Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 61–70

УДК 517.5
MSC2020 42A10, 41A17, 41A44

© М. Р. Лангаршоев[1]

О точных значениях поперечников некоторых классов функций из L_2

В работе получены точные неравенства типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве L_2. Вычислены точные значения различных n-поперечников классов функций из L_2, задаваемых модулями непрерывности r-й производной функции f.

Ключевые слова: *наилучшее приближение, тригонометрический полином, обобщенный модуль непрерывности высшего порядка, n-поперечники.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202006

Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — множество положительных чисел. Рассмотрим пространство $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ 2π-периодических суммируемых с квадратом в смысле Лебега действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r)} \big(r \in \mathbb{Z}_+; L_2^0 \equiv L_2 \big)$ обозначим множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \neq const$ принадлежат пространству L_2. Символом $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$:

$$\mathcal{T}_{n-1} := \left\{ T_{n-1}(x) : T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}.$$

[1] Подмосковный колледж энергия, 142450, Московская область, Богородский городской округ, г. Старая Купавна, Большая Московская улица, 190 Электронная почта: mukhtor77@mail.ru

Общеизвестно, что для произвольной функции $f(x)\in L_2$ имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)\overset{def}{=}\inf\{\|f-T_{n-1}\|:\,T_{n-1}(x)\in\mathcal{T}_{n-1}\}=\|f-S_{n-1}(f)\|=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2},\quad(1)$$

где

$$S_{n-1}(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2\overset{def}{=}a_k^2+b_k^2$.

Равенством

$$\omega_m(f,t)_2=\sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2:\,|h|\leqslant t\right\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+kh)$$

разность m-го порядка функции $f\in L_2$ с шагом h, определим модуль непрерывности порядка m, а равенством

$$\Omega_m(f,t)_2=\left\{\frac{1}{t^m}\int_0^t\cdots\int_0^t\|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2},$$

где $t>0$, $\overline{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m=\Delta_{h_1}^1\circ\cdots\circ\Delta_{h_m}^1$ будем определять так называемый обобщенный модуль непрерывности m-го порядка функции $f\in L_2$ (см., например [1, 2]).

При решении задачи вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)\leqslant\chi n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{t}{n}\right);\quad r\in\mathbb{Z}_+,\,t>0$$

вместо обычного модуля непрерывности $\omega_m(f,t)$ иногда удобнее использовать обобщенный модуль непрерывности $\Omega_m(f,t)$. Интересные результаты при этом были получены в работах [3–8].

В настоящей работе для любого $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $h>0$ рассмотрим следующую аппроксимационную характеристику:

$$\mathcal{X}_{m,n,r}(h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\not\equiv const}}\frac{E_{n-1}^2(f)}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},h\right)+\dfrac{n^2}{h}\displaystyle\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},u\right)du\right]^{m/2}}.\quad(2)$$

Отметим, что аппроксимационная характеристика (2), в отличие от других ранее рассмотренных экстремальных характеристик, содержит обобщенный модуль непрерывности не только под знаком интеграла, но также и вне интеграла.

Пусть S — единичный шар в L_2; $\mathscr{W}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}\colon L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^{\perp}: L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространства Λ_n.

Величины

$$b_n(\mathscr{W}, L_2) = \sup\left\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathscr{W}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$
$$d^n(\mathscr{W}, L_2) = \inf\left\{\sup\{\|f\|_2 :\ f \in \mathscr{W} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$
$$d_n(\mathscr{W}, L_2) = \inf\left\{\sup\{\inf\{\|f - \mathrm{g}\|_2 :\ \mathrm{g} \in \Lambda_n\} : f \in \mathscr{W}\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$
$$\delta_n(\mathscr{W}, L_2) = \inf\left\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{L}f\|_2 :\ f \in \mathscr{W}\} :\ \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$
$$\pi_n(\mathscr{W}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}^{\perp}f\|_2 :\ f \in \mathscr{W}\right\} : \mathcal{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками.

Указанные n-поперечники связаны соотношениями (см. например, [10, 11]):

$$b_n(\mathscr{W}, L_2) \leqslant d^n(\mathscr{W}, L_2) \leqslant d_n(\mathscr{W}, L_2) = \delta_n(\mathscr{W}, L_2) = \pi_n(\mathscr{W}, L_2). \tag{3}$$

Полагаем также

$$E_{n-1}(\mathscr{W}) :\ = \sup\left\{E_{n-1}(f) :\ f \in \mathscr{W}\right\}.$$

Пусть $\Psi(t)$, $(0 \leqslant t < \infty)$ — непрерывная неубывающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Будем называть ее мажорантой. Символами $W_m^{(r)}(h)$ и $W_m^{(r)}(\Psi)$, $m \in \mathbb{N}$ $r \in \mathbb{Z}_+$ соответственно обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{h^2}\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, h\right) + \frac{n^2}{h^3}\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, u\right)du \leqslant 1,$$

$$\left(h\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, h\right) + \frac{\pi^3}{nh^3}\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, u\right)du\right)^{m/2} \leqslant \Psi(h).$$

Введем следующее обозначение:

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* :\ = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin t}{t}, & \text{если } 0 < t \leqslant t_*, \\ 1 - \dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } t_* \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{4}$$

где в (4) t_* — величина аргумента, при котором функция $\dfrac{\sin t}{t}$ на $\mathbb{R}_+$ принимает свое наименьшее значение. При этом t_* — минимальный положительный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t\,(4{,}49 < t_* < 4{,}51)$ (см. [7]).

1. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n > r$. Тогда для любого h удовлетворяющего условию $0 < h \leqslant \pi/n$ выполняется равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \not\equiv const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, h\right) + \dfrac{n^2}{h}\displaystyle\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, u\right) du\right]^{m/2}} = \left(\frac{hn^{1+r/m}}{\sqrt{3}}\right)^{-m}. \quad (5)$$

Доказательство. Известно, что если функция $f \in L_2^{(r)}$ и

$$f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

— ряд Фурье функции $f(x)$, то (см. [3])

$$\Omega_m^2\left(f^{(r)}, t\right) \geqslant 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2\left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^m. \quad (6)$$

Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ и любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (см. [6])

$$E_{n-1}^2(f) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{\sin kt}{kt} + \left(E_{n-1}^2(f)\right)^{1-1/m} \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right). \quad (7)$$

Умножая обе части неравенства (7) на t, а затем интегрируем её по t в пределах от 0 до u. В итоге получим

$$\frac{u^2}{2}E_{n-1}^2(f) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{1-\cos ku}{k^2} + E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \int_0^u t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) dt. \quad (8)$$

Теперь интегрируем неравенство (8) по переменной u в пределах от 0 до h, а потом разделяем обе части на h

$$\frac{h^2}{6}E_{n-1}^2(f) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{kh - \sin kh}{k^3 h} + E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}h} \int_0^h \int_0^u t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) dt du. \quad (9)$$

Используя неравенство Гёльдера, преобразуем первое слагаемое в правой части неравенства (9) и применяя формулы (6), получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{kh - \sin kh}{k^3 h} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\rho_k^{2-2/m}\rho_k^{2/m}\left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right)^{1-1/m} \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}\rho_k^2\left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^m\right)^{1/m} \leqslant E_{n-1}^{2-2/m}(f)\frac{1}{2n^{2+2r/m}}\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, h\right).$$

Во втором слагаемом в неравенстве (9) преобразуем двойной интеграл, применяя при этом метод интегрирования по частям

$$\int_0^h \int_0^u t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},t\right)dtdu = \int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},u\right)du.$$

Следовательно, неравенство (9) принимает вид

$$\frac{h^2}{3}E_{n-1}^{2/m}(f) \leqslant \frac{1}{n^{2+2r/m}}\left(\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},h\right)+\frac{n^2}{h}\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},u\right)du\right). \quad (10)$$

Из (10) следует неравенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},h\right)+\frac{n^2}{h}\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},u\right)du\right]^{m/2}} \leqslant \left(\frac{hn^{1+r/m}}{\sqrt{3}}\right)^{-m}. \quad (11)$$

Таким образом, оценка сверху в соотношении (5) получена. Чтобы получить оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (11), вводим в рассмотрение функцию $f_0(x)=\cos nx$. Для этой функции $E_{n-1}(f_0)=1$, и согласно формуле (6) из работы [3]

$$\Omega_m^2\left(f_0^{(r)};h\right) = 2^m n^{2r}\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^m, \quad 0<h\leqslant \pi/n.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},h\right)+\frac{n^2}{h}\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},u\right)du\right]^{m/2}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left[\Omega_m^{2/m}\left(f_0^{(r)},h\right)+\frac{n^2}{h}\int_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f_0^{(r)},u\right)du\right]^{m/2}} = \left(\frac{hn^{1+r/m}}{\sqrt{3}}\right)^{-m}. \quad (12)$$

Сопоставляя неравенства (11) и (12), получаем утверждение теоремы 1. □

Следует отметить, что экстремальная характеристика типа (2) для обычного модуля непрерывности $\omega_m\left(f^{(r)},u\right)$ была рассмотрена в работе [9].

