

УДК 539.374

MSC2010 34B05+65M06+74C10

© А. Н. Прокудин¹, С. В. Фирсов¹

Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние во вращающемся полом цилиндре. В постановке задачи используется теория малых деформаций, закон Гука, ассоциированный закон пластического течения и модифицированное условие пластичности Мизеса. Для стационарной задачи получено точное решение. Нестационарная задача решается с помощью численного алгоритма на основе метода конечных разностей. Результаты расчетов приведены в виде графиков напряжений, перемещений и деформаций.

Ключевые слова: *вязкопластичность, упругость, вращающийся цилиндр, конечные разности.*

Введение

Исследование пластического деформирования вращающихся цилиндров и дисков представляет значительный практический интерес, поскольку позволяет более точно установить прочностный ресурс конструкции по сравнению с упругим анализом. Чаще всего для этого используются уравнения теории малых деформаций, ассоциированный закон пластического течения и условия пластичности Треска или Мизеса. Стоит отметить, что анализ пластических деформаций в цилиндре обычно оказывается сложнее, поскольку в нем все три главных напряжения отличны от нуля. Вращающийся сплошной цилиндр с закрепленными концами из идеально пластического материала изучался в работе [1]. При этом учитывались только деформации пластичности, и использовалось условие несжимаемости. Установлено, что в такой постановке деформация цилиндра сводится к равномерному осевому сжатию и осесимметричному поперечному расширению, равному половине сжатия. Радиальное и тангенциальное напряжение совпадают, а осевое напряжение отличается от них на величину предела текучести σ_y . Упругопластический анализ вращающегося цилиндра с использованием условия пластичности Треска проведен в работе [2], в которой

¹ Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

Электронная почта: sunbeam_85@mail.ru (А. Н. Прокудин), firsov.s.new@yandex.ru (С. В. Фирсов).

также отдельно изучался случай конечных деформаций. Как и в [1], предполагалось, что в области пластического течения радиальное и тангенциальное напряжения совпадают. Однако, как позднее было показано в работе [3], посвященной решению той же задачи, данное предположение приводит к разрыву перемещений на упругопластической границе. В представленном авторами [3, 4] решении условие пластичности Треска впервые выполняется в центре цилиндра, при этом $\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} > \sigma_{zz}$, что приводит к одновременному образованию двух пластических областей, первая из которых соответствует ребру призмы Треска $\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} > \sigma_{zz}$, а вторая – грани $\sigma_{\phi\phi} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. При дальнейшем увеличении скорости вращения на внешней поверхности цилиндра также выполняется условие пластичности $\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} = \sigma_y$, и в результате возникает внешняя область пластического течения. Последующее повышение скорости вращения приводит к слиянию внутренних и внешней пластических областей. Полученное таким образом решение является непрерывным во всем цилиндре на всех стадиях пластического течения. Сплошной цилиндр из линейно упрочняющегося материала рассматривался в статье [5]. Интересно отметить, что в цилиндре со свободными концами внешняя пластическая область не появляется.

Упругопластическая задача в полом цилиндре с закрепленными концами решена в работе [6]. Авторами установлено, что условие текучести $\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} = \sigma_y$ впервые выполняется на внутренней поверхности цилиндра, после чего область пластического течения распространяется на весь цилиндр. Аналогичная задача для полого цилиндра со свободными концами решена в [7]. В этом случае развитие пластического течения существенно отличается от течения в закрепленном цилиндре. Условие текучести $\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} = \sigma_y$ также впервые выполняется на внутренней поверхности цилиндра. Однако затем на упругопластической границе выполняется условие $\sigma_{rr} = \sigma_{zz}$, соответствующее ребру призмы Треска. В результате в цилиндре возникают сразу три области пластического течения. В первой $\sigma_{\phi\phi} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, во второй $\sigma_{\phi\phi} > \sigma_{zz} = \sigma_{rr}$ и в третьей $\sigma_{\phi\phi} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. В дальнейшем первая область исчезает, а пластическое течение распространяется на весь цилиндр. Упругопластическое деформирование сплошного и полого цилиндра с применением условия пластичности Мизеса и нелинейного закона упрочнения изучалось в [8]. При этом, в отличие от работ [2–7], использовалась деформационная теория пластичности. Решение проводилось с помощью численных методов и показало, что условие Мизеса дает большую оценку на предельную скорость вращения цилиндра по сравнению с условием Треска.

