Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 6–9

УДК 517.52, 512.742.72
MSC2010 11B37, 33E05

© Ю. Г. Богоутдинова[1]

О лорановости последовательности Сомос-8

Зелевинский и Фомин (2002) доказали лорановость последовательностей Сомос-$4, 5, 6, 7$. В работе вычислен наименьший номер, для которого соответствующий элемент последовательности Сомос-8 не является полиномом Лорана.

Ключевые слова: *нелинейные рекуррентные последовательности, квадратичные последовательности, последовательности Сомоса.*

Введение

Пусть $k \geqslant 2$ — натуральное число и

$$\{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k/2\}, \quad \{x_j \mid -k/2 < j \leqslant k/2\}$$

— независимые формальные переменные. Последовательность рациональных функций Сомос-k

$$\{S_k(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

однозначно определяется начальными значениями

$$S_k(j) = x_j \quad (-k/2 < j \leqslant k/2)$$

и рекуррентным квадратичным соотношением

$$\begin{gathered} S_k\left(n + [(k+1)/2]\right) S_k\left(n - [k/2]\right) = \\ = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \alpha_i S_k\left(n + [(k+1)/2] - i\right) S_k\left(n - [k/2] + i\right) \end{gathered} \tag{1}$$

с коэффициентами α_i.

При $k = 2{,}3$ соотношение (1) записывается в виде

$$S_2(n+1)S_2(n-1) = \alpha_1 S_2^2(n),$$

$$S_3(n+2)S_3(n-1) = \alpha_1 S_3(n+1)S_3(n).$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: bogoutdinova@iam.khv.ru

Нетрудно показать, что

$$S_2(n) = \alpha_1^{n(n-1)/2} x_0^{1-n} x_1^n,$$

$$S_3(n) = \begin{cases} \alpha_1^{n^2/4} x_{-1}^{-n/2} x_0 x_1^{n/2}, & \text{если } n \text{ — чётное;} \\ \alpha_1^{(n^2-1)/4} x_{-1}^{(1-n)/2} x_1^{(n+1)/2}, & \text{если } n \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

При $k \geqslant 4$ таких простых формул нет. Опираясь на теорию кластерных алгебр, Фомин и Зелевинский в работе [1] доказали, что при $k = 4,5,6,7$

$$S_k(n) \in \mathbb{Z}\left[\ldots, x_j^{\pm 1}, \ldots; \alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}\right].$$

Другими словами, $S_k(n)$ — полиномы относительно переменных α_i $(1 \leqslant i \leqslant k/2)$ с коэффициентами, которые являются полиномами Лорана с целыми коэффициентами относительно переменных x_j $(-k/2 < j \leqslant k/2)$.

В настоящей работе с помощью математического пакета Wolfram Mathematica установлено, что $S_8(13)$ не является полиномом Лорана.

Автор благодарит Быковского В. А. за поставленную задачу.

1. Полиномиальные последовательности Сомос-4, 5, 6, 7

Быковский В. А. (устное сообщение) предложил рассматривать последовательности Сомос-k с коэффициентами

$$\alpha_i = \beta_i \prod_{-\frac{k}{2} < j \leqslant \frac{k}{2}} x_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant k/2), \tag{2}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_{[k/2]}$ — независимые переменные. Численные эксперименты показали, что при этом элементы соответствующих последовательностей

$$Q_k(n) = Q_k(n; \beta_1, \ldots, \beta_{[k/2]}; \ldots, x_j, \ldots)$$

— полиномы от переменных β_i и x_j с целыми коэффициентами при

$$k = 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

В случае k=2,3 этот факт — прямое следствие формул для $S_2(n)$ и $S_3(n)$ из введения. Более того, Быковский В. А. и Устинов А. В. доказали полиномиальность $Q_k(n)$ для $k = 4,5$. Лорановость $S_k(n)$ следует из этого результата в более сильной форме при замене β_i по формулам из (2).

2. Сомос-8

С помощью математического пакета Wolfram Mathematica вычислялись элементы последовательности $Q_8(n)$ с начальными значениями

$$Q_8(j) = x_j \quad (-3 \leqslant j \leqslant 4)$$

и рекуррентным соотношением

$$Q_8(n+4)Q_8(n-4) = x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2x_3x_4\times$$
$$\times\left(\beta_1 Q_8(n+3)Q_8(n-3) + \beta_2 Q_8(n+2)Q_8(n-2) + \beta_3 Q_8(n+1)Q_8(n-1) + \beta_4 Q_8^2(n)\right).$$

Переставив в $Q_8(n)$ переменные x_j в обратном порядке, получим последовательность Сомос-8 $Q_8^*(n)$ с теми же коэффициентами β_i, для которой

$$Q_8^*(n) = Q_8(1-n).$$

По этой причине мы вычисляем $Q_8(n)$ только для положительных номеров n.

В результате вычислений было установлено, что для $5 \leqslant n \leqslant 12$ $Q_8(n)$ — полиномы, а

$$Q_8(13) = \frac{P_8(13)}{x_{-1}x_3\beta_2 + x_0x_2\beta_3 + x_1^2\beta_4 + x_{-2}x_4\beta_1}$$

— несократимая дробь с $P_8(n)$, полиномом с целыми коэффициентами. У $Q_8(14)$ в знаменателе несократимой дроби появляется дополнительный множитель

$$x_2^2\beta_4 + x_0x_4\beta_2 + x_1x_3\beta_3 + x_{-2}x_{-1}^3x_0x_1x_2x_3^2x_4\beta_1\beta_2 + x_{-2}x_{-1}^2x_0^2x_1x_2^2x_3x_4\beta_1\beta_3$$
$$+x_{-2}x_{-1}^2x_0x_1^3x_2x_3x_4\beta_1\beta_4 + x_{-2}^2x_{-1}^2x_0x_1x_2x_3x_4^2\beta_1^2.$$

Положив

$$\alpha_1 = x_j = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant k/2, -k/2 < j \leqslant k/2),$$

получим последовательность положительных рациональных чисел $s_k(n)$. В [2], [3], [4] и [5] было установлено, что для $k{=}4{,}5{,}6{,}7$ $s_k(n)$ — последовательности натуральных чисел. В то же время выяснилось, что $s_8(-3),\dots,s_8(13)$ — целые числа, а

$$s_8(14) = \frac{420514}{7}$$

— не целое число. Таким образом, лорановость $s_8(n)$ нарушается на номер раньше, чем в предыдущем численном примере.

Список литературы

[1] S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28**, (2002), 119–144.

[2] M. Somos, “Problem 1470”, *Crux Mathematicorum*, **15**, (1989), 208.

[3] D. Gale, “The strange and surprising saga of the Somos sequences”, *Math. Intelligencer*, **13**, (1991), 40–42.

[4] J. L. Malouf, “An integer sequence from a rational recursion”, *Discrete Mathematics*, **110**, (1992), 257–261.

[5] J. Propp, “The Somos Sequence Site”, http://jamespropp.org/somos.html.

Поступила в редакцию
18 марта 2019 г.

Bogoutdinova Yu. G. On the Laurent property of the Somos-8 sequences. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 6–9.

ABSTRACT

Zelevinsky and Fomin (2002) proved the Laurent property of the Somos-4, 5, 6, 7 sequences. In the paper the smallest number such that the corresponding element of the Somos-8 sequence is not a Laurent polynomial is calculated.

Key words: *nonlinear recurrent sequences, quadratic sequences, Somos sequences.*