Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 2. С. 247–256

УДК 517.583+512.742.72
MSC2020 33E05

© М. А. Романов[1]

Тропические последовательности, ассоциированные с последовательностями Гейла – Робинсона

В работе вычислены тропические последовательности, ассоциированные с некоторыми последовательностями Гейла – Робинсона.

Ключевые слова: *последовательности Сомоса, последовательности Гейла – Робинсона, тропические последовательности.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202121

Введение

Пусть $k\geqslant 2$ — натуральное число. Последовательностью Сомос-k называется последвательность $S_k(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$S_k(n+[(k+1)/2])S_k(n-[k/2]) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k/2}\alpha_i S_k(n+[(k+1)/2]-i)S_k(n-[k/2]+i), \quad (1)$$

в котором коэффициенты α_i — константы. Эта последовательность задается k начальными переменными $S_k(j)=x_j$ $(-k/2<j\leqslant k/2)$.

Пусть k, i_1, i_2, i_3 — целые числа, $1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k/2$. Последовательность $T_2(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} &T_2(n+[(k+1)/2])T_2(n-[k/2]) = \\ &=\alpha T_2(n+[(k+1)/2]-i_1)T_2(n-[k/2]+i_1)+ \\ &+\beta T_2(n+[(k+1)/2]-i_2)T_2(n-[k/2]+i_2), \end{aligned} \quad (2)$$

в котором $\alpha,\beta\neq 0$, называется двучленной последовательностью Гейла – Робинсона (см. [1], [2]). Трехчленной последовательностью Гейла – Робинсона называется последовательность $T_3(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$, которая определяется рекуррентным соотношением

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 34. Электронная почта: `romanov@iam.dvo.ru`

$$
\begin{gathered}
T_3(n+[(k+1)/2])T_3(n-[k/2])= \\
=\alpha T_3(n+[(k+1)/2]-i_1)T_3(n-[k/2]+i_1)+ \\
+\beta T_3(n+[(k+1)/2]-i_2)T_3(n-[k/2]+i_2)+ \\
+\gamma T_3(n+[(k+1)/2]-i_3)T_3(n-[k/2]+i_3),
\end{gathered} \tag{3}
$$

причем $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$. Последовательности $T_2(n)$ и $T_3(n)$ являются частными случаями последовательности Сомос-k и также задаются k начальными переменными $T_2(j)=$ $=T_3(j)=x_j$ $(-k/2<j\leqslant k/2)$.

Очевидно, что $S_k(n)$, $T_2(n)$ и $T_3(n)$ при любом n являются рациональными функциями от переменных x_j $(-k/2<j\leqslant k/2)$. В работах [3] и [4] было доказано, что последовательность Сомос-k при $k=4,5,6,7$ обладает свойством лорановости, то есть для любого целого n

$$
S_k(n)\in\mathbb{Z}[\ldots,\alpha_i,\ldots;\ldots,x_j^{\pm 1},\ldots].
$$

Другими словами, $S_k(n)$ является полиномом Лорана от начальных переменных x_j $(-k/2<j\leqslant k/2)$, коэффициенты которого представляют собой полиномы с целыми коэффициентами от переменных α_i $(1\leqslant i\leqslant k/2)$. С помощью вычислений нетрудно убедиться, что в общем случае последовательность Сомос-k при $k\geqslant 8$ не обладает свойством лорановости, однако в работе [3] было показано, что двучленная последовательность Гейла–Робинсона обладает этим свойством при любых k, i_1, i_2, а трехчленная — при $k=i_1+i_2+i_3$.

Представим $T_2(n)$ и $T_3(n)$ в виде

$$
T_2(n)=\left(\prod_{-k/2<j\leqslant k/2} x_j^{q_2^{(j)}(n)}\right)\frac{P_2(n)}{Q_2(n)},
$$

$$
T_3(n)=\left(\prod_{-k/2<j\leqslant k/2} x_j^{q_3^{(j)}(n)}\right)\frac{P_3(n)}{Q_3(n)},
$$