На практике, кроме инерционных сил, вызванных вращением, на цилиндр могут действовать температурные, электромагнитные и другие поля. В работе [9] исследовалась вращающаяся труба, по которой движется разогретая среда. Задача решалась в стационарной постановке с заданной температурой на внутренней и внешней поверхности трубы. Результаты показали, что при определенных условиях пластическое течение может начаться на внешней поверхности. Кроме того, труба, нагруженная градиентом температуры практически до предела текучести, способна выдерживать значительные скорости вращения до начала пластического течения.

Во всех рассмотренных публикациях исследуется пластическая деформация, зависящая только от скорости вращения цилиндра. В настоящей работе рассматривается упруговязкопластическое деформирование вращающегося цилиндра, что поз-

воляет проследить развитие пластических деформаций в цилиндре в зависимости от скорости и времени приложения нагрузки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим длинный полый цилиндр, внешний и внутренний радиус которого равны соответственно a и b . Цилиндр вращается с угловой скоростью $\omega(t)$, которая медленно меняется со временем, и поэтому угловым ускорением будем пренебрегать. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z , ось z , которой совпадает с образующей цилиндра. Для удобства перейдем к безразмерной радиальной координате:

$$\beta = \frac{r}{b}, \quad \delta = \frac{a}{b}, \quad \delta \leq \beta \leq 1.$$

Предположим, что деформации, возникающие в цилиндре, являются малыми, а напряженное-деформированное состояние одинаково в каждом сечении цилиндра и зависит только от радиальной координаты β . Вектор перемещений имеет две неизвестные компоненты u_r и u_z . В дальнейшем компоненту u_r будем обозначать как u .

Рассмотрим цилиндр как с закрепленными, так и со свободными концами. Компоненты полных деформаций будем обозначать как d_{ij} , а их упругие и пластические составляющие — e_{ij} и p_{ij} . Кинематические соотношения запишем в следующем виде:

$$d_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta} = e_{rr} + p_{rr}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u}{\beta} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi}, \quad d_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = e_{zz} + p_{zz}. \quad (1)$$

В случае закрепленного цилиндра имеет место плоская деформация $d_{zz} = 0$, а в случае свободного цилиндра — обобщенная плоская деформация $d_{zz} \neq 0, \partial d_{zz} / \partial \beta = 0$.

Единственное нетривиальное уравнение равновесия в безразмерном виде примет следующую форму:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\beta} = -\Omega\beta, \quad \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_y}, \quad (2)$$

где ρ — плотность, σ_y — предел текучести при растяжении/сжатии.

Напряжения связаны с упругими деформациями по закону Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\varphi\varphi} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi} + (1-\nu)e_{zz}), \end{aligned} \quad (3)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

При определенной скорости вращения Ω_p на внутренней поверхности $\beta = \delta$ цилиндра начинается пластическое течение. После этого цилиндр разделяется на внутреннюю область пластического течения и внешнюю область чисто упругого деформирования. При дальнейшем увеличении скорости вращения упругопластическая

граница продвигается по направлению к внешней поверхности $\beta = 1$ цилиндра. В результате чего пластическое течение распространяется на весь цилиндр.

Скорости пластических деформаций ϵ_{ij}^p определяются ассоциированным законом пластического течения

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

где λ — положительный множитель, Φ — пластический потенциал.

В качестве условия текучести воспользуемся модификацией условия Мизеса на случай вязкопластического течения:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) &= \left(s_{ij} - \frac{\eta}{\sigma_y} \epsilon_{ij}^p \right) \left(s_{ji} - \frac{\eta}{\sigma_y} \epsilon_{ji}^p \right) = \frac{2}{3}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}; \quad \epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^p \delta_{ij}, \end{aligned}$$

где η — вязкость, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, ϵ_{ij}^p — компоненты девиатора тензора скоростей пластических деформаций.

Заметим, что при $\eta = 0$ используемое условие сводится к классическому условию Мизеса для идеальной пластичности.

