

УДК 517.9+519.6
MSC2020 49J40+65K15

© А. Я. Золотухин¹

Приближенное решение задачи Синьорини методом конечных элементов в трехмерном пространстве

Метод конечных элементов, как правило, применяется к двумерным областям. Здесь задача Синьорини решается методом конечных элементов, когда область — прямоугольный параллелепипед.

Ключевые слова: метод конечных элементов, задача Синьорини.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202117>

1. Постановка задачи

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ . Рассмотрим процесс установившегося движения жидкости в области Ω , ограниченной полупроницаемой мембраной. Как известно [1], давление u в Ω удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u = f, \quad (1)$$

где $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $\psi \in L_2(\Gamma)$ — давление жидкости на границе Γ (вне Ω). Если $u(x) \leq \psi(x)$, то жидкость может втекать в Ω , и потому расход жидкости отличен от нуля, т.е. $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \geq 0$, где \vec{n} — внешний нормальный вектор к Γ . Если $u(x) \geq \psi(x)$, то жидкость стремится покинуть Ω , но мембрана препятствует такому движению, и, следовательно, расход жидкости отсутствует, т.е. $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$. Таким образом, выполнены следующие краевые условия:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \geq 0, \quad u - \psi \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(u - \psi) = 0 \quad \text{п.в. на } \Gamma. \quad (2)$$

Условиями (2) граница Γ делится на две части: на одной выполняется равенство $u - \psi = 0$, а на другой $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$. Эти части заранее не известны.

¹ Тульский государственный университет, 300600, г. Тула, пр-т Ленина, 92. Электронная почта: zolot_aj@mail.ru

Известно [1], что вариационная постановка задачи (1)–(2) имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega \quad - \min \quad (3)$$

на выпуклом замкнутом множестве

$$G = \{u \in W_2^1(\Omega) : \gamma u \geq \psi, \quad \text{п.в. на } \Gamma\}, \quad (4)$$

где $\gamma u \in W_2^{1/2}(\Omega)$ — след функции $u \in W_2^1(\Omega)$ на Γ , $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3$. Ядро R_a билинейной формы $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega$ не пусто. Оно состоит из функций, постоянных на Ω . Размерность ядра R_a равна 1. Заметим, что задача (3)–(4) может и не иметь решения. Однако если

$$\int_{\Omega} f d\Omega < 0, \quad (5)$$

то эта задача разрешима [1], так как $J(u) \rightarrow +\infty$ при $\|u\| \rightarrow \infty$. Условие (5) также гарантирует единственность решения [2]. Далее мы предполагаем, что условие (5) выполнено. Согласно [3] задача (3)–(4) эквивалентна следующей вариационной задаче: найти такую функцию $u \in G$, что

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \text{для всех } v \in G, \quad (6)$$

где $(f, v - u) = \int_{\Omega} f(v - u) d\Omega$.

2. Метод решения

Численное решение задачи проводилось методом конечных элементов, когда область Ω — прямоугольный параллелепипед со сторонами a , b и c . Введем систему координат, в которой начало координат совпадает с вершиной параллелепипеда Ω . Ребра, выходящие из этой вершины, лежат на положительных полуосях координат. Выберем параметр h так, чтобы числа $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{h}$ и $\frac{c}{h}$ были четными. Произведем следующие три операции:

1) разрежем Ω на четное число слоев высоты h плоскостями, параллельными координатной плоскости $x_1 o x_2$, вдоль оси $x_3 o$, т. е. точки деления, через которые проходят плоскости, лежат на оси $x_3 o$ с шагом h ; 2) не передвигая слои, разрежем Ω на четное число слоев длины h плоскостями, параллельными координатной плоскости $x_1 o x_3$, вдоль оси $x_2 o$; 3) разрежем Ω на четное число слоев ширины h плоскостями, параллельными координатной плоскости $x_2 o x_3$ вдоль оси $x_1 o$. Объединение полученных кубов с ребром h совпадает с замыканием области Ω .

Опишем способы разбиения кубов. Рассмотрим куб $ABCD A^1 B^1 C^1 D^1$ с ребром h . По построению вершина A — начало координат, B принадлежит оси $x_1 o$, D — оси $x_2 o$, а A^1 — оси $x_3 o$. Разрезание кубов со стороной h проводим в порядке, обратном разрезанию исходного параллелепипеда.