где $P_l(n)$, $Q_l(n)$ $(l=2,3)$ — взаимно простые полиномы от начальных переменных x_j, которые не делятся на x_j, а $q_2^{(j)}(n)$, $q_3^{(j)}(n)$ — последовательности целых чисел. Из равенств (2) и (3) следует, что последовательность $q_2^{(j)}(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$
\begin{gathered}
q_2(n+[(k+1)/2])+q_2(n-[k/2])= \\
=\min\left\{q_2(n+[(k+1)/2]-i_1)+q_2(n-[k/2]+i_1),\right. \\
\left.q_2(n+[(k+1)/2]-i_2)+q_2(n-[k/2]+i_2)\right\},
\end{gathered} \tag{4}
$$

а $q_3^{(j)}(n)$ — соотношению

$$
\begin{gathered}
q_3(n+[(k+1)/2])+q_3(n-[k/2])= \\
=\min\left\{q_3(n+[(k+1)/2]-i_1)+q_3(n-[k/2]+i_1),\right. \\
q_3(n+[(k+1)/2]-i_2)+q_3(n-[k/2]+i_2), \\
\left.q_3(n+[(k+1)/2]-i_3)+q_3(n-[k/2]+i_3)\right\}.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Обе последовательности задаются начальными значениями

$$q_2^{(j)}(i) = q_3^{(j)}(i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (-\,k/2 < i \leqslant k/2)$$

Последовательности подобного рода называются тропическими. В данной работе мы вычисляем последовательности $q_2^{(0)}(n)$ и $q_3^{(0)}(n)$ для некоторых двух- и трехчленных последовательностей Гейла – Робинсона. Результаты сформулированы в следующей теореме.

Теорема. *Для $k = 8$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$*

$$q_2^{(0)}(n) = -\,\frac{1}{88}n^2 + \delta_1(n),$$

где $\delta_1(n + 44) = \delta_1(n)$. Значения $\delta_1(n)$ приведены в таблице 1.
Для $k = 9$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$

$$q_2^{(0)}(n) = -\,\frac{1}{108}n^2 + \frac{(-\,1)^n}{8} + \delta_2(n),$$

где $\delta_2(n + 27) = \delta_2(n)$. Значения $\delta_2(n)$ приведены в таблице 2.
Для $k = 8$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_3 = 4$

$$q_3^{(0)}(n) = -\,\frac{1}{76}n^2 + \delta_3(n),$$

где $\delta_3(n + 38) = \delta_3(n)$. Значения $\delta_3(n)$ приведены в таблице 3.
Для $k = 9$, $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 4$

$$q_3^{(0)}(n) = -\,\frac{1}{124}n^2 + \frac{(-\,1)^n}{8} + \delta_4(n),$$

где $\delta_4(n + 31) = \delta_4(n)$. Значения $\delta_4(n)$ приведены в таблице 4.

Такие же последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомос-k при $k = 4, 5, 6, 7$, были вычислены в работе [5].

Автор выражает благодарность В. А. Быковскому за постановку задачи.

1. Тропические последовательности

Пусть последовательность Сомос-k задана рекуррентным соотношением (1) и начальными переменными x_j. Представим ее в виде

$$S_k(n) = \left(\prod_{-k/2 < j \leqslant k/2} x_j^{p_k^{(j)}(n)} \right) \frac{A_k(n)}{B_k(n)}, \tag{6}$$

где $A_k(n)$, $B_k(n)$ — взаимно простые полиномы от переменных x_j, которые не делятся на x_j $(-k/2 < j \leqslant k/2)$, а $p_k^{(j)}(n)$ — последовательности целых чисел.

Лемма. *Для* $k \geqslant 4$ *и* $-k/2+1 < j \leqslant k/2$

$$p_k^{(j-1)}(n) = p_k^{(j)}(n+1)$$

при любом целом n.

Доказательство. Положив $n = 1$ в рекуррентном соотношении (1), найдем переменную

$$x_{[k/2]+1} = S_k([k/2]+1) = \frac{1}{x_{-[(k-1)/2]}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \alpha_i x_{[k/2]-i+1} x_{-[(k-1)/2]+i}.$$

Пусть

$$\widetilde{S}_k(n) = S_k(n+1).$$

Последовательность $\widetilde{S}_k(n)$ можно определить начальными переменными

$$\widetilde{S}_k(j) = x_{j+1}, \quad (-k/2 < j \leqslant k/2)$$

поэтому из равенства (6) следует, что

$$\widetilde{S}_k(n) = \left(\prod_{-k/2 < j \leqslant k/2} x_{j+1}^{p_k^{(j)}(n)} \right) \frac{\widetilde{A}_k(n)}{\widetilde{B}_k(n)},$$