Преобразуем условие текучести к виду

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - Z(\epsilon_{rr}^p - \epsilon_{\varphi\varphi}^p))^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} - Z(\epsilon_{\varphi\varphi}^p - \epsilon_{zz}^p))^2 + \\ + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - Z(\epsilon_{zz}^p - \epsilon_{rr}^p))^2 = 2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $Z = \eta/\sigma_y$.

Найдем производные $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$ с учетом пластической несжимаемости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}} &= 2(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} - 3\eta\epsilon_{rr}), \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}} &= 2(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} - 3\eta\epsilon_{\varphi\varphi}), \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} &= 2(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - 3\eta\epsilon_{zz}). \end{aligned}$$

С помощью ассоциированного закона найдем выражения для скоростей пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr}^p &= \frac{\lambda}{(1 + 3\lambda\eta)} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \\ \epsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{\lambda}{(1 + 3\lambda\eta)} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \epsilon_{zz}^p &= \frac{\lambda}{(1 + 3\lambda\eta)} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}). \end{aligned}$$

Подставим найденные выражения обратно в условие пластичности, найдем отсюда

неизвестный множитель $\frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}$, и получим окончательно

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) s_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) s_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}^p = \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) s_{zz}, \quad (6)$$

$$\Sigma = \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}.$$

Также для удобства введем величину $\bar{\Sigma} = \Sigma/\sqrt{2}$.

Рассмотрим граничные и начальные условия задачи. Внутренняя и внешняя поверхность цилиндра свободны от напряжений:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (7)$$

В случае цилиндра со свободными концами требуется дополнительное условие для определения осевой деформации d_{zz} . Суммарная осевая сила, действующая в сечении цилиндра, равняется нулю:

$$2\pi \int_{\delta}^1 \beta \cdot \sigma_{zz} d\beta = 0. \quad (8)$$

В начальный момент времени пластические деформации равны нулю:

$$\varepsilon_{rr}^p(t=0) = \varepsilon_{\varphi\varphi}^p(t=0) = \varepsilon_{zz}^p(t=0) = 0. \quad (9)$$

Записанная система уравнений (1), (2), (3), (6) с учетом граничных и начальных условий (7), (8), (9) описывает упруговязкопластическое деформирование цилиндра, вращающегося с переменной скоростью. Вначале рассмотрим точное решение для двух частных случаев данной системы, а далее перейдем к численному решению для общего случая.

2. Упругое решение

Если пластическое течение в цилиндре не происходит, то полные деформации совпадают с упругими и уравнение равновесия в перемещениях запишем следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u = - \frac{\sigma_y (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{E (1 - \nu)} \Omega \beta. \quad (10)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u = \frac{c_1}{\beta} + c_2 \beta - \frac{1}{8} \frac{\sigma_y (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{E (1 - \nu)} \Omega \beta^3,$$

здесь c_1, c_2 — константы интегрирования.

С помощью закона Гука и граничных условий найдем неизвестные константы c_1, c_2 . В результате для случая закрепленного цилиндра ($d_{zz} = 0$) получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8} \frac{\sigma_y (1 + \nu) (3 - 2\nu)}{E (1 - \nu)} \Omega \left(\delta^2 \frac{1}{\beta} + (1 - 2\nu) (1 + \delta^2) \beta - \frac{(1 - 2\nu)}{(3 - 2\nu)} \beta^3 \right), \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{8} \frac{(3 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \Omega \left(1 + \delta^2 - \delta^2 \frac{1}{\beta^2} - \beta^2 \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{8} \frac{(3 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \Omega \left(1 + \delta^2 + \delta^2 \frac{1}{\beta^2} - \frac{(1 + 2\nu)}{(3 - 2\nu)} \beta^2 \right), \quad \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (11)$$

Из приведенного решения найдем скорость Ω_p , при которой в цилиндре начинается пластическое течение. Для этого на внутренней поверхности должно выполняться условие текучести (5) в виде $\Sigma = 2$, это произойдет, когда

$$\Omega_p = 4 \frac{(1 - \nu)}{(3 + \delta^2 - 2\nu(1 + \delta^2))} \sqrt{\frac{1}{(1 - \nu + \nu^2)}}. \quad (12)$$

