

УДК 517.95

MSC2010 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев<sup>1,2</sup>; Г. В. Гренкин<sup>1,2</sup>

## Вычисление интенсивности источников в модели радиационного теплообмена по интегральному переопределению

Рассмотрена квазистационарная задача радиационно-диффузионного теплообмена в трехмерной области. Требуется найти интенсивность тепловых источников и соответствующие поля температуры и излучения по дополнительному интегральному условию. Найдены достаточные условия нелокальной однозначной разрешимости обратной задачи. Теоретический анализ проиллюстрирован численными примерами.

Ключевые слова: *квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, обратная задача, нелокальная однозначная разрешимость, численное моделирование.*

### 1. Постановка обратной задачи

Сформулируем постановку обратной задачи для квазистационарных уравнений сложного теплообмена в ограниченной трехмерной области  $\Omega$  с отражающей границей  $\Gamma = \partial\Omega$  [1]. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = q(t)f(x), \quad (1)$$

$$- \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0 \text{ в } \Omega, \quad 0 < t < T,$$

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (2)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3)$$

Здесь  $\theta$  — температура,  $\varphi$  — интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры  $a$ ,  $b$ ,  $\kappa_a$  и  $\alpha$ , описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [2]. Через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\Gamma$ . Неотрицательные функции  $\theta_b$ ,  $\beta$  и  $\gamma$

<sup>1</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

<sup>2</sup> Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.  
Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru (А. Ю. Чеботарев).

являются заданными. Функция  $f$  описывает распределение тепловых источников, а неизвестная функция времени  $q(t), t \in (0, T)$ , — их интенсивность.

Обратная задача состоит в нахождении интенсивности источников  $q(t), t \in (0, T)$ , функций  $\theta, \varphi$ , удовлетворяющих (1)–(3) и условию переопределения

$$\int_{\Omega} g(x)\theta(x, t)dx = r(t), \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

где  $g = g(x), x \in \Omega, r = r(t), t \in (0, T)$  — заданные функции.

Теоретический и численный анализ задач для уравнений радиационного теплообмена в рамках  $P_1$ -приближения для уравнения переноса излучения представлен в [3–24]. В статье [25] изучена обратная задача (1)–(4) для случая  $f = g$ . В настоящей заметке анонсируются результаты, определяющие корректность сформулированной обратной задачи, и приводится алгоритм численного решения, проиллюстрированный численными примерами.

## 2. Задача Коши для уравнения с операторными коэффициентами

Предполагаем, что  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — липшицева ограниченная область,  $\Gamma = \partial\Omega$ ;  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ .  $L^p, 1 \leq p \leq \infty$  — пространство Лебега;  $H^m = W_2^m$  — пространство Соболева;  $L^p(0, T; X)$  — пространство Лебега функций класса  $L^p$ , определенных на  $(0, T)$ , со значениями в банаховом пространстве  $X$ . Пусть  $H = L^2(\Omega), V = H^1(\Omega), V'$  — пространство, сопряженное с пространством  $V, V \subset H = H' \subset V'; \|\cdot\|$  — стандартная норма в  $H; (h, v)$  — значение функционала  $h \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $h \in H$ .

Пусть исходные данные удовлетворяют условиям:

(i)  $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma), \beta \geq \beta_0 > 0, \gamma \geq \gamma_0 > 0, \beta_0, \gamma_0 = \text{Const}, 0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$ ;

(ii)  $\theta_0 \in H, f \in H, g \in V, \|f\| = \|g\| = 1, (f, g)^2 = 1 - \mu^2, 0 \leq \mu < 1$ ;

(iii)  $r \in H^1(0, T), r(0) = (g, \theta_0)$ .

Определим операторы и функционалы  $A_{1,2}: V \rightarrow V', g_{1,2} \in L^\infty(0, T; V')$ , используя следующие равенства, справедливые для любых  $\theta, \varphi, v \in V$ :

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v d\Gamma,$$

$$(g_1, v) = \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (g_2, v) = \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^{\pm} v d\Gamma.$$

Определены непрерывные обратные операторы  $A_1^{-1}, A_2^{-1}: V' \mapsto V$  и оператор  $B: V' \mapsto V', B = A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}$ .