где $\widetilde{A}_k(n)$, $\widetilde{B}_k(n)$ — взаимно простые полиномы от переменных x_j, которые не делятся на x_{j+1} $(-k/2 < j \leqslant k/2)$. С другой стороны,

$$\widetilde{S}_k(n) = S_k(n+1) = \left(\prod_{-k/2 < j \leqslant k/2} x_j^{p_k^{(j)}(n+1)} \right) \frac{A_k(n+1)}{B_k(n+1)}.$$

Сравнивая степени переменных x_j при $-k/2+1 < j \leqslant k/2$ в обоих представлениях для $\widetilde{S}_k(n)$ и принимая во внимание, что $x_{[k/2]+1}$ не делится на x_j при $-k/2+1 < j \leqslant k/2$, получаем утверждение леммы. □

Очевидно, что доказанная лемма будет верна и для последовательностей $q_2^{(j)}(n)$ и $q_3^{(j)}(n)$. Поэтому такие последовательности достаточно найти только для одного значения j. В приведенных ниже примерах мы будем искать последовательности $q_2^{(0)}(n)$ и $q_3^{(0)}(n)$, которые определяются рекуррентными соотношениями (4) и (5) с начальными значениями

$$q_2^{(0)}(j) = q_3^{(0)}(j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0. \end{cases} \qquad (-k/2 < j \leqslant k/2) \tag{7}$$

1.1. Двучленные последовательности

Пример 1. При $k=8$, $i_1=1$, $i_2=2$ рекуррентное соотношение (4) принимает вид

$$\begin{gathered} q_2(n+4) + q_2(n-4) = \\ = \min\bigl\{ q_2(n+3) + q_2(n-3), q_2(n+2) + q_2(n-2) \bigr\}. \end{gathered} \tag{8}$$

С помощью замены

$$h_2(n) = \Delta^2 q_2(n) = q_2(n+2) - 2q_2(n+1) + q_2(n)$$

оно приводится к виду

$$\begin{aligned}h_2(n+3) + 2h_2(n+2) + 3h_2(n+1) + 4h_2(n) + 3h_2(n-1) + 2h_2(n-2) + h_2(n-3) = \\ = \min\big\{h_2(n+2) + 2h_2(n+1) + 3h_2(n) + 2h_2(n-1) + h_2(n-2), \\ h_2(n+1) + 2h_2(n) + h_2(n-1)\big\}.\end{aligned}$$

Вычитая сумму $h_2(n+1)+2h_2(n)+h_2(n-1)$ из обеих частей последнего соотношения, получим

$$\begin{aligned}h_2(n+3) + 2h_2(n+2) + 2h_2(n+1) + 2h_2(n) + 2h_2(n-1) + 2h_2(n-2) + h_2(n-3) = \\ = \min\big\{h_2(n+2) + h_2(n+1) + h_2(n) + h_2(n-1) + h_2(n-2), 0\big\}.\end{aligned}$$

Из (7) следует, что

$$h_2(-3) = h_2(1) = h_2(2) = 0, \quad h_2(-2) = h_2(0) = 1, \quad h_2(-1) = -2.$$

Последовательность $h_2(n)$ однозначно определяется любыми шестью своими последовательными элементами. С помощью полученного соотношения составим таблицу.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$h_2(n)$	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$h_2(n)$	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	-1
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$h_2(n)$	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	

По этой таблице видно, что $h_2(n+44) = h_2(n)$ для любого целого n. Поэтому из теории конечных разностей следует, что

$$q_2(n) = an^2 + bn + \delta_1(n),$$

где a, b — некоторые постоянные, а $\delta_1(n+44) = \delta_1(n)$ для всех n. Полагая последовательно в этом соотношении $n = 0$, 44, 88 и решая получившуюся систему линейных уравнений относительно a и b, находим

$$a = \frac{q_2(0) - 2q_2(44) + q_2(88)}{2 \cdot 44^2}, \quad b = \frac{-3q_2(0) + 4q_2(44) - q_2(88)}{2 \cdot 44}.$$

С помощью соотношения (8) вычисляем

$$q_2(0) = 1, \quad q_2(44) = -21, \quad q_2(88) = -87$$

и находим, что

$$a = -\frac{1}{88}, \quad b = 0.$$

Теперь можно найти период последовательности $\delta_1(n)$. Он приведен в следующей таблице.

Таблица 1. Период последовательности $\delta_1(n)$.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$88\delta_1(n)$	9	4	1	88	1	4	9	16	25	36	49	-24	-7	12	33
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$88\delta_1(n)$	56	81	20	-39	-8	25	60	97	48	1	-44	1	48	97	60
n	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
$88\delta_1(n)$	25	-8	-39	20	81	56	33	12	-7	-24	49	36	25	16	

Пример 2. $k=9$, $i_1=1$, $i_2=3$. Рекуррентное соотношение (4) принимает вид

$$q_2(n+5)+q_2(n-4)= \min\big\{q_2(n+4)+q_2(n-3), q_2(n+2)+q_2(n-1)\big\}. \qquad (9)$$

Выполнив замену

$$h_2(n)=q_2(n+3)-q_2(n+2)-q_2(n+1)+q_2(n),$$

получим соотношение для $h_2(n)$

$$h_2(n+3)+h_2(n+2)+2h_2(n+1)+h_2(n)+2h_2(n-1)+h_2(n-2)+h_2(n-3)= \\ = \min\big\{h_2(n+2)+h_2(n+1)+h_2(n)+h_2(n-1)+h_2(n-2), 0\big\}$$

с начальными значениями

$$h_2(-4)=h_2(1)=0, \quad h_2(-3)=h_2(0)=1, \quad h_2(-2)=h_2(-1)= -1.$$

Составим таблицу значений $h_2(n)$.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h_2(n)$	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
$h_2(n)$	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	

По таблице видно, что

$$h_2(n+27)=h_2(n).$$

Поэтому из теории конечных разностей следует, что

$$q_3(n)=an^2+bn+c(-1)^n+\delta_2(n),$$

где a, b, c — некоторые постоянные, а $\delta_2(n+27)=\delta_2(n)$ для всех n. Полагая последовательно в этом соотношении $n=0$, 27, 54, 81 и решая получившуюся систему линейных уравнений относительно a, b и c, находим

$$a=\frac{q_2(0)-q_2(27)-q_2(54)+q_2(81)}{4\cdot 27^2},$$

$$b=\frac{-2q_2(0)+q_2(27)+2q_2(54)-q_2(81)}{2\cdot 27},$$

$$c=\frac{q_2(0)-3q_2(27)+3q_2(54)-q_2(81)}{8}.$$

С помощью рекуррентного соотношения (9) находим

$$q_2(0) = 1, \quad q_2(27) = -6, \quad q_2(54) = -26, \quad q_2(81) = -60$$

и окончательно получаем

$$a = -\frac{1}{108}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{8}.$$

После этого находим период последовательности $\delta_2(n)$. Он приведен в следующей таблице.

Таблица 2. Период последовательности $\delta_2(n)$.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$216\delta_2(n)$	5	45	-19	29	189	29	-19	45	5	77	45	125	101	-27
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
$216\delta_2(n)$	-43	53	45	149	149	45	53	-43	-27	101	125	45	77	

1.2. Трехчленные последовательности

Пример 3. $k=8$, $i_1=1$, $i_2=3$, $i_3=4$. Действуем так же, как в примере 1. Рекуррентное соотношение (5) имеет вид

$$q_3(n+4) + q_3(n-4) = \min\{q_3(n+3) + q_3(n-3), q_3(n+1) + q_3(n-1), 2q_3(n)\}.$$

После замены

$$h_3(n) = \Delta^2 q_3(n) = q_3(n+2) - 2q_3(n+1) + q_3(n)$$

оно принимает вид

$$h_3(n+3) + 2h_3(n+2) + 3h_3(n+1) + 4h_3(n) + 3h_3(n-1) + 2h_3(n-2) + h_3(n-3) = \\ = \min\{h_3(n+2) + 2h_3(n+1) + 3h_3(n) + 2h_3(n-1) + h_3(n-2), h_3(n), 0\}.$$

Начальные значения для $h_3(n)$ такие же, как в примере 1.