Следствие 1. *Для любых чисел h, удовлетворяющих условию $0<h\leqslant\pi/n$, выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2^m n^{2r}} \leqslant \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\Omega_m^2\left(f^{(r)},h\right)} \leqslant \frac{1}{n^{2r}}\left\{\frac{3}{(nh)^2}+\frac{1}{2}\right\}^m. \quad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (10) получаем

$$\frac{h^{2m}}{3^m}E_{n-1}^2(f)\leqslant\frac{1}{n^{2(m+r)}}\Omega_m^2\left(f^{(r)},h\right)\left\{1+\frac{n^2h^2}{6}\right\}^m,$$

или

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{E_{n-1}^2(f)}{\Omega_m^2\left(f^{(r)},h\right)}\leqslant\frac{1}{n^{2r}}\left\{\frac{3}{(nh)^2}+\frac{1}{2}\right\}^m. \tag{14}$$

Оценка сверху получена. Для получения оценки снизу, как уже выше отметили, при $0<h\leqslant\pi/n$ рассмотрим функцию $f_0(x)=\cos nx$. Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{E_{n-1}^2(f_0)}{\Omega_m^2\left(f_0^{(r)},h\right)}\geqslant\frac{1}{2^m n^{2r}}. \tag{15}$$

Из неравенства (14) и (15) следует двойное неравенство (13). □

При $h=\pi/n$ из неравенства (13) вытекает следующая оценка

$$\frac{1}{2^{m/2}}\leqslant\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)}\leqslant\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{6+\pi^2}{\pi^2}\right\}^{m/2}.$$

Теорема 2. *При любых $m,n,r\in\mathbb{N}, r\geqslant m$ справедливы равенства*

$$p_{2n}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)=p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)=E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}=\frac{3^{m/2}}{n^{m+r}},$$

где $p_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, или $\pi_n(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение класса $W_m^{(r)}(h)$, с учетом соотношений (3), из неравенства (11) получаем оценку сверху

$$\begin{gathered}p_{2n}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)\leqslant p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)\leqslant\\ \leqslant d_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)\leqslant E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}\leqslant\frac{3^{m/2}}{n^{m+r}}.\end{gathered} \tag{16}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского поперечника $b_{2n}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)$ рассмотрим $(2n+1)$-мерный шар полиномов $S_{2n+1}\in L_2$

$$S_{2n+1}=\left\{T_n(x)\in\mathcal{T}_n:\ \|T_n\|\leqslant\frac{3^{m/2}}{n^{m+r}}\right\}$$

и покажем, что $S_{2n+1}\subset W_m^{(r)}(h)$. Для этого требуется доказать, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n\in S_{2n+1}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h^2}\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},h\right)+\frac{n^2}{h^3}\int\limits_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},u\right)du\leqslant 1.$$

Воспользуемся неравенством [3]

$$\Omega_m^{2/m}(T_n^{(r)};u) \leqslant 2n^{2r/m}\left(1-\frac{\sin nu}{nu}\right)_* \|T_n\|^{2/m}, \tag{17}$$

справедливым для любого $T_n(x)\in\mathcal{T}_{n-1}$. Тогда

$$\frac{1}{h^2}\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},h\right)+\frac{n^2}{h^3}\int\limits_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},u\right)du \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{2n^{2r/m}}{h^2}\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)+\frac{2n^{2+2r/m}}{h^3}\left(\frac{h^3}{6}-\frac{h}{n^2}+\frac{1}{n^3}\sin nh\right)\right\}\|T_n\|^{2/m}\leqslant 1,$$

а потому $S_{2n+1}\subset W_m^{(r)}(h)$. По теореме В. М. Тихомирова [10] о поперечнике шара

$$\begin{gathered} p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)\geqslant p_{2n}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)\geqslant \\ \geqslant b_{2n}\left(W_m^{(r)}(h);L_2\right)\geqslant b_{2n}\left(S_{2n+1};L_2\right)=\frac{3^{m/2}}{n^{m+r}}. \end{gathered} \tag{18}$$

Учитывая соотношения (3) и сопоставляя неравенства (16) и (18), завершаем доказательство теоремы 2. □

Теорема 3. *Если мажоранта $\Psi(h)$ при любом $0<h\leqslant\pi/n$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Psi(h)}{\Psi(\pi/n)}\geqslant\left(1+\frac{6nh}{\pi^3}\right)^{m/2}\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)_*^{m/2}, \tag{19}$$

то для любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ выполняются равенства

$$\begin{gathered} \gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Psi);L_2\right)=\gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Psi);L_2\right)= \\ =E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(\Psi)\right)_{L_2}=\frac{3^{m/2}}{n^{r-m/2}\pi^{3m/2}}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{gathered} \tag{20}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Доказательство. Будем использовать неравенство (10). Запишем его в виде

$$E_{n-1}(f)\leqslant\frac{3^{m/2}}{n^{m+r}}\cdot\frac{1}{h^{3m/2}}\left(h\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},h\right)+\frac{\pi^3}{nh^3}\int\limits_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},u\right)du\right)^{m/2}.$$

Полагая в этом неравенстве $h=\pi/n$, находим

$$E_{n-1}(f)\leqslant\frac{3^{m/2}}{n^{r-m/2}\pi^{3m/2}}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{21}$$

Из неравенства (21) с учётом соотношения (3) между перечисленными выше n-поперечниками получим оценку сверху

$$\begin{gathered} \gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Psi;L_2\right)\leqslant\gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Psi);L_2\right)\leqslant d_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Psi);L_2\right)\leqslant \\ \leqslant E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(\Psi)\right)_{L_2}\leqslant\frac{3^{m/2}}{n^{r-m/2}\pi^{3m/2}}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Для получения соответствующей оценки снизу для бернштейновского n- поперечника введем в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{2n+1}=\left\{T_n(x)\in\mathcal{T}_n:\quad \|T_n\|\leqslant\frac{3^{m/2}}{n^{r-m/2}\pi^{3m/2}}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

во множестве $\mathcal{T}_n\cap L_2$ и покажем, что этот шар принадлежит классу $W_m^{(r)}(\Psi)$. Для этого нам нужно доказать, что для любого полинома $T_n(x)\in S_{2n+1}$ выполняется неравенство

$$\left(h\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},h\right)+\frac{\pi^3}{nh^3}\int\limits_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},u\right)du\right)^{m/2}\leqslant\Psi(h).$$

Согласно неравенству (17) и ограничению (19) на $\Psi(h)$ получаем

$$\begin{gathered}\left(h\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},h\right)+\frac{\pi^3}{nh^3}\int\limits_0^h u(h-u)\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},u\right)du\right)^{m/2}\leqslant\\ \leqslant\left(2n^{2r/m}h\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)_*\|T_n\|^{2/m}+\right.\\ \left.+\frac{\pi^3}{nh^3}\cdot 2n^{2r/m}\int\limits_0^h u(h-u)\left(1-\frac{\sin nu}{nu}\right)_*\|T_n\|^{2/m}du\right)^{m/2}\leqslant\\ \leqslant 2^{m/2}n^r\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)_*^{m/2}\|T_n\|\left(h+\frac{\pi^3}{nh^3}\int\limits_0^h u(h-u)du\right)^{m/2}\leqslant\\ \leqslant\left(1+\frac{6nh}{\pi^3}\right)^{m/2}\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)_*^{m/2}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right)\leqslant\Psi(h).\end{gathered}\tag{23}$$

Из неравенства (23) следует включение $S_{2n+1}\in W_m^{(r)}(\Psi)$. Используя соотношение (3) между n-поперечниками и определение бернштейновского n-поперечника, запишем соответствующую оценку снизу

$$\begin{gathered}\gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Psi);L_2\right)\geqslant\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Psi);L_2\right)\geqslant\\ \geqslant b_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Psi);L_2\right)\geqslant b_{2n}\left(S_{2n+1};L_2\right)\geqslant\frac{3^{m/2}}{n^{r-m/2}\pi^{3m/2}}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{gathered}\tag{24}$$

Равенства (20) вытекают из сопоставления неравенств (22) и (24). □

Автор искренне признателен рецензенту за сделанные им ценные замечания в процессе подготовки статьи к печати.

