(l) \neq D_{G,H}$.

Доказательство. 1) a) Предположим, что $\chi(P) = D_{F,H}$, где $P = F(l_0)$. Если $P(H(l_0)) = P((m(s_{l_0})) = \emptyset$, то $s_{l_0} \notin \chi(P) = D_{F,H}$. В то же время $F(l_0)(H(l_0)) = \emptyset$, и это значит, что $s_{l_0} \in D_{F,H}$. Предположение о том, что $P(H(l_0)) = \emptyset$ приводит к противоречию.

Пусть $P(H(l_0)) = P(m(s_{l_0})) \neq \emptyset$. Тогда $s_{l_0} \in \chi(P)(k_{l_0}) = D_{F,H}(k_{l_0})$. Так как предпучок $D_{F,H}$ порождён семейством $\{s_l \mid l \in T_{F,H}\}$, то имеется $l_1 \in T_{F,H}$ и морфизм $f : k_{l_0} \to k_{l_1}$ категории K такой, что $s_{l_0} = s_{l_1} f$. Так как H комонотонно, то по лемме 1 $Hom_L(l_0, l_1) \neq \emptyset$, то есть имеется морфизм $\mathrm{g} : l_0 \to l_1$ категории L и, следовательно, гомоморфизм $F(\mathrm{g}) : F(l_0) \to F(l_1)$ предпучков множеств на K/D. Условие $l_1 \in T_{F,H}$ означает, что $F(l_1)(H(l_1)) = \emptyset$, и поскольку имеется отображение $F(\mathrm{g})(H(l_1)) : F(l_0)(H(l_1)) \to F(l_1)(H(l_1))$, то $P(m(s_{l_1})) = F(l_0)(H(l_1)) = \emptyset$. Поэтому $s_{l_1} \notin \chi(P) = D_{F,H}$, в то время, как условие $l_1 \in T_{F,H}$ означает, что $s_{l_1} \in D_{F,H}$. Предположение о том, что $P(H(l_0)) \neq \emptyset$ также приводит к противоречию.

Таким образом, равенство $\chi(F(l)) = D_{F,H}$ невозможно.

b) Пусть $\chi(U) = D_{F,H}$ и предположим, что для некоторого $l \in Ob(L)$, $Hom_{K/D}(F(l), U) \neq \emptyset$ и $Hom_{K/D}(U, F(l)) \neq \emptyset$. По пункту 1)a) леммы 3 $\chi(F(l)) = \chi(U)$ и значит $\chi(F(l)) = D_{F,H}$, что, как только что доказано, невозможно.

c) Пусть A — предпучок множеств на категории K, $E = D_{F,H} \subset A \subset D$, $U = (j_D^* A)^E$. Следуя [3], через $j_D^* : \hat{K} \to \widehat{K/D}$ обозначим функтор, сопоставляющий каждому предпучку B на категории K предпучок на K/D, для которого $(j_D^* B)(\mathrm{Y}^K(k) \to D) = B(k)$. Так как A — подпредпучок D, то $A \subset \chi(j_D^* A)$. В самом деле, если $s \in A(k)$, то $s \in (j_D^* A)(m(s))$, поэтому $(j_D^* A)(m(s)) \neq \emptyset$, и значит, $s \in \chi(j_D^* A)(k)$. Таким образом, $E \subset A \subset \chi(j_D^* A)$, откуда по лемме 2

$$\chi(U) = \chi((j_D^* A)^E) = \chi(j_D^* A) \cap E = E = D_{F,H}.$$

2) Пусть Q — предпучок на категории K/D. Если $\mathrm{g} : l_1 \to l_2$ морфизм, то по лемме 2 $Q^{G(l_1)} \subset Q^{G(l_2)}$. Тем самым определён функтор $F : L \to \widehat{K/D}$, сопоставляющий каждому $l \in Ob(L)$ предпучок $Q^{G(l)}$ и каждому морфизму $\mathrm{g} : l_1 \to l_2$ включение $Q^{G(l_1)} \subset Q^{G(l_2)}$. Предположим, что $\forall l \in Ob(L)$, $Q(m(s_l)) \neq \emptyset$. Тогда

$$l \in T_{F,H} \quad \Leftrightarrow \quad F(l)(m(s_l)) = P^{G(l)}(m(s_l)) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (s_l \notin G(l)$$

или $Q(m(s_l)) = \emptyset) \Leftrightarrow (s_l \notin G(l) \Leftrightarrow l \in T_{G,H}$. Таким образом, $T_{F,H} = T_{G,H}$, и значит, $D_{F,H} = D_{G,H}$. Поэтому из равенства $G(l_0) = D_{G,H}$ получаем по лемме 3, что

$$\chi(F(l_0) = \chi(Q^{G(l_0)}) = \chi(Q) \cap G(l_0) = D_{F,H} \cap D_{G,H} = D_{F,H},$$

что противоречит результату пункта 1)a).