Будем использовать обозначение  $[s]^p := |s|^p \text{signs}, p > 0, s \in \mathbb{R}$  для монотонной степенной функции.

**Определение.** Тройка  $\{q, \theta, \varphi\} \in L^{5/4}(0, T) \times L^2(0, T; V) \times L^{5/4}(0, T; V)$  называется решением задачи (1)–(4), если  $\theta' \in L^{5/4}(0, T; V')$  и почти всюду на  $(0, T)$  справедливы равенства

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = g_1 + q(t)f, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = g_2, \quad (g, \theta(t)) = r(t), \quad (5)$$

а также выполняется начальное условие  $\theta|_{t=0} = \theta_0$ . Здесь и далее  $\theta' = d\theta/dt$ .

Нетрудно проверить, что уравнения (5) эквивалентны равенствам

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4 = h + q(t)f, \quad \varphi = (A_2 + \kappa_a I)^{-1}(g_2 + \kappa_a[\theta]^4), \quad (6)$$

где  $h = g_1 + b\kappa_a(A_2 + \kappa_a I)^{-1}g_2$ . Отметим, что  $B[\theta]^4 = ([\theta]^4 - \varphi) + (A_2 + \kappa_a I)^{-1}g_2$ , где  $\varphi$  определяется по формуле (6), поскольку  $B = I - \kappa_a(A_2 + \kappa_a I)^{-1} = A_2(A_2 + \kappa_a I)^{-1}$ . Из условия интегрального переопределения следует представление для интенсивности источника,

$$q(t) = \frac{1}{(f, g)}(A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4, g) + s(t), \quad \text{где } s(t) = \frac{1}{(f, g)}(r'(t) - (h, g)). \quad (7)$$

В силу условия (iii) справедливо и обратное: из (6), (7) следует, что  $(g, \theta(t)) = r(t)$ ,  $t \in (0, T)$ . Таким образом, задача (1)–(4) сводится к задаче Коши для уравнения с операторными коэффициентами:

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4 = \frac{1}{(f, g)}(A_1\theta + b\kappa_a B[\theta]^4, g)f + h_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (8)$$

Здесь  $h_0 = h + s(t)f$ .

### 3. Разрешимость обратной задачи

Достаточным условием существования решения нелинейной обратной задачи является ограничение, налагаемое на параметр  $\mu$  в (ii), которое выполняется, если угол между векторами  $f$  и  $g$  из  $L^2(\Omega)$  достаточно мал.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i)–(iii) и справедливо неравенство

$$p_0 = \frac{\sigma + 2\kappa_a}{\sigma} |\Omega|^{3/10} \|g\|_{L^5(\Omega)} \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} < 1. \quad (9)$$

Тогда задача (1)–(4) имеет решение, и при этом  $\theta \in L^5(Q)$ .

Доказательство теоремы основано на получении априорных оценок для галеркинских приближений решения задачи (8) и на последующем предельном переходе. В пространстве  $V$  рассмотрим ортонормированный в  $H$  базис  $w_1, w_2, \dots$ ,  $V_m = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$ . Пусть  $\theta_m(t) \in V_m$ ,  $t \in (0, T)$  является решением следующей задачи Коши:

$$(\theta'_m + A_1\theta_m + b\kappa_a B[\theta_m]^4 - q_m f, \zeta) = (h_0, \zeta), \quad \forall \zeta \in V_m, \quad \theta_m|_{t=0} = \theta_{0m}. \quad (10)$$

Здесь

$$q_m = \frac{1}{(f, g_m)} (A_1 \theta_m + b \kappa_a B [\theta_m]^4, g_m),$$

$g_m, \theta_{0m}$  — ортогональные проекции в  $H$  функций  $g, \theta_0$  на подпространство  $V_m$ .