Составим таблицу значений $h_3(n)$.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h_3(n)$	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	1
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$h_3(n)$	0	-1	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	-1	0	1	-1
n	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
$h_3(n)$	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	

По таблице видно, что для любого целого n

$$h_3(n+38) = h_3(n).$$

Действуя, как в примере 1, находим

$$q_3(0) = 1, \quad q_3(38) = -18, \quad q_3(76) = -75,$$
$$a = -\frac{1}{76}, \quad b = 0.$$

Теперь находим период последовательности $\delta_3(n)$. Он приведен в следующей таблице.

Таблица 3. Период последовательности $\delta_3(n)$.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$76\delta_3(n)$	9	4	1	76	1	4	9	16	25	36	49	-12	5
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$76\delta_3(n)$	24	45	-8	17	44	-3	28	61	20	-19	20	61	28
n	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
$76\delta_3(n)$	-3	44	17	-8	45	24	5	-12	49	36	25	16	

Пример 4. $k=9$, $i_1=2$, $i_2=3$, $i_3=4$. Действуем по схеме примера 2. Рекуррентное соотношение (5) имеет вид

$$q_3(n+5) + q_3(n-4) =$$
$$= \min\{q_3(n+3) + q_3(n-2), q_3(n+2) + q_3(n-1), q_3(n+1) + q_3(n)\}.$$

С помощью замены

$$h_3(n) = q_3(n+3) - q_3(n+2) - q_3(n+1) + q_3(n)$$

оно приводится к виду

$$h_3(n+3) + h_3(n+2) + 2h_3(n+1) + 2h_3(n) + 2h_3(n-1) + h_3(n-2) + h_3(n-3) =$$
$$= \min\{h_3(n+1) + h_3(n) + h_3(n-1), h_3(n), 0\}.$$

Начальные значения для $h_3(n)$ такие же, как в примере 2.

Составим таблицу значений $h_3(n)$.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h_3(n)$	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	-1	1	0
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$h_3(n)$	-1	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	-1	0	1
n	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32		
$h_3(n)$	-1	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0		

По таблице видно, что для любого целого n

$$h_3(n+31) = h_3(n).$$

Действуя, как в примере 2, находим

$$q_3(0) = 1, \quad q_3(31) = -7, \quad q_3(62) = -30, \quad q_3(93) = -69,$$

$$a = -\frac{1}{124}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{8}.$$

Находим период последовательности $\delta_4(n)$.

Таблица 4. Период последовательности $\delta_4(n)$.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$248\delta_4(n)$	1	49	-23	33	217	33	-23	49	1	81	41
n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$248\delta_4(n)$	129	97	-55	169	25	9	121	113	-15	-15	113
n	18	19	20	21	22	23	24	25	26		
$248\delta_4(n)$	121	9	25	169	-55	97	129	41	81		

Список литературы

[1] D. Gale, “The strange and surprising saga of the Somos sequences”, *Math. Intelligencer*, **13**:1 (1991), 40–42.

[2] R. K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, 2, Springer-Verlag, New York, 1994.

[3] S. Fomin and A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28** (2002), 119–144.

[4] R. Robinson, “Periodicity of Somos sequences”, *Proceedings of the AMS*, **116**:3 (1992), 613–619.

[5] В. А. Быковский, М. А. Романов, А. В. Устинов, “Тропические последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса”, *Чебышевский сборник*, **22**:1 (2021), 118–132.

Поступила в редакцию
14 октября 2021 г.

Romanov M. A.[1] Tropical sequences associated with the Gale-Robinson sequences. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 2. P. 247–256.

[1] Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

In this paper, tropical sequences associated with some Gale-Robinson sequences are calculated.

Key words: *Somos sequences, Gale-Robinson sequences, tropical sequences.*

References

[1] D. Gale, “The strange and surprising saga of the Somos sequences”, *Math. Intelligencer*, **13**:1 (1991), 40–42.

[2] R. K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, 2, Springer-Verlag, New York, 1994.

[3] S. Fomin and A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28** (2002), 119–144.

[4] R. Robinson, “Periodicity of Somos sequences”, *Proceedings of the AMS*, **116**:3 (1992), 613–619.

[5] V. A. Bykovskii, M. A. Romanov, A. V. Ustinov, “Tropicheskie posledovatel’nosti, assotsiirovannye s posledovatel’nostiami Somosa”, *Chebyshevskii sbornik*, **22**:1 (2021), 118–132.