Как уже отмечалось при доказательстве пункта 1), полагая $Q = j_D^* D$ получаем предпучок со свойством $Q(m(s_l)) \neq \emptyset$, что и завершает доказательство теоремы. □

4. Некоторые следствия

Объекты n, n' категории N будем называть слабо эквивалентными, если $Hom_N(n', n) \neq \emptyset$ и $Hom_N(n, n') \neq \emptyset$, а отображение $F : Ob(L) \to Ob(N)$ слабо сюръективно, если каждый объект n категории N слабо эквивалентен $F(l)$ для некоторого $l \in Ob(L)$.

Пусть K, L — категории, D — предпучок множеств на K. Рассмотрим условия:

(1) существует комонотонное отображение $Ob(L) \to Ob(\tilde{D})$, то есть такое отображение $H : Ob(L) \to \coprod\{D(k) \mid k \in Ob(K)\}$, что из равенство $H(l_1) = H(l_2)f$ следует $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$.

(2) существует комонотонное отображение $Ob(L) \to Ob(K/D)$, то есть такое отображение $H : Ob(L) \to Ob(K/D)$, что из условия $Hom_{K/D}(H(l_1), H(l_2)) \neq \emptyset$ следует $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$.

Теорема 2 (Обобщённая теорема Дилуорса – Глисона). *Пусть K, L — категории, D — предпучок множеств на K.*

1) Предположим. что выполняется любое из условий (1), (2). Тогда:

a) любой функтор $F : L \to \widehat{K/D}$ не является слабо сюръективным;

b) любой функтор $G : L \to K_D$ не является сюръективным.

2) Пусть $\mathcal{R}(K/D)$ обозначает множество всех решёт категории K/D, упорядоченное по включению. Тогда произвольное отображение $G : Ob(L) \to \mathcal{R}(K/D)$, удовлетворяющее условию: из $Hom_(l, l') \neq \emptyset$ следует $G(l) \subset G(l')$, не является сюръективным.

Доказательство. Как отмечено в лемме 1, категории K/D и $\tilde{D}$ изоморфны. Поэтому условия (1) и (2) эквивалентны и утверждения пункта 1) непосредственно следуют из теоремы 1. По пункту 1) леммы 2 множество $\mathcal{R}(K/D)$ изоморфно множеству K_D подпредпучков предпучка D, так что из 1)b) следует 2). □

Все нижеследующие утверждения являются частными случаями теоремы 2.

Утверждение 1. *Пусть K, L — категории.*

1) Предположим, что существует комонотонное отображение $H : Ob(L) \to Ob(K)$. Тогда:

a) любой функтор $F : L \to \hat{K}$ не является слабо сюръективным;

b) любой функтор $G : L \to K_1$ не является сюръективным.

2) Пусть $\mathcal{R}(K)$ обозначает множество всех решёт категории K, упорядоченное по включению. Тогда любое отображение $G : Ob(L) \to \mathcal{R}(K)$, удовлетворяющее условию: из того, что $Hom_(l, l') \neq \emptyset$ следует $G(l) \subset G(l')$, не является сюръективным.

Доказательство. Пусть 1 — такой предпучок множеств на K, что $\forall k \in Ob(K)$, $1(k)$ — одноэлементное множество. По лемме 2 категория $K/1$ изоморфна K, так что все пункты доказываемого утверждения являются частными случаями соответствующих пунктов теоремы 2 при $D = 1$. □

Отметим, что следствием утверждения 1 является тот факт, что для любой категории K произвольный функтор $F : K \to \hat{K}$ не является слабо сюръективным, а произвольный функтор $G : K \to K_1$ не является сюръективным.

Заменяя в формулировке теоремы 2 категорию L на категорию L/A получаем следующий результат.

Утверждение 2. *Пусть K, L — категории, D — предпучок множеств на K, A — предпучок множеств на L.*

1) Предположим, что существует комонотонное отображение $H : Ob(\tilde{A}) \to Ob(\tilde{D})$, то есть такое, что из равенства $H(a_1) = H(a_2)f$ следует равенство $a_1 = a_2 g$ для некоторого морфизма g категории L.

Тогда:

a) любой функтор $F : \tilde{A} \to \widehat{K/D}$ не является слабо сюръективным;

b) любое отображение $G : \tilde{A} \to K_D$, удовлетворяющее условию $G(af) \subset G(a)$, не является сюръективным.

2) Любой отображение $G : \tilde{A} \to \mathcal{R}(K/D)$, удовлетворяющее условию $G(af) \subset G(a)$, не является сюръективным.