Список литературы

[1] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, “Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$”, *Матем. сборник*, **98**:140 (1975), 395–415.

[2] К. В. Руновский, “Прямая теорема о приближении “углом” в пространстве L_p, $0 < p < 1$”, *Матем. заметки*, **52**:5 (1992), 93–96.

[3] С. Б. Вакарчук, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 792–796.

[4] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенство типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336.

[5] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2”, *Сиб. матем. журнал*, **52**:6 (2011), 1414–1427.

[6] М. Ш. Шабозов, С. С. Хоразмшоев, “Наилучшие полиномиальные приближения дифференцируемых периодических функций и значения поперечников классов функций, задаваемых обобщенными модулями непрерывности в L_2”, *Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н.*, **1**:142 (2011), 7–19.

[7] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Неравенство типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2”, *Матем. заметки*, **92**:4 (2012), 497–514.

[8] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Неравенство между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций”, *Матем. заметки*, **99**:2 (2016), 215–238.

[9] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. журнал.*, **56**:11 (2004), 1458–1466.

[10] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.

[11] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, Berlin, 1985.

Поступила в редакцию
12 мая 2020 г.

Langarshoev M. R. On the value of the widths of some classes of functions from L_2. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 61–70.

[1] College near Moscow "Energia", Russia

ABSTRACT

In this paper we find sharp inequalities of Jackson-Stechkin type between the best approximations of periodic differentiable functions by trigonometric polynomials and generalized moduli of continuity of m-th order in the space L_2. The exact values of various n-widths of classes of functions from L_2 defined by the generalized modus of continuity of the r-th derivative of the function f are calculated.

Key words: *best approximation, trigonometric polynomials, generalized modulus of continuity of higher order, n-widths.*

References

[1] E. A. Storozhenko, V. G. Krotov, P. Osval'd, "Priamye i obratnye teoremy tipa Dzheksona v prostranstvakh $L_p, 0 < p < 1$", *Matem. sbornik*, **98**:140 (1975), 395–415.

[2] K. V. Runovskii, "Priamaia teorema o priblizhenii "uglom" v prostranstve L_p, $0 < p < 1$", *Matem. zametki*, **52**:5 (1992), 93–96.

[3] S. B. Vakarchuk, "Tochnye konstanty v neravenstvakh tipa Dzheksona i tochnye znacheniia poperechnikov funktsional'nykh klassov iz L_2", *Matem. zametki*, **78**:5 (2005), 792–796.

[4] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaia, "Tochnoe neravenstvo tipa Dzheksona – Stechkina v L_2 i poperechniki funktsional'nykh klassov", *Matem. zametki*, **86**:3 (2009), 328–336.

[5] M. Sh. Shabozov, G. A. Iusupov, "Tochnye konstanty v neravenstvakh tipa Dzheksona i tochnye znacheniia poperechnikov nekotorykh klassov funktsii v L_2", *Sib. matem. zhurnal*, **52**:6 (2011), 1414–1427.

[6] M. Sh. Shabozov, S. S. Khorazmshoev, "Nailuchshie polinomial'nye priblizheniia differentsiruemykh periodicheskikh funktsii i znacheniia poperechnikov klassov funktsii, zadavaemykh obobshchennymi moduliami nepreryvnosti v L_2", *Izv. AN RT. Otd. fiz.-mat., khim., geol. i tekhn. n.*, **1**:142 (2011), 7–19.

[7] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaia, "Neravenstvo tipa Dzheksona-Stechkina dlia spetsial'nykh modulei nepreryvnosti i poperechniki funktsional'nykh klassov v prostranstve L_2", *Matem. zametki*, **92**:4 (2012), 497–514.

[8] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaia, "Neravenstvo mezhdu nailuchshimi polinomial'nymi priblizheniiami i nekotorymi kharakteristikami gladkosti v prostranstve L_2 i poperechniki klassov funktsii", *Matem. zametki*, **99**:2 (2016), 215–238.

[9] S. B. Vakarchuk, A. N. Shchitov, "Nailuchshie polinomial'nye priblizheniia v L_2 i poperechniki nekotorykh klassov funktsii", *Ukr. matem. zhurnal.*, **56**:11 (2004), 1458–1466.

[10] V. M. Tikhomirov, *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii*, MGU, M., 1976.

[11] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, Berlin, 1985.