Условие (9) позволяет доказать, что

$$\text{последовательность } \theta_m \text{ ограничена в } L^\infty(0, T; H), L^2(0, T; V), L^5(Q). \quad (11)$$

Кроме того, справедлива оценка, гарантирующая компактность последовательности  $\theta_m$  в  $L^2(Q)$ .

$$\int_0^{T-h} \|\theta_m(s+h) - \theta_m(s)\|^2 ds \leq Ch. \quad (12)$$

Полученные оценки (11), (12) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательности, что существует функция  $\theta$ ,

$$\theta_m \rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), L^5(Q), *_- \text{ слабо в } L^\infty(0, T; H), \text{ сильно в } L^2(Q). \quad (13)$$

Результатов (13) достаточно для предельного перехода при  $m \rightarrow \infty$  в системе (10) и доказательства того, что предельная функция  $\theta$  удовлетворяет уравнению в (8) в смысле теории распределений и выполняется начальное условие. Отметим также, что поскольку из полученных оценок следуют включения  $q \in L^{5/4}(0, T)$ ,  $A\theta \in L^2(0, T; V')$ ,  $B[\theta]^4 \in L^{5/4}(0, T; V')$ , то функция  $\theta'$  также принадлежит  $L^{5/4}(0, T; V')$  и дифференциальное уравнение в (6) выполняется почти всюду на  $(0, T)$ . Кроме того,  $\varphi \in L^{5/4}(0, T; V)$ .

Отметим, что в случае  $g = f$  условие (9) заведомо выполняется, поскольку  $\mu = 0$ . Именно этот случай рассмотрен в статье [25].

Дополнительные условия, налагаемые на исходные данные, позволяют доказать, что решение задачи (1)–(4) будет более регулярным и единственным.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)–(iii), (9) и дополнительно  $\theta_0 \in V$ ,  $f \in V$ ,  $\theta_b = 0$ . Тогда решение задачи (1)–(4) единственно и обладает свойствами

$$\begin{aligned} \theta' &\in L^2(0, T; V'), \theta \in L^\infty(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^{15}(\Omega)), A_1 \theta \in L^2(Q), \\ \varphi &\in L^2(0, T; V), q \in L^2(0, T). \end{aligned}$$

Условия теоремы позволяют получить более сильные оценки галеркинских приближений (10). В качестве базисных функций  $w_1, w_2, \dots$  следует брать собственные функции оператора  $A_1$ ,  $A_1 w_j = \lambda_j w_j$ . В этом случае  $A_1 \theta_m \in V_m$ . Это позволяет получить то, что

$$\begin{aligned} \text{последовательность } \theta_m \text{ ограничена в } L^\infty(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^{15}(\Omega)), \\ A_1 \theta_m \text{ ограничена в } L^2(Q). \end{aligned} \quad (14)$$

Из оценок (14) вытекает, что для решения задачи (1)–(4) справедливы включения  $\theta \in L^\infty(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^{15}(\Omega))$ ,  $A_1 \theta \in L^2(Q)$ . Кроме того,  $\varphi \in L^2(0, T; V)$ ,  $q \in L^2(0, T)$ ,  $\theta' \in L^2(0, T; V')$ . Из полученных включений следует интегрируемость функции  $t \mapsto \|\theta^3\|_{L^3(\Omega)}^2$  на  $(0, T)$ , что влечет за собой единственность решения обратной задачи.

#### 4. Численное моделирование

Приведем примеры решения обратной задачи для одномерной модели, описывающей сложный теплообмен в плоскопараллельном слое толщиной  $L$  с отражающими границами.

Неизвестную интенсивность источников  $q(t), t \in (0, T)$  аппроксимируем постоянной на каждом интервале сетки по времени,  $q(t) = q_m, t \in (t_{m-1}, t_m)$  и последовательно подбираем  $q_m, m = 1, 2, \dots$ , таким образом, чтобы выполнялось равенство  $I(q_m) \equiv \int_0^L g(x)\theta(x, t_m) dx = r(t_m)$ . С учетом монотонности функции  $I(q)$  для решения уравнения  $I(q) = r$  можно использовать метод бисекций. Для численного решения прямой задачи используется разностная схема неявного метода Эйлера с линеаризацией методом Ньютона на равномерной сетке. Исходный код программы доступен по ссылке [https://github.com/grenkin/inverse\\_heat](https://github.com/grenkin/inverse_heat).