Применяя утверждение 1 к случаю, когда категория K и L являются тонкими, то есть множество морфизмов между любыми объектами которых не более чем одноэлементно, получаем следующий вариант теоремы Дилуорси – Глисона.

Теорема 3. *Пусть K, L — квазипорядоченные множества. Предположим, что существует комонотонное отображение $H : L \to K$, то есть такое, что из $H(l_1) \leqslant H(l_2)$ следует $l_1 \leqslant l_2$. Тогда никакое монотонное отображение $F : L \to \mathcal{R}(K)$, где $\mathcal{R}(K)$ — упорядоченное по включению множество всех решёт K, не является сюръективным.*

Применяя теорему 2 к случаю, когда K являются категорией с единственным объектом, получаем следующий результат, относящийся к отображениям полигонов.

Утверждение 3. *Пусть L — категория, S — моноид, D — правое S-множество. Предположим, что существует комонотонное отображение $H : Ob(L) \to D$, то есть такое, что из равенства $H(a_1) = H(a_2)s$ следует соотношение $Hom_L(a_1, a_2) \neq \emptyset$. Пусть S_D — множество всех подмножеств D, инвариантных относительно действия моноида S, $F : L \to S_D$ такое отображение, что если $Hom_L(l_1, l_2) \neq \emptyset$, то $F(l_1) \subset F(l_2)$. Тогда F не является сюръективнным.*

Теорема 2 позволяет также судить об отсутствии комонотонных отображений. Приведём примеры, получающиеся из доказанных выше утверждений.

Утверждение 4. *1) Пусть K — категория. Тогда не существует комонотонного отображения $Ob(\hat{K}) \to Ob(K)$.*

2) Пусть S — моноид, D — правое S-множество. Тогда не существует отображения $H : S_D \to D$, удовлетворяющего условию: из того, что $H(A) = H(B)s$ следует $A \subset B$.

Полученные результаты не допускают прямого обобщения на случай пучков. Пусть K — топос Гротендика. Тождественное отображение $K \to K$ является комонотонным. Если τ — дискретная топология, то есть самая слабая топология Гротендика на K, то категория τ-пучков на K совпадает с категорией $\hat{K}$, так что не существует слабо сюръективного функтора из K в категорию τ-пучков на K. Если же τ — каноническая топология на K, то имеется эквивалентность K и категории τ-пучков на K, которая является слабо сюръективным функтором.

Таким образом, можно ставить вопрос об описании субканонических топологий Гротендика τ, для которых не существует слабо сюръективного функтора из K в категорию τ-пучков на K.

Список литературы

[1] R. P. Dilworth, A. M. Gleason, “A generalized Cantor theorem”, *Proc. Amer. Math. Soc*, **13** (1962), 704–705.

[2] П. Кон, *Универсальная алгебра*, Мир, М., 1968.

[3] A. Grothendieck (with M. Artin and J.-L. Verdier), *Seminaire Geometrie Algebrique 4 [SGA4], Theorie de topos et cohomologie etale de schemas, Lect. Notes in Math.*. V. 269, 270, Springer, Heidelberg, 1972.

[4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, М., 2004.

[5] Е. Е. Скурихин, “Предпучки множеств и действия полугрупп”, *Дальневосточный математический журнал*, **19**:1 (2019), 63–74.

Поступила в редакцию
6 октября 2021 г.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 075-02-2021-1395.

Skurikhin E. E.[1,2] A generalized Dilworth and Gleason theorem. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 2. P. 257–267.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
[2] Far Eastern Federal University, Russia

ABSTRACT

The theorem of R. P. Dilworth and A. M.Gleason is a generalization of a Cantor theorem. We propose and proof the generalized Dilworth and Gleason theorem for functors with codomain K/D.

Key words: *presheaves of sets, actions of semigroups on sets, preorders.*

References

[1] R. P. Dilworth, A. M. Gleason, “A generalized Cantor theorem”, *Proc. Amer. Math. Soc*, **13** (1962), 704–705.

[2] P. Kon, *Universal'naia algebra*, Mir, M., 1968.

[3] A. Grothendieck (with M. Artin and J.-L. Verdier), *Seminaire Geometrie Algebrique 4 [SGA4], Theorie de topos et cohomologie etale de schemas, Lect. Notes in Math.*. V. 269, 270, Springer, Heidelberg, 1972.

[4] S. Maklein, *Kategorii dlia rabotaiushchego matematika*, Fizmatlit, M., 2004.

[5] E. E. Skurikhin, “Predpuchki mnozhestv i deistviia polugrupp”, *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal*, **19**:1 (2019), 63–74.