Начнем разрезание с кубов, расположенных на плоскости x_1ox_2 . Из ряда кубов, ребро которых принадлежит оси x_1o , возьмем куб с ребром лежащим на оси x_2o , разрежем его на пять пирамид: $ABDA^1$, $DBCC^1$, $A^1C^1B^1B$, $A^1C^1DD^1$ и BDA^1C^1 (см. рис. 1, способ I). Этот способ разбиения куба на пирамиды будем называть первым.

Переходим к следующему кубу по оси x_1o , его разрезаем на пять пирамид: $ABCB^1$, $ACDD^1$, $AB^1A^1D^1$, $CB^1C^1D^1$ и ACB^1D^1 (см. рис. 1, способ II). Это второй способ разбиения куба на пирамиды.

Следующий куб разрезаем первым способом и т.д., пока не дойдем до конца ряда. Переходим на второй ряд по оси x_2o . Продолжаем с первого куба, т.е. куба, лежащего на оси x_1o . Его разрезаем вторым способом, следующий — первым и так далее, пока не дойдем до конца второго ряда. Процедуру продолжаем, пока не разрежем все кубы первого слоя.

Переходим на второй слой по оси x_3o . В случае, если куб лежит на кубе, разрезанном первым способом, то разрезаем его вторым способом, и наоборот. Процедуру продолжаем, пока не разрежем все кубы второго слоя. Переходим к следующему слою и так далее, пока не разрежем на пирамиды все кубы с ребром h .

Совокупность всех пирамид есть триангуляция T_h области Ω , h — параметр триангуляции.

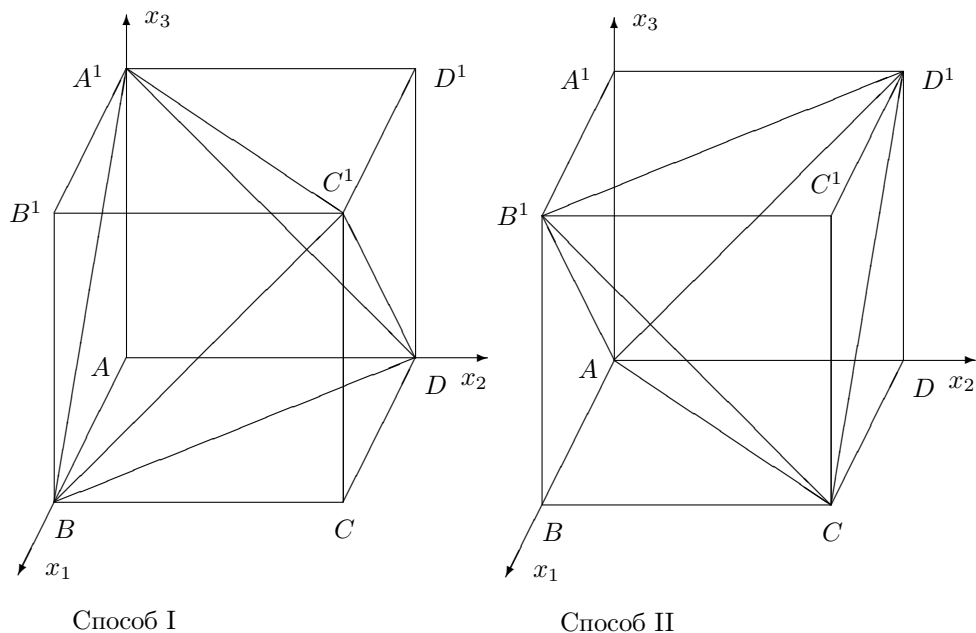


Рис. 1. Способы разрезания куба с ребром h .

Заметим, что если мы передвинем параллельно себе куб, разрезанный способом II , вдоль оси x_2o до соприкосновения с кубом, разрезанным способом I , то вершина D совпадет с вершиной A , вершина C совпадет с вершиной B (см. рис. 1), получим равнобедренный треугольник $B(DA)C$, (вершина (DA) означает совпадение вершин) $BD=AC=h\sqrt{2}$. Его третья сторона состоит из отрезков BC и BC , принадлежащим разным кубам, т. е. левому и правому. Перечислим вершины пирамиды, сохраняя буквы вершин, которые совпали. Их заключим в скобки $B(DA)C(CB)(C^1B^1)$. Эта пирамида — $\frac{1}{4}$ октаэдра.

Переходим на второй ряд, куб с ребром, лежащим на оси x_2o , разрежем способом II , т. е. можно передвинуть правый куб (по диагонали) (см. рис. 1) параллельно себе так, чтобы вершина B совпала с вершиной A , вершина C с — D и C^1B^1 — с вершиной D^1 . Аналогично (см. рис. 1), передвигаем левый куб параллельно себе (по диагонали) так, чтобы вершина BD совпала с вершиной A , чтобы вершина C совпала с вершиной B , вершина $C^1B^1D^1$ с вершиной A^1 . Вот мы и получили половину октаэдра. Совпадающие вершины полуоктаэдра, обозначаемые несколькими буквами, заключаем в скобки (BA) , (DA) , (CD) , (CB) , $(CBDA)$ и $(C^1B^1D^1A^1)$.

Заметим, что если вершина, лежащая внутри основания параллелепипеда, принадлежит 4 правильным пирамидам, то их объединение есть половина октаэдра.

Итак, внутренняя часть параллелепипеда Ω будет заполнена правильными трехгранными пирамидами и октаэдрами. На границе будут части октаэдра и правильные пирамиды. Совокупность всех пирамид есть триангуляция T_h области Ω .

Пересечение треугольных пирамид T_i и T_j есть либо пустое множество, либо вершина A_m , либо сторона l_k , либо треугольник (грань), у которого вершины принадлежат множеству $\{A_j, B_k, C_q, D_r\}$ (здесь индексы могут располагаться и внизу, и вверху).

Конечным элементом, соответствующим вершине A_p , называется объединение всех пирамид, имеющих вершину A_p . Конечные элементы для внутренних узлов триангуляции будут двух типов: октаэдры с центром в A_p (см. рис. 2) имеющие 7 узлов и объединение 8 правильных пирамид по числу вершин куба и 6 полуоктаэдров по числу граней куба (см. рис. 3). Они имеют 19 узлов.

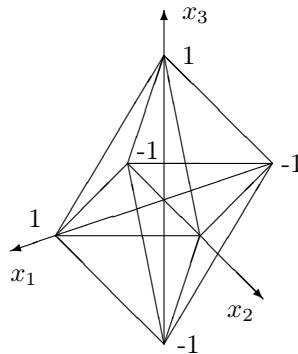


Рис. 2. Конечный элемент с 7 узлами.

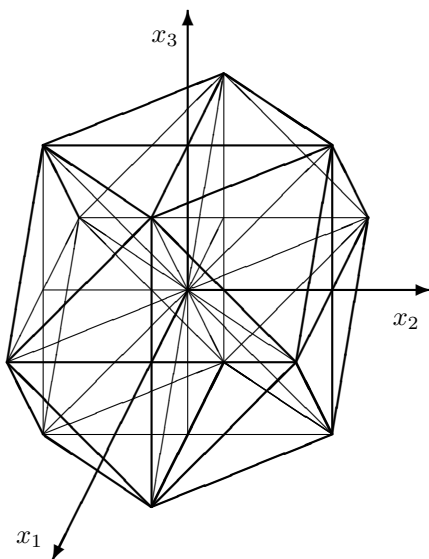


Рис. 3. Конечный элемент с 19 узлами.

Количество узлов конечного элемента определяется базисными функциями, которые равны 1 в одной из вершин пирамиды и 0 в во всех других узлах триангуляции, поэтому произведение двух базисных функций отлично от нуля, если узлы, им соответствующие, принадлежат общей пирамиде.

Конечный элемент граничного узла есть пересечение соответствующего конечного элемента внутреннего узла с замыканием области Ω . Такая триангуляция сокращает число типов функций до двух. Последнее упрощает программу.

Рассмотрим пирамиду $ABDA^1$, где A — начало координат, а вершины B , D и A^1 принадлежат положительным полуосям ox_1 , ox_2 и ox_3 соответственно. Каждой вершине сопоставляем базисную функцию, которая является линейной (т. е. многочленом степени не выше 1 от переменных x_1 , x_2 , x_3 на пирамиде) и принимает значение 1 в этой вершине (которую мы используем в качестве индекса) и 0 во всех других узлах (вершинах). Этим свойством базисная функция определяется однозначно.

Каждой пирамиде соответствуют четыре базисные функции. Приведем эти функции и их градиенты для пирамиды $ABDA^1$:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 1 - \frac{x_1}{h} - \frac{x_2}{h} - \frac{x_3}{h} \implies \nabla\varphi_A = \left\{ -\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}, -\frac{1}{h} \right\}, \\ \varphi_{A^1} &= \frac{x_3}{h} \implies \nabla\varphi_{A^1} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{h} \right\}, \quad \varphi_B = \frac{x_1}{h} \implies \nabla\varphi_B = \left\{ \frac{1}{h}, 0, 0 \right\}, \\ \varphi_D &= \frac{x_2}{h} \implies \nabla\varphi_D = \left\{ 0, \frac{1}{h}, 0 \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично находим базисные функции и их градиенты для правильных пирамид $BCDC^1$, $BA^1B^1C^1$, $DC^1A^1D^1$.

Приведем базисные функции для пирамиды BDA^1C^1 , а также их градиенты:

$$\begin{aligned}\varphi_D &= -\frac{x_1}{2h} + \frac{x_2}{2h} - \frac{x_3}{2h} + \frac{1}{2}, & \nabla\varphi_D &= \left\{ -\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}, -\frac{1}{2h} \right\}, \\ \varphi_B &= \frac{x_1}{2h} - \frac{x_2}{2h} - \frac{x_3}{2h} + \frac{1}{2}, & \nabla\varphi_B &= \left\{ \frac{1}{2h}, -\frac{1}{2h}, -\frac{1}{2h} \right\}, \\ \varphi_{C^1} &= \frac{x_1}{2h} + \frac{x_2}{2h} + \frac{x_3}{2h} - \frac{1}{2}, & \nabla\varphi_{C^1} &= \left\{ \frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}, \frac{1}{2h} \right\}, \\ \varphi_{A^1} &= 1 - \frac{x_1}{2h} + \frac{x_2}{2h} - \frac{x_3}{2h}, & \nabla\varphi_{A^1} &= \left\{ -\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}, -\frac{1}{2h} \right\}.\end{aligned}$$

Аналогично находим базисные функции и их градиенты для куба, разрезанного вторым способом.

Нетрудно проверить, что скалярные произведения градиентов базисных функций для пирамиды $ABDA^1$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi_A, \nabla\varphi_A) &= \frac{3}{h^2}, & (\nabla\varphi_A, \nabla\varphi_{A^1}) &= (\nabla\varphi_A, \nabla\varphi_B) = (\nabla\varphi_A, \nabla\varphi_D) = -\frac{1}{h^2}, \\ (\nabla\varphi_B, \nabla\varphi_B) &= (\nabla\varphi_{A^1}, \nabla\varphi_{A^1}) &= (\nabla\varphi_D, \nabla\varphi_D) &= \frac{1}{h^2}.\end{aligned}$$

Остальные скалярные произведения градиентов базисных функций равны нулю

$$(\nabla\varphi_B, \nabla\varphi_D) = 0 = (\nabla\varphi_B, \nabla\varphi_{A^1}) = (\nabla\varphi_{A^1}, \nabla\varphi_D).$$

Сумма всех скалярных произведений с участием одной и той же функции равна нулю.

Найдем скалярные произведения градиентов базисных функций пирамиды A^1C^1BD :

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi_{A^1}, \nabla\varphi_{A^1}) &= (\nabla\varphi_B, \nabla\varphi_B) = (\nabla\varphi_{C^1}, \nabla\varphi_{C^1}) = (\nabla\varphi_D, \nabla\varphi_D) = \frac{3}{4h^2}, \\ (\nabla\varphi_{A^1}, \nabla\varphi_B) &= (\nabla\varphi_{A^1}, \nabla\varphi_D) = (\nabla\varphi_{A^1}, \nabla\varphi_{C^1}) = (\nabla\varphi_B, \nabla\varphi_{C^1}) = \\ &= (\nabla\varphi_D, \nabla\varphi_B) = -\frac{1}{4h^2}.\end{aligned}$$

Аналогично определяются базисные функции и их градиенты пирамиды ACB^1D^1 .

Зададим конечномерное пространство кусочно-линейных функций:

$$W_{2,h}^1(\Omega) = \{v_h \in C(\Omega), v_h|_T \in \bar{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

здесь $\bar{P}_1(T)$ — множество полиномов степени не выше первой на пирамиде T . Обозначим M_Γ множество узлов триангуляции \mathcal{T}_h , принадлежащих границе Γ , и определим $G_h = \{v_h \in W_{2,h}^1 : v_h(A_j) \geq 0, \quad \forall A_j \in M_\Gamma\}$. Из определения G_h следует, что оно замкнуто и выпукло. Кроме того, $G_h \subset G \quad \forall h > 0$.

Представим требуемую функцию u_h в виде $u_h = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i(x_1, x_2, x_3)$, где φ_i — это кусочно-линейные базисные функции, определенные выше, N — число узлов триангуляции \mathcal{T}_h . Оператор $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow W_{2,h}^1(\Omega)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ и $v_h \in W_{2,h}^1(\Omega)$, $v_h = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i$.

Определим множество $K \subset \mathbb{R}^N = Q^{-1}(G_h)$. Если условие (5) выполнено, то из включений $G_h \subset G$ и $W_{2,h}^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ следует, что решение y^* существует и единственно. Множество K есть декартово произведение $K = K^1 \times K^2 \times \dots \times K^N$, где $K^i = [0, \infty)$, если узел $A_i \in M_\Gamma$, и $K^i = \mathbb{R}$, если узел A_i внутренний.

Стандартными преобразованиями сведем задачу (3)–(4) к конечномерной задаче

$$J_1(y) = \langle Ay, y \rangle - \langle P, y \rangle - \min \text{ для } y \in K, \tag{7}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^N , матрица A соответствует форме $\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega$, вектор $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ — линейной форме $\int f u d\Omega$. Диагональные элементы a_{ii} матрицы A положительны, так как $a_{ii} = \int_\Omega |\nabla \varphi_i|^2 d\Omega > 0$.

В монографии [3] решение задачи (7) найдено методом верхней релаксации с проектированием, когда матрица A строго положительно определена и симметрична. Здесь ситуация другая, матрица A — вырожденная (положительно определена на подпространстве конечной коразмерности).

В настоящей работе мы также будем применять метод верхней релаксации с проектированием, только модифицированный. В отличие от классического метода, где используется положительность всех собственных значений матрицы A , мы будем учитывать положительность всех ее диагональных элементов.

Применим метод верхней релаксации с проекцией [3]. Задаем произвольный элемент $y^n \in K$, затем уточняем координаты y^n по схеме: вычисляем промежуточное значение координаты $y_i^{n+1/2}$ по формуле (7)

$$y_i^{n+1/2} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{n+1} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} y_j^n - p_i \right)$$

(эта формула решает задачу минимизации функционала $J_1(y)$ по y_i на множестве K^i), и находим

$$y_i^{n+1} = P_{K^i}(\omega y_i^{n+1/2} + (1 - \omega)y_i^n),$$

где P_{K^i} — оператор проектирования R^i на K^i . В нашем конкретном случае имеем $P_{K^i}(y_i^{n+1}) = \max\{0, y_i^{n+1/2}\}$, если $i \in M_\Gamma$, и $P_{K^i}(y_i^{n+1/2}) = 0$, если $y_i^{n+1/2} \leq 0$ для $i \in M_\Gamma$, и равен $P_{K^i}(y_i^{n+1}) = y_i^{n+1/2}$ для $i \notin M_\Gamma$. Выбираем параметр $\omega \in (0, 2)$ так, чтобы увеличить скорость сходимости.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (5). Тогда последовательность $\{y^n\}$, полученная методом релаксации с проекцией, сходится к решению y^* задачи (7).

Доказательство. Далее, для простоты, мы пишем J вместо J_1 . Достаточно доказать, что

$$J(y^n) - J(y^{n+1}) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2 - \omega}{\omega} \right) \sum_{i=1}^N a_{ii} |y_i^{n+1} - y_i^n|^2 \tag{8}$$

для $i=1,2,\dots,N$, поскольку из (8) следует убывание последовательности. Обозначим $\delta = \min\{a_{ii}\}$, тогда, суммируя по i от 1 до N , будем иметь

$$J(y^n) - J(y^{n+1}) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2-\omega}{\omega} \right) \delta \|y_i^{n+1} - y_i^n\|_{R^N}^2. \quad (9)$$

Воспользовались равенством $\|y^{n+1} - y^n\|_{R^N}^2 = \sum_{i=1}^N |y_i^{n+1} - y_i^n|^2$.