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма даже в том случае, когда не выполнены достаточные условия однозначной разрешимости, представленные в предыдущих параграфах. Пусть  $L = 50$  см. Физические параметры среды соответствуют данным из [2]. Термодинамические характеристики соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре  $400^\circ\text{C}$ ,  $a = 0.92$  см<sup>2</sup>/с,  $b = 18.7$  см/с. Положим  $T = 20$  с,  $\kappa_a = 0.01$  см<sup>-1</sup>,  $\alpha = 3.3 \dots$  см),  $\beta = 10$  см/с,  $\gamma = 0.3$ ,  $\theta_b = 0.4$ . Начальная температура  $\theta_0(x) = 0.8, x \in [0, L]$ . В дальнейшем  $f(x) = 1$ , если  $x \in [0, 20]$ , и  $f(x) = 0$  иначе, т.е. источники локализованы в левой части интервала  $\Omega = (0, L)$ . В качестве весовой функции в условии переопределения (4) выбираем гладкую функцию с носителем  $[x_1, x_2] \subset [0, L]$ ,

$$g(x; x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1} \right) \right), \text{ если } x \in (x_1, x_2), \text{ и } g(x; x_1, x_2) = 0 \text{ иначе.}$$

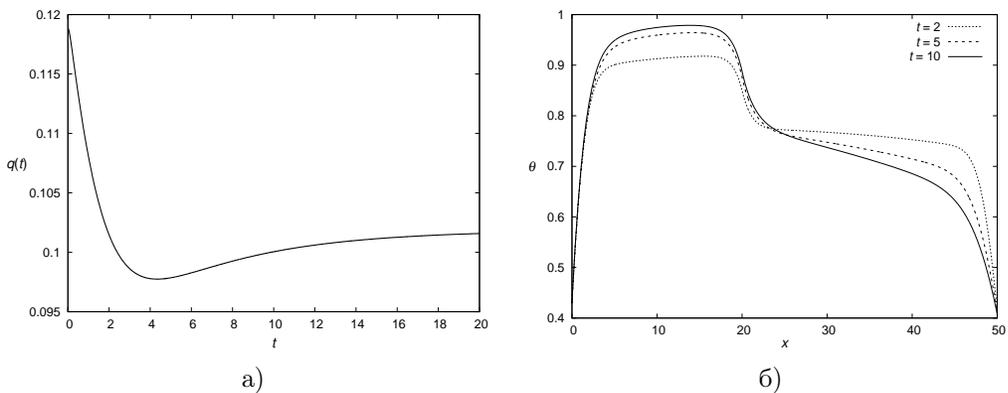


Рис. 1. а) Интенсивность источников обратной задачи. б) Поле температуры при  $t = 2, 5, 10$ .

**Пример 1.** Положим  $g(x) := g(x; 10, 40)$ ,  $x \in (0, 50)$ ,  $r(t) = 12$ ,  $t \in (0, T)$ . Носители функций  $f$  и  $g$  пересекаются на отрезке  $[10, 20]$ . На рис. 1а представлен график найденной интенсивности источников  $q(t)$ ,  $t \in (0, T)$ , а на рис. 1б — график поля температуры в моменты времени  $t = 2, 5, 10$ .

Используемый метод теоретического анализа обратной задачи предполагает, что пересечение носителей функций  $f$  и  $g$  имеет положительную меру, а также что  $g \in H^1(\Omega)$ . Однако постановка обратной задачи (1)–(4) имеет смысл, даже если носители не пересекаются. Представленный алгоритм численного решения работает и в этом случае. Приведем пример, когда носители функций  $f$  и  $g$  не пересекаются.

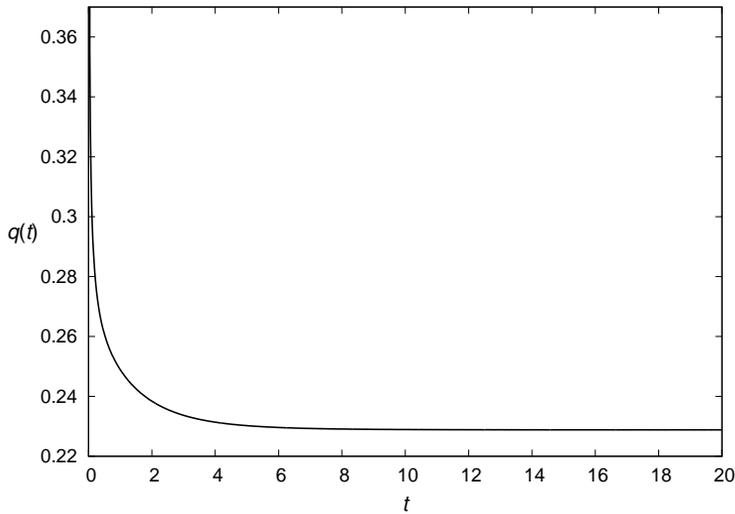


Рис. 2. Решение обратной задачи.

**Пример 2.** Положим  $g(x) := g(x; 30, 50)$ ,  $x \in (0, 50)$ ,  $r(t) = 8$ ,  $t \in (0, T)$ . График вычисленной интенсивности  $q(t)$  представлен на рис. 2.

Отметим следующую особенность численного решения обратной задачи в случае непересекающихся носителей функций  $f$  и  $g$ . В примере 2 величина  $q(t)$  достигает сравнительно большого значения (порядка  $10^1$ ) на первом временном слое, а значения  $q(t)$  на последующих временных слоях имеют порядок  $10^{-1}$ . При уменьшении шага сетки по времени значение  $q(t)$  на первом временном слое увеличивается.

Отметим также, что при постоянной функции  $r(t) = \text{Const}$  решение обратной задачи  $q(t)$ , начиная с некоторого момента времени, мало изменяется, что иллюстрирует стабилизацию решения обратной задачи.

## Список литературы

- [1] Modest M.F., *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.
- [2] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **20**:2, (2015), 776–784.
- [3] R. Pinnau, “Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP<sub>1</sub>-System”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.
- [4] P.-E. Druet, “Existence of weak solutions to the time-dependent MHD-equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **10**:5, (2009), 2914–2936.
- [5] O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow, “Identification of temperature dependent parameters in laser–interstitial thermo therapy”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:9, (2012), 1–29.
- [6] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, “An iterative method for solving a complex heat transfer problem”, *Appl. Math. Comput.*, **219**, (2013), 9356–9362.
- [7] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:4, (2014), 191–199.
- [8] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem”, *Appl. Math. Comput.*, **249**, (2014), 247–252.
- [9] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2, (2014), 808–815.
- [10] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:12, (2014), 1590–1597.
- [11] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена”, *Дальневосточный математический журнал*, **14**:1, (2014), 18–32.
- [12] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:11, (2014), 1806–1816.
- [13] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **412**, (2014), 520–528.
- [14] Г. В. Гренкин, “Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена”, *Дальневосточный математический журнал*, **14**:2, (2014), 160–172.
- [15] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена”, *Сибирские электронные математические известия*, **12**:11, (2015), 562–576.
- [16] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:2, (2016), 275–282.
- [17] G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Boundary optimal control problem of complex heat transfer model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **433**, (2016), 1243–1260.
- [18] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects”, *J. Math. Anal. Appl.*, **439**, (2016), 678–689.
- [19] A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, G. V. Grenkin, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model”, *Applied Mathematics and Computation*, **289**, (2016), 371–380.

- [20] Г. В. Гренкин, “Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:1, (2016), 24–38.
- [21] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Управление сложным теплообменом при создании экстремальных полей”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:10, (2016), 1725–1732.
- [22] А. Е. Ковтаныук, А. Ю. Чеботарев, “Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:5, (2016), 816–823.
- [23] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, “Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer”, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6, (2017), 2511–2519.
- [24] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange”, *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2, (2018), 737–744.
- [25] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, “An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1, (2019), 737–744.

Поступила в редакцию  
22 февраля 2019 г.

Работа выполнена в соответствии с госзада-  
нием ИПМ ДВО РАН.

---

*Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V.* Finding the source intensity in the radiative heat transfer model by integral overdetermination. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 1. P. 88–95.

#### ABSTRACT

The quasi-static problem of radiation-diffusion heat transfer in three-dimensional domain is considered. It is required to find the intensity of thermal sources and the corresponding temperature and radiation fields according to the additional integral condition. Sufficient conditions for non-local unique solvability of the inverse problem are found. The theoretical analysis is illustrated by numerical examples.

Key words: *quasi-static equations of radiative heat transfer, inverse problem, non-local unique solvability, numerical simulation*.