В случае свободного цилиндра ($d_{zz} \neq 0$) дополнительно используем условие (8) на осевую силу, из которого следует, что

$$d_{zz} = - \frac{2\nu}{(1 - \nu)} \frac{u(1) - \delta \cdot u(\delta)}{(1 - \delta^2)}.$$

Далее, используя граничные условия (7), найдем c_1, c_2 и получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8} \frac{\sigma_y (1 + \nu)}{E (1 - \nu)} \Omega \left((3 - 2\nu) \delta^2 \frac{1}{\beta} + \frac{(3 - 5\nu)}{(1 + \nu)} (1 + \delta^2) \beta - (1 - 2\nu) \beta^3 \right), \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{8} \frac{(3 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \Omega \left(1 + \delta^2 - \delta^2 \frac{1}{\beta^2} - \beta^2 \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{8} \frac{(3 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \Omega \left(1 + \delta^2 + \delta^2 \frac{1}{\beta^2} - \frac{(1 + 2\nu)}{(3 - 2\nu)} \beta^2 \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\nu}{1 - \nu} \Omega (1 + \delta^2 - 2\beta^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что напряжение σ_{zz} не зависит от типа граничных условий. В частности, для цилиндра с жестким включением ($u(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0$) σ_{zz} будет иметь такой же вид.

Аналогичным образом найдем скорость начала пластического течения Ω_p :

$$\Omega_p = 4 \frac{(1 - \nu)}{\sqrt{(3 + \delta^2)^2 + \nu^2 (7 + 6\delta^2 + 3\delta^4) - \nu (15 + 14\delta^2 + 3\delta^4)}}. \quad (14)$$

Упругое решение в виде графиков напряжений и перемещений представлено на рис. 1 и 2. Скорость начала пластического течения в зависимости от δ представлена рис. 3. Следует отметить, что в свободном цилиндре пластическое течение начинается при меньшей скорости вращения, чем в закрепленном. В частности, для $\nu = 0.3, \delta = 0.2$ пластическое течение начинается в закрепленном цилиндре при $\Omega = 1.2609$, а в свободном при $\Omega = 1.1859$.

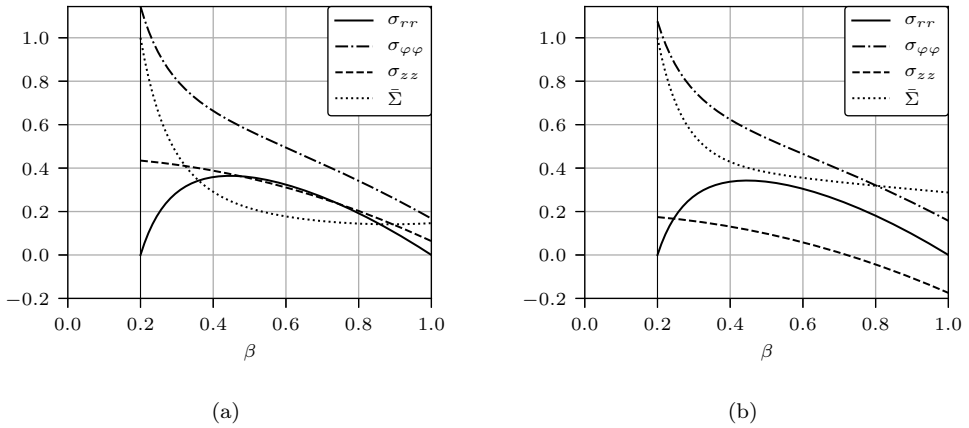


Рис. 1. Напряжения в момент начала пластического течения: (а) закреплённый цилиндр; (б) свободный цилиндр.