Обозначим

$$\begin{aligned} {}^i y^{n+1} &= (y_1^{n+1}, \dots, y_i^{n+1}, y_{i+1}^n, \dots, y_N^n), \\ {}^i y^{n+1/2} &= (y_1^{n+1/2}, \dots, y_i^{n+1/2}, y_{i+1}^n, \dots, y_N^n), \\ {}^0 y^{n+1} &= y^n. \end{aligned}$$

Для $i=1$ имеем

$$\begin{aligned} J({}^{i-1}y^n) - J({}^1y^{n+1}) &= \frac{1}{2} a_{11} (y_1^n)^2 + \sum_{j=2}^N a_{1j} y_1^n y_j^n - p_1 y_1^n - \\ &\quad - \frac{1}{2} a_{11} (y_1^{n+1})^2 - \sum_{j=2}^N a_{1j} y_1^{n+1} y_j^n + p_1 y_1^{n+1} = \\ &= \frac{1}{2} a_{11} ((y_1^n)^2 - (y_1^{n+1})^2) + \left(\sum_{j=2}^N a_{1j} y_j^n \right) (y_1^n - y_1^{n+1}) - p_1 (y_1^n - y_1^{n+1}) = \\ &= \frac{1}{2} a_{11} ((y_1^n)^2 - (y_1^{n+1})^2) - a_{11} y_1^{n+1/2} (y_1^n - y_1^{n+1}) = \\ &= a_{11} \left(-\frac{1}{2} (y_1^{n+1} - y_1^n)^2 + (y_1^n - y_1^{n+1}) (y_1^n - y_1^{n+1/2}) \right). \end{aligned}$$

Из равенства $y_1^{n+1} = P_{K^1} \left((1-\omega)y_1^n + \omega y_1^{n+1/2} \right)$ следует неравенство (оператор проектирования P_{K^1} линеен, не увеличивает расстояние т. к. его норма равна 1)

$$(y_1^n - y_1^{n+1}) \left((1-\omega)y_1^n + \omega y_1^{n+1/2} - y_1^{n+1} \right) \leq 0,$$

откуда

$$(y_1^n - y_1^{n+1}) \left((y_1^n - y_1^{n+1}) - \omega (y_1^n - y_1^{n+1/2}) \right) \leq 0.$$

Последнее влечет за собой неравенство $(y_1^n - y_1^{n+1}) (y_1^n - y_1^{n+1/2}) \geq \frac{1}{\omega} (y_1^{n+1} - y_1^n)^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} J({}^0y_1^{n+1}) - J({}^1y_1^{n+1}) &\geq a_{11} \left(-\frac{1}{2} (y_1^{n+1} - y_1^n)^2 + \frac{1}{\omega} (y_1^{n+1} - y_1^n)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2-\omega}{\omega} \right) (y_1^{n+1} - y_1^n)^2. \end{aligned}$$

Доказательство для $i=2,\dots,N$ аналогично представленному.

Последовательность $\{J(y^n)\}$ убывает и ограничена $J(y^*)$, потому сходится и, следовательно, ограничена. Последовательность $\{y^n\}$ ограничена, поэтому компактна. Пусть $\tilde{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{n_k}$ ($\{y^{n_k}\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y^n\}$). Если $J(\tilde{y}) = J(y^*)$, то \tilde{y} — решение, и в силу единственности решения $\tilde{y} = y^*$. Пусть, напротив, $J(\tilde{y}) > J(y^*)$. Из того, что матрица A полуположительно определена в \mathbb{R}^N , следует, что квадратичная функция выпуклая, поэтому имеем

$$\langle \nabla J(\tilde{y}), (y^* - \tilde{y}) \rangle_{\mathbb{R}^N} \leq J(y^*) - J(\tilde{y}) < 0.$$

Следовательно, существует такое y_j , что

$$\frac{\partial J(\tilde{y})}{\partial y_j} (y_j^* - \tilde{y}_j) < 0.$$

Легко видеть, что $\tilde{y}_j + \lambda(y_j^* - \tilde{y}_j) \in K^j$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Определим

$$\frac{\partial J(\tilde{y})}{\partial y_j} = \mu \neq 0, \quad y_j^* - \tilde{y}_j = \beta \neq 0.$$

Положим для определенности $\mu > 0$, тогда $\beta < 0$, так как $y_j^* < \tilde{y}_j$. Возьмем $r > 0$ такое, чтобы $r > -\beta$, тогда для всех $y \in B_r(\tilde{y}) = \{z : \|z - \tilde{y}\| \leq r\}$ справедливо неравенство $\frac{\partial J(y)}{\partial y_j} < \frac{\mu}{2}$.

Пусть $y^{n_k} \in B_{r/4}(\tilde{y})$ для достаточно большого числа n_k , тогда из (9) выполняется неравенство

$$\|y^{n_{k+1}} - y^{n_k}\| < \frac{r}{4},$$

из которого следует, что

$$\|j^{-1}y^{n_{k+1}} - y^{n_k}\| < \frac{r}{4}.$$

Следовательно,

$$\|j^{-1}y^{n_{k+1}} - \tilde{y}^{n_k}\| \leq \|j^{-1}y^{n_{k+1}} - y^{n_k}\| + \|y^{n_k} - \tilde{y}\| < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}.$$

В этом случае $j^{-1}y^{n_{k+1}} - (r/2)\varphi_j \in B_r(\tilde{y})$, где φ_j — базисный вектор, соответствующий узлу j . Пусть $y_j^{n_{k+1}/2}$ — решение неравенства [3]

$$\begin{aligned} & J(y_j^{n_{k+1}/2}, \dots, y_j^{n_{k+1}/2}, y_{j+1}^{n_k}, \dots, y_N^{n_k}) \leq \\ & \leq J(y_j^{n_{k+1}/2}, \dots, y_{j-1}^{n_{k+1}/2}, v, y_{j+1}^{n_k}, \dots, y_N^{n_k}) \quad \text{для } \forall v \in R^j. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(jy^{n_{k+1}/2}) - J(j^{-1}y^{n_{k+1}}) & \leq J(j^{-1}y^{n_{k+1}} - \frac{r}{2}\varphi_j) - J(j^{-1}y^{n_{k+1}}) \leq \\ & \leq -\frac{\partial J}{\partial y_j}(j^{-1}y^{n_{k+1}} - \frac{r}{2}\varphi_j) < -\frac{\mu}{2} \cdot \frac{r}{2} = -\frac{\mu r}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, $y_j^{n_{k+1}/2} - y_j^{n_k} \leq -\frac{r}{2}$ и

$$(1 - \omega)\varphi_j^{n_k} + \omega y_j^{n_{k+1}/2} - y_j^{n_k} = \omega(y_j^{n_{k+1}/2} - y_j^{n_k}) \leq -\frac{\omega r}{2}.$$

Если $(1-\omega)y_j^{n_k} + \omega y_j^{n_k+1/2} \in K^j$, тогда $y_j^{n_k+1} = (1-\omega)y_j^{n_k} + \omega y_j^{n_k+1/2}$ и, следовательно, $y_j^{n_k+1} - y_j^{n_k} \leq -\frac{\omega\tau}{2}$. Если узел j лежит на границе Γ , значит, $y_j^{n_k+1} = 0$. Тогда $y_j^{n_k+1} - y_j^{n_k} = -y_j^{n_k}$. Имеем $y_j^{n_k} \geq y_j^* + (-\beta - r/4) \geq -\beta - \frac{r}{4} < 0$. Это согласуется с выбором r . Поэтому $y_j^{n_k+1/2} - y_j^{n_k} \leq \beta + \frac{r}{4} < 0$. Следовательно,

$$y_j^{n_k+1/2} - y_j^{n_k} \leq \max\{-(r\omega/2), \beta + r/4\} < 0$$

для достаточно больших n_k вопреки (9).

Случай $\mu < 0$ исследуется аналогично. Поэтому $J(y^*) = J(\tilde{y})$, и $y^* = \tilde{y}$ в силу единственности решения. \square

3. Численное решение задачи

Численное решение задачи проводилось для области Ω , представляющей собой прямоугольный параллелепипед со сторонами $a=1$, $b=2$ и $c=1$. Функция $\psi=0$ на границе Γ , $f=-19$ на кубе $\Omega_1 = [1/4, 3/4] \times [1/4, 3/4] \times [1/4, 3/4]$ и $f=1$ на дополнении к Ω_1 . Эти значения выбраны так, чтобы условие (5) выполнялось. Стартовое значение есть $y^0 = [0, 0, \dots, 0]$. Параметр релаксации $\omega=1.75$ его подобрали экспериментально, чтобы ускорить сходимость. Решение на нижнем основании параллелепипеда изображено на рис. 4.

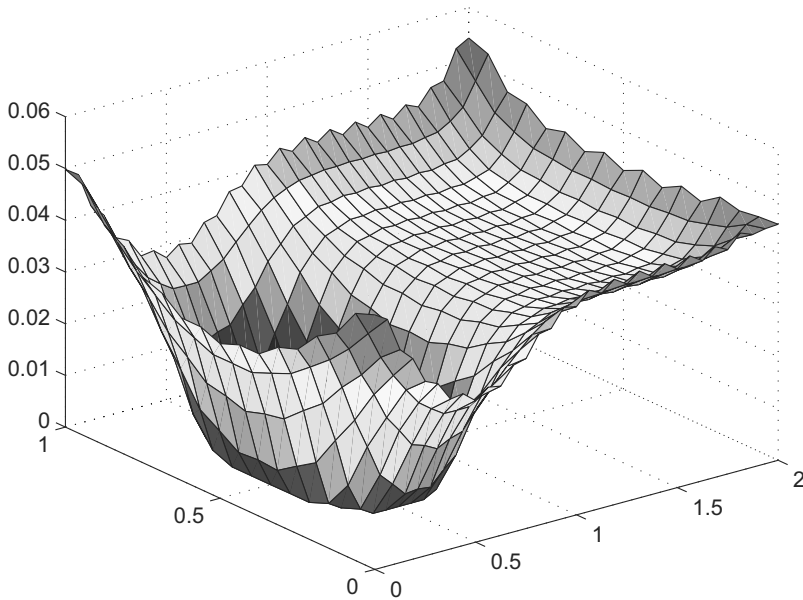


Рис. 4. Значения приближенного решения u_h^* на нижнем основании Ω .

Задача решалась на последовательности триангуляций с параметром $h = 2^{-k}$, $k = 2, 3, 4, 5, 6$. Все узлы следующей триангуляции, как того требует метод, содержат все узлы предыдущей триангуляции. Значения решения при переходе к новому значению параметра h на новых узлах триангуляции определялись по линейности. Число итераций и условия останова приведены в таблице 1.

Таблица 1. $\gamma(n)$ — условия останова для итераций, $k(n)$ — число итераций.

h_n	1/4	1/8	1/16)	1/32)	1/64
$\gamma(n)$	0.1	0.05	0.01	0.0005	0.0001
$k(n)$	11	24	37	69	123

Хотя алгоритм не допускает распараллеливания, расчеты выполнены за счет ресурсов Центра коллективного пользования научным оборудованием “Центр обработки и хранения научных данных ДВО РАН”. Выражаю благодарность коллективу Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Список литературы

- [1] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.
- [2] Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*, Наука, М., 1989.
- [3] Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Н. Трёмольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М., 1979.
- [4] Г.И. Марчук, Ю.М. Агашков, *Введение в проекционно-сеточные методы*, Наука, М., 1975.
- [5] М. Мину, *Математическое программирование*, Наука, М., 1990.
- [6] С.Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высш. школа, М., 1977.

Поступила в редакцию
21 сентября 2021 г.

Zolotukhin A. Y.¹ Approximate solution of the Signorini problem by the finite element method in three-dimensional space. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2021. V. 21. No 2. P. 203–214.

¹ Tula State University, Russia

ABSTRACT

The finite element method is usually used for two-dimensional space. The paper investigates the finite element method for solving the Signorini problem in three-dimensional space.

Key words: *the finite element method, Signorini problem.*

References

- [1] G. Diuvo, Zh.-L. Lions, *Neravenstva v mekhanike i fizike*, Nauka, M., 1980.
- [2] G. Fikera, *Teoremy sushchestvovaniia v teorii uprugosti*, Nauka, M., 1989.
- [3] R. Glowinski, Zh.-L. Lions, H. Tremol'er, *Chislennoe issledovanie variatsionnykh neravenstv*, Mir, M., 1979.
- [4] G. I. Marchuk, Iu. M. Agoshkov, *Vvedenie v proeksionno-setochnye metody*, Nauka, M., 1975.
- [5] M. Minu, *Matematicheskoe programmirovaniie*, Nauka, M., 1990.
- [6] S. G. Mikhlin, *Lineinye uravneniia v chastnykh proizvodnykh*, Vyssh. shkola, M., 1977.