

УДК 517.95

MSC2010 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев^{1,2}, П. Р. Месенев^{1,2}

Алгоритм решения краевой задачи радиационного теплообмена без условий для интенсивности излучения

Представлен оптимизационный алгоритм решения краевой задачи для стационарных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена в трехмерной области в рамках P_1 -приближения уравнения переноса излучения. Выполнен анализ задачи оптимального управления, аппроксимирующей краевую задачу, в которой не задаются граничные условия для интенсивности излучения. Теоретический анализ проиллюстрирован численными примерами.

Ключевые слова: *уравнения радиационного теплообмена, диффузионное приближение, задача оптимального управления, условия типа Коши, численное моделирование.*

Задача оптимального управления

Рассмотрим систему полулинейных эллиптических уравнений, моделирующую радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ [1–3]:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Положительные физические параметры a , b , κ_a и α , описывающие свойства среды, описаны в [3]. Функция θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям.

Сформулируем задачу граничного оптимального управления, которая является аппроксимацией краевой задачи для уравнений (1), где не заданы краевые условия для интенсивности излучения φ , а ставятся условия для температуры и тепловых потоков на границе. С этой целью дополним уравнения (1) краевыми условиями на границе $\Gamma = \partial\Omega$,

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \text{ на } \Gamma, \quad (2)$$

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

² Дальневосточный региональный научно-образовательный центр математических исследований, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru (А. Ю. Чеботарев).

где функция $r(x)$, $x \in \Gamma$ задана, а неизвестная функция $u(x)$, $x \in \Gamma$ является управлением; ∂_n — производная в направлении внешней нормали \mathbf{n} .

Требуется найти тройку функций $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$, минимизирующую функционал

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \quad (3)$$

на решениях краевой задачи (1), (2). Функция $\theta_b(x)$, $x \in \Gamma$ и параметр регуляризации $\lambda > 0$ заданы.

Цель работы состоит в доказательстве того, что при подходящем выборе граничной функции r задача (1)–(3) аппроксимирует при $\lambda \rightarrow +0$ краевую задачу для системы (1) с граничными условиями только для температурного поля

$$\theta|_{\Gamma} = \theta_b, \quad \partial_n \theta|_{\Gamma} = q_b. \quad (4)$$

Для этого достаточно положить $r := a(\theta_b + q_b)$.

Отметим работы [1–21], в которых представлен анализ краевых, экстремальных и обратных задач для диффузионных уравнений радиационного теплообмена. Краевые задачи, учитывающие радиационный теплообмен, рассмотрены в [22–27]. Отметим также, что разрешимость краевых задач для уравнений сложного теплообмена с условиями (4) для температуры доказана в [20, 21].

В данной заметке анонсируются результаты теоретического анализа задачи оптимального управления (1)–(3). Получены априорные оценки решения задачи (1), (2), доказана разрешимость задачи оптимального управления и выведена система оптимальности. Полученные оценки позволили доказать, что последовательность $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ решений задачи (1)–(3) при $\lambda \rightarrow +0$ сходится к решению краевой задачи (1), (4) с условиями типа Коши для температуры. Численные примеры демонстрируют эффективность предложенного алгоритма решения задачи управления.

1. Разрешимость экстремальной задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная, строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков. Через H^s обозначаем пространство Соболева W_2^s . Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, V' — пространство, сопряженное с пространством V , при этом $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначаем через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (f, v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$. Через U обозначаем пространство $L^2(\Gamma)$ с нормой

$$\|u\|_{\Gamma} = \left(\int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \right)^{1/2}.$$

Далее считаем, что справедливы следующие условия:

- (i) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \text{Const} > 0$,
- (ii) $\theta_b, q_b \in U$, $r = a(\theta_b + q_b)$.

Рассмотрим операторы $A: V \rightarrow V'$, $B: U \rightarrow V'$ такие, что для любых $y, z \in V$, $w \in U$:

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma} yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_{\Gamma} wz d\Gamma.$$

Поскольку форма (Ay, z) определяет скалярное произведение в пространстве V и норма $\|z\|_V = \sqrt{(Az, z)}$ эквивалентна стандартной норме пространства V , то обратный оператор $A^{-1}: V' \mapsto V$ непрерывен. Кроме того, для любых $v \in V$, $w \in U$, $g \in V'$ справедливы неравенства

$$\|v\|^2 \leq C_0 \|v\|_V^2, \quad \|v\|_{V'} \leq C_0 \|v\|_V, \quad \|Bw\|_{V'} \leq \|w\|_\Gamma, \quad \|A^{-1}g\|_V \leq \|g\|_{V'},$$

где $C_0 > 0$ зависит только от области Ω .

Будем использовать обозначение $[h]^s := |h|^s \operatorname{sign} h$, $s > 0$, $h \in \mathbb{R}$ для монотонной степенной функции.

Для формализации задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u): V \times V \times U \rightarrow V' \times V'$,

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Отметим, что равенство $F(\theta, \varphi, u) = 0$ означает, что пара $\theta, \varphi \in V$ является слабым решением задачи (1), (2).

Задача (C). Найти тройку $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2} \|\theta - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_\Gamma^2 \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0.$$

Для доказательства разрешимости задачи управления предварительно устанавливается однозначная разрешимость краевой задачи (1), (2) и выводятся необходимые априорные оценки.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i), (ii), $u \in U$. Тогда существует единственное слабое решение задачи (1), (2), и при этом

$$\begin{aligned} a\|\theta\|_V &\leq \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha} \|r + bu\|_\Gamma, \\ \alpha b\|\varphi\|_V &\leq \|r\|_\Gamma + \left(\frac{C_0\kappa_a}{\alpha} + 1\right) \|r + bu\|_\Gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство теоремы основано на том, что слабое решение задачи (1), (2) удовлетворяет равенствам

$$aA\theta + \frac{\kappa_a}{\alpha}\theta + b\kappa_a[\theta]^4 = g, \quad \varphi = \frac{1}{\alpha b}(A^{-1}B(r + bu) - a\theta). \quad (6)$$

Здесь

$$g = Br + \frac{\kappa_a}{\alpha}A^{-1}B(r + bu) \in V'.$$

Однозначная разрешимость уравнения (6) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см. например [28]).

Оценки (5) решения управляемой системы позволяют доказать разрешимость задачи оптимального управления.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда существует решение задачи (C).

2. Система оптимальности

В соответствии с принципом Лагранжа [29] для проверки невырожденности условий оптимальности первого порядка достаточно проверить, что образ производной оператора ограничений $F(y, u)$, где $y = \{\theta, \varphi\} \in V \times V$, совпадает с пространством $V' \times V'$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i), (ii). Для любой пары $\hat{y} \in V \times V$, $\hat{u} \in U$ справедливо равенство

$$\text{Im}F'_y(y, u) = V' \times V'.$$

Лагранжиан задачи (C) имеет вид

$$L(\theta, \varphi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + (aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, p_1) + (\alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu, p_2).$$

Здесь $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$ — сопряженное состояние. Принцип Лагранжа [29, Теорема 1.5] дает следующую систему оптимальности.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (i), (ii). Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ — решение задачи (C), то существует единственная пара $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что

$$\begin{aligned} aA\hat{\theta} + b\kappa_a([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi}) &= Br, & \alpha A\hat{\varphi} + \kappa_a(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) &= B\hat{u}, \\ aAp_1 + 4|\hat{\theta}|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) &= B(\theta_b - \hat{\theta}), & \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) &= 0 \end{aligned}$$

и при этом $\lambda\hat{u} = p_2$.

3. Сходимость при $\lambda \rightarrow +0$

Покажем, что решения задачи (C) при $\lambda \rightarrow +0$ аппроксимируют решение задачи (1), (4). Существование $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющих (1), (4) для достаточно гладких θ_b, φ_b , и достаточные условия единственности решения установлены в [21].

Теорема 5. Пусть выполняются условия (i), (ii) и существует решение задачи (1), (4). Если $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ — решение задачи (C) для $\lambda > 0$, то существует последовательность $\lambda \rightarrow +0$ такая, что

$$\theta_\lambda \rightarrow \theta_*, \quad \varphi_\lambda \rightarrow \varphi_* \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H,$$

где θ_*, φ_* — решение задачи (1), (4).

Доказательство теоремы основано на оценке

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \leq J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2,$$

где $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$ — решение задачи (1), (4), $u = \alpha(\partial_n \varphi + \varphi) \in U$.

4. Численные примеры

В соответствии с теоремой 4 градиент функционала качества равен $J'_\lambda(u) = \lambda u - p_2$, где $u \in U$ — управление в граничном условии (2), p_2 — компонента сопряженного состояния из системы оптимальности. Для численного решения задачи оптимального управления будем использовать следующий алгоритм.

Алгоритм градиентного спуска:

1. Выбираем значение градиентного шага ε , количество итераций N , начальное приближение для управления $u_0 \in U$.

2. **for** $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots, N$ **do**: Для данного u_k рассчитываем состояние $\{\theta_k, \varphi_k\}$ из (1), (2). Рассчитываем значение функционала качества $J_\lambda(\theta_k, u_k)$ из (3). Рассчитываем сопряженное состояние $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ из системы оптимальности, где $\hat{\theta} := \theta_k, \hat{u} = u_k$. Пересчитываем управление $u_{k+1} = u_k - \varepsilon(\lambda u_k - p_2)$.

Значение параметра ε выбирается таким образом, чтобы значение $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$ являлось существенной поправкой для u_{k+1} . Количество итераций N выбирается достаточным для выполнения условия $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$, где $\delta > 0$ задает точность расчетов. Для численного решения прямой задачи с заданным управлением и сопряженной системы использовался солвер FEniCS [30, 31].

Приведем примеры расчетов для куба $\Omega = (x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq l$. Пусть $l = 1$ см, $a = 0.006$ [см²/с], $b = 0.025$ [см/с], $\beta = 0.00005$ [см/с], $\kappa = 1$ [см⁻¹], $\kappa_s = 0$, $A = 0$, $\gamma = 0.3$. Указанные параметры соответствуют стеклу [11]. Параметр регуляризации $\lambda = 10^{-12}$.

Пример 1. Положим в условии (2) $r = 0.8 \cos(x) + 0.1, u = \hat{u} = y$. Далее рассчитываем состояние θ и φ как решение задачи (1)–(2) и в качестве θ_b выбираем граничные значения функции θ на Γ . Применяя предложенный алгоритм с начальным приближением $u_0 = 0.1$, находим приближенное решение задачи (C). Квадрат разницы тестового и найденного решения, а также динамика функционала качества представлены на рисунке 1.

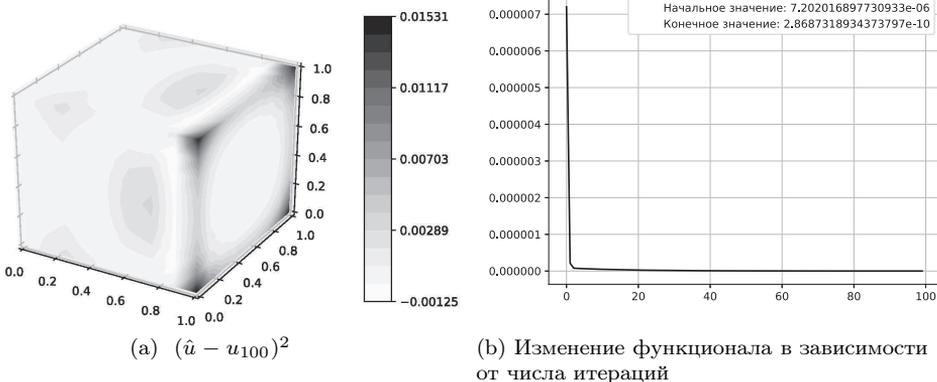


Рис. 1

Пример 2. Зададим функции θ_b, q_b в краевом условии (4) следующим образом:

$$\theta_b = 0.1z + 0.3, \quad q_b = \begin{cases} 0.11, & \text{если } z = 1, \\ 0, & \text{если } 0 < z < 1, \\ -0.15, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

В данном примере оптимальное управление u в качестве тестового не задается. На рисунке 2 представлен результат работы алгоритма.

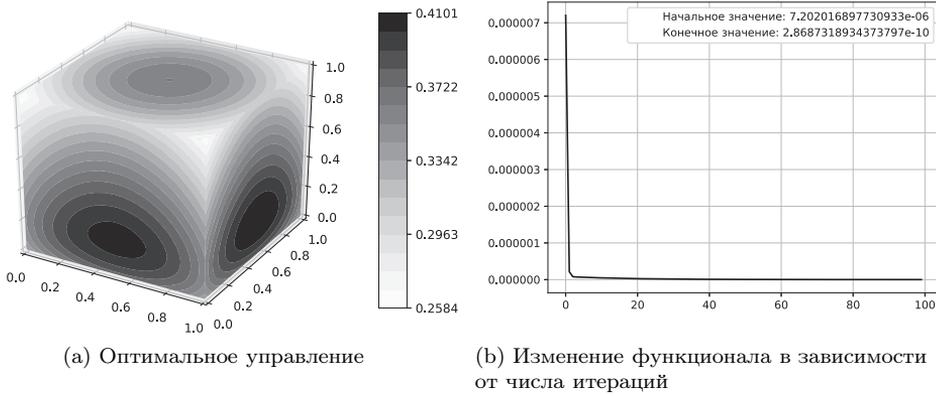


Рис. 2

Компоненты состояния, соответствующие найденному управлению, представлены на рисунке 3.

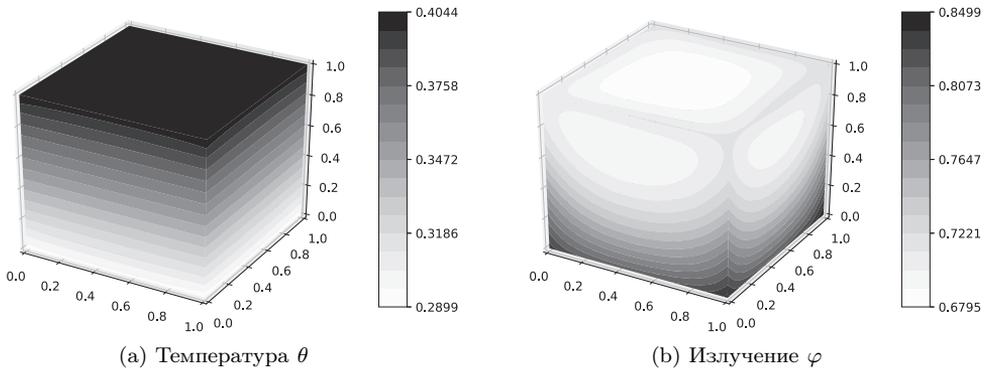


Рис. 3

Список литературы

- [1] R. Pinnau, “Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP₁-System”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.
- [2] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, “An iterative method for solving a complex heat transfer problem”, *Appl. Math. Comput.*, **219**, (2013), 9356–9362.
- [3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2, (2014), 808–815.
- [4] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:4, (2014), 711–719; *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:4, (2014), 719–726.
- [5] Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю., “Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:12, (2014), 1590–1597.
- [6] Kovtanyuk Andrey E., Chebotarev Alexander Yu., Botkin Nikolai D., and Hoffmann Karl-Heinz, “Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **412**, (2014), 520–528.
- [7] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:11, (2014), 1806–1816.
- [8] Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., and Hoffman Karl-Heinz, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20**, (2015), 776–784.
- [9] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена”, *Сибирские электронные математические известия*, **12**:11, (2015), 562–576.
- [10] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:2, (2016), 275–282.
- [11] Chebotarev A., Kovtanyuk A., Grenkin G., Botkin N., and Hoffman K.-H. “Boundary optimal control problem of complex heat transfer model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2, (2016), 1243–1260.
- [12] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects”, *J. Math. Anal. Appl.*, **439**, (2016), 678–689.
- [13] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, “Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model”, *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10, (2016), 371–380.
- [14] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, “Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:5, (2016), 816–823.
- [15] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, “Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer”, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6, (2017), 2511–2519.
- [16] Alexander Yu. Chebotarev and Gleb V. Grenkin and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin and Karl-Heinz Hoffmann, “Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **57**, (2018), 290–298.
- [17] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange”, *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2, (2018), 737–744.
- [18] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, “An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1, (2019), 737–744.

- [19] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Обратная задача для уравнений сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:8, (2019), 1420–1430.
- [20] Alexander Yu. Chebotarev and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin, “Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **75**, (2019), 262–269.
- [21] А. Г. Колобов, Т. В. Пак, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:7, (2019), 1258–1263.
- [22] А. А. Амосов, “Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением”, *Дифференц. уравнения*, **41**:1, (2005), 93–104; *Differ. Equ.*, **41**:1, (2005), 96–109 [doi https://doi.org/10.1007/s10625-005-0139-9](https://doi.org/10.1007/s10625-005-0139-9).
- [23] А. А. Амосов, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **164**, (2010), 309–344.
- [24] А. А. Амосов, “Unique solvability of a nonstationary problem of radiative–conductive heat exchange in a system of semitransparent bodies”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **23**:3, (2016), 309–334.
- [25] А. А. Амосов, “Unique Solvability of Stationary Radiative–Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies”, *Journal of Mathematical Sciences*, **224**:5, (201.), 618–646.
- [26] А. А. Амосов, “Asymptotic Behavior of a Solution to the Radiative Transfer Equation in a Multilayered Medium with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:4, (2020), 541–575.
- [27] А. А. Амосов, N. E. Krymov, “On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:3, (2020), 357–377.
- [28] S. Fučik, A. Kufner, *Nonlinear differential equations*, Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York, 1980.
- [29] Fursikov A. V., *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications*, =American Mathematical Soc., 1999.
- [30] Martin S. Alnæs and Jan Blechta and Johan Hake and August Johansson and Benjamin Kehlet and Anders Logg and Chris Richardson and Johannes Ring and Marie E. Rognes and Garth N. Wells, “The FEniCS Project Version 1.5”, *Archive of Numerical Software*, **3**:100, (2015), 9–23.
- [31] Anders Logg and Garth N. Wells and Johan Hake, “DOLFIN: a C++/Python Finite Element Library”, *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, Volume 84 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, v. 10, eds. Anders Logg and Kent-Andre Mardal and Garth N. Wells, Springer, 2012, 173–225.

Chebotarev A. Yu., Mesenev P. R. An algorithm for solving the boundary value problem of radiation heat transfer without boundary conditions for radiation intensity. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2020. V. 20. No 1. P. 114–122.

ABSTRACT

An optimization algorithm for solving the boundary value problem for the stationary equations of radiation-conductive heat transfer in the three-dimensional region is presented in the framework of the P_1 - approximation of the radiation transfer equation. The analysis of the optimal control problem that approximates the boundary value problem where they are not defined boundary conditions for radiation intensity. Theoretical analysis is illustrated by numerical examples.

Key words: *equations of radiative heat transfer, diffusion approximation, optimal control problem, Cauchy type conditions, numerical simulation.*