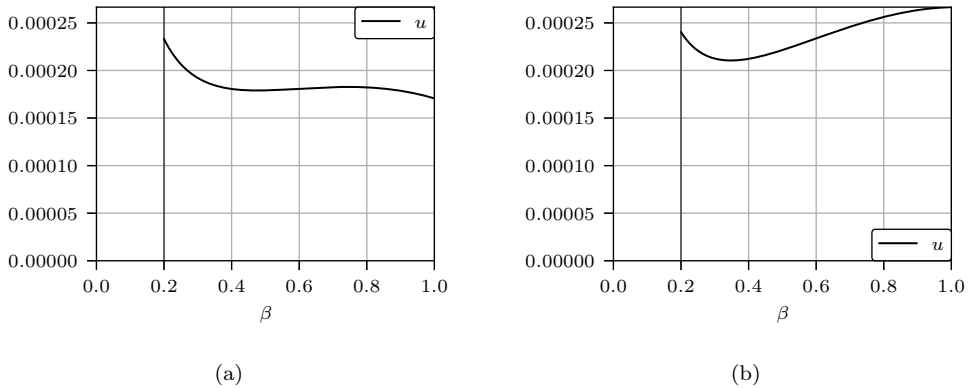


Рис. 2. Перемещения в момент начала пластического течения: (а) закреплённый цилиндр; (б) свободный цилиндр.

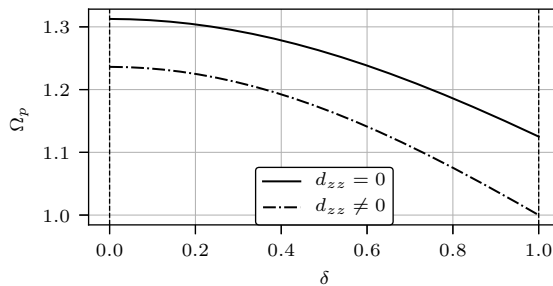


Рис. 3. Скорость начала пластического течения Ω_p .

3. Вязкопластическое решение

Предположим, что цилиндр вращается с постоянной скоростью, которая достаточна для того, чтобы пластическое течение происходило во всем цилиндре. Рассмотрим стационарный случай, при котором напряжения постоянны, а пластические деформации накапливаются с постоянной скоростью. Тогда полные скорости деформаций среды равны скоростям пластических деформаций

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{v}{\beta}, \quad \varepsilon_{zz}^p = \varepsilon_{zz},$$

где v — радиальная компонента скорости, ε_{zz} — скорость осевой деформации. В случае плоской деформации $\varepsilon_{zz} = 0$, в случае обобщенной плоской деформации $\varepsilon_{zz} \neq 0$ и не зависит от β .

Поскольку материал цилиндра пластически несжимаем, то

$$\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{zz}^p = 0.$$

Решение уравнения несжимаемости:

$$\varepsilon_{rr}^p = -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} - \frac{c}{\beta^2}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \frac{c}{\beta^2}, \quad (15)$$

где c — константа интегрирования.

Рассмотрим случай закрепленного цилиндра $\varepsilon_{zz} = 0$, тогда $\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -\varepsilon_{rr}^p$ и ассоциированный закон пластического течения (6) с учетом решения (15) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\beta^2} &= \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) \left(\sigma_{rr} - \frac{1}{3}\sigma\right), \\ \frac{c}{\beta^2} &= \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\sigma\right), \\ 0 &= \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3}\sigma\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Из третьего уравнения следует, что

$$\sigma_{zz} = \frac{(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})}{2}. \quad (17)$$

Используя предыдущее выражение и тот факт, что в цилиндре $\sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{rr}$, первые два уравнения (16) можно значительно упростить

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= -\varepsilon_{rr}^p = \frac{c}{\beta^2} = \frac{Z}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})}\right) (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}). \end{aligned}$$

Найдем разность напряжений $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \frac{2c}{Z} \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (18)$$

Подставляя найденное выражение в уравнение равновесия (2), получим

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\Omega\beta + \frac{2c}{Z} \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\beta}.$$

Решение этого уравнения запишется следующим образом:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\Omega}{2}\beta^2 - \frac{c}{Z} \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + d, \quad (19)$$

где d — константа интегрирования.

Используя граничные условия задачи (7), получим систему уравнений для определения неизвестных констант c, d :

$$-\Omega \frac{\delta^2}{2} - \frac{c}{Z} \frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \delta + d = 0, \quad -\Omega \frac{1}{2} - \frac{c}{Z} + d = 0.$$

Отсюда найдем, что

$$c = Z \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right), \quad d = \frac{\Omega}{2} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right).$$

Подставляя найденные константы в (19), а также в (18), (17) и (15), получим выражения для напряжений и скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} (\ln \beta + 1), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \ln \beta + 1), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= -\varepsilon_{rr}^p = Z \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \frac{1}{\beta^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что от вязкости Z зависят только скорости деформаций.

Полученное решение имеет смысл, когда пластическое течение происходит во всем цилиндре:

$$\Omega \geq \Omega_{fp},$$

где Ω_{fp} — минимальная скорость, при которой условие пластичности выполняется на внешней поверхности цилиндра.

Условие пластичности (5) на упругопластической границе примет вид

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Используя решение (20) в точке $\beta = 1$, найдем

$$\Omega_{fp} = -\frac{4 \ln \delta}{\sqrt{3}(1 - \delta^2)}$$

Теперь рассмотрим случай обобщенной плоской деформации. Скорости пластических деформаций имеют следующий вид

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} - \frac{c}{\beta^2} &= Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{rr} - \frac{1}{3}\sigma \right), \\ -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \frac{c}{\beta^2} &= Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\sigma \right), \\ \varepsilon_{zz} &= Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3}\sigma \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Введем обозначение $K = Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right)$ и из последнего выражения найдем напряжение σ_{zz} :

$$\sigma_{zz} = \frac{(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})}{2} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{zz}}{K}.$$

Подставим найденное выражение в два первых уравнения (21), а затем вычтем из второго уравнения первое и получим:

$$\begin{aligned} K &= \frac{2c}{\beta^2} \frac{1}{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}}{2} + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon_{zz}}{c} \beta^2 (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}). \end{aligned} \quad (22)$$

С учетом того, что в свободном цилиндре также $\sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{rr}$, найдем

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2\beta^4)}{8c^2}} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}). \quad (23)$$

Подставим выражения (22), (23) во второе уравнение (21):

$$-\frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \frac{c}{\beta^2} = Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2\beta^4)}{8c^2}} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})} \right) \frac{(2c - \varepsilon_{zz}\beta^2) (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})}{4c}.$$

Положим, что $c \geq 0$, и после преобразований найдем разность напряжений:

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \frac{2c}{Z} \frac{1}{\beta^2} + \frac{4c}{\sqrt{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2\beta^4)}}. \quad (24)$$

Уравнение равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\Omega\beta + \frac{2c}{Z} \frac{1}{\beta^3} + \frac{4c}{\beta \sqrt{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2\beta^4)}}.$$

Его решение:

$$\sigma_{rr} = -\frac{c}{Z} \frac{1}{\beta^2} - \frac{\Omega}{2} \beta^2 + \frac{\left(\ln \beta^2 - \ln \left(c \left(2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4} \right) \right) \right)}{\sqrt{3}} + d. \quad (25)$$

С помощью граничного условия $\sigma_{rr}(1) = 0$ найдем константу интегрирования d , и напряжения с учетом (22), (24), (25) примут следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \frac{c}{Z} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \frac{c}{Z} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{4c}{\sqrt{3} \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \frac{c}{Z} + \frac{3\varepsilon_{zz}}{2Z} + \frac{2c + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^2}{\sqrt{3} \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что полученное решение сводится к решению для случая плоской деформации, если положить $\varepsilon_{zz} = 0$.

Для определения константы c и скорости осевой деформации ε_{zz} необходимо использовать граничное условие на внутренней поверхности цилиндра и условие на осевую силу. После преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2} (1 - \delta^2) + \frac{c}{Z} \left(1 - \frac{1}{\delta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \delta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \delta^4}} \right) &= 0, \\ \frac{\sqrt{12c^2 + 9\varepsilon_{zz}^2}}{\varepsilon_{zz}} - \frac{\sqrt{12c^2 + 9\varepsilon_{zz}^2 \delta^4}}{\varepsilon_{zz}} + \frac{9\varepsilon_{zz}}{2Z} (1 - \delta^2) + \frac{3}{4} \Omega (1 - \delta^4) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Видим, что, в отличие от плоской деформации, система уравнений относительно неизвестных констант является нелинейной и получить ее точное решение затруднительно, поэтому будем использовать численные методы.

Для определения скорости вращения Ω_{fp} к системе (27) добавим условие пластичности на внешней поверхности цилиндра:

$$\Sigma(1) = \sqrt{2}. \quad (28)$$

Зависимость скорости Ω_{fp} от δ представлена на рис. 4. Линия, соответствующая случаю обобщенной плоской деформации, построена с помощью интерполяции.

Заметим, что свободный цилиндр переходит в состояние полной пластичности при меньшей скорости вращения, чем закрепленный. Численные расчеты показали, что, в частности, для $\nu = 0.3, \delta = 0.2$ в свободном цилиндре $\Omega_{fp} = 2.93838$, а в

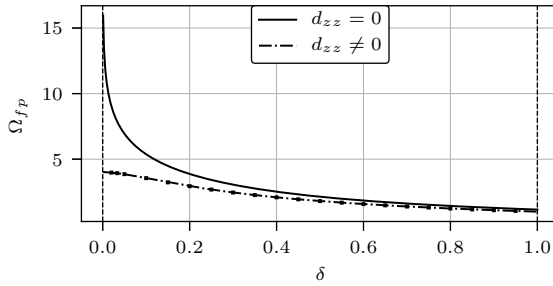
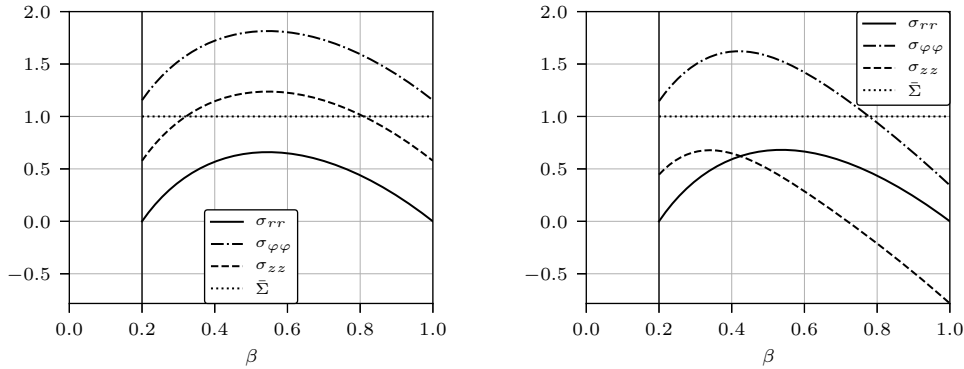


Рис. 4. Скорость начала пластического течения Ω_{fp} .



(a)

(b)

Рис. 5. Напряжения при скорости вращения Ω_{fp} : (a) закреплённый цилиндр; (b) свободный цилиндр

закрепленном $\Omega_{fp} = 3.87171$. Полученное вязкопластическое решение при скорости вращения Ω_{fp} представлено на рис. 5 в виде графиков напряжений.

Приведенные рассуждения можно повторить для условия пластичности Треска, которое для вязкопластического течения можно записать в виде

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 1 + 2 \frac{\eta}{\sigma_y} \max |\varepsilon_i^p - \varepsilon_j^p|$$

При достаточно больших значениях δ для закрепленного цилиндра выполняется неравенство $\sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, что позволяет повторить ход решения, рассмотренный выше для условия Мизеса (5). При этом все неизвестные функции (скорости деформаций, напряжения, скорость Ω_{fp}) оказываются незначительно меньше, чем при использовании условия Мизеса. В закрепленном цилиндре, близком к сплошному, а также в свободном цилиндре появляется область, в которой $\sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, и однозначно выразить наибольшее и наименьшее главное напряжение становится

невозможным. В этом случае решение задачи усложняется, поскольку необходимо записывать ассоциированный закон отдельно для каждой подобласти и использовать условие непрерывности напряжений на границе между ними.

4. Численная схема

Рассмотрим решение упруговязкопластической задачи. Перепишем уравнение равновесия (2) с помощью закона Гука (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u = & - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \frac{\sigma_y}{E} \Omega \beta + \\ + \frac{\partial p_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \left(\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \beta} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial \beta} \right) + & \frac{1}{\beta} \frac{(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (29)$$

Для численного интегрирования уравнения (29) будем использовать метод конечных разностей. Разобьем область деформирования $[\delta, 1]$ на n узлов с координатами $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. Узел с индексом 0 соответствует левой границе области, а с индексом $n-1$ — правой границе. Шаг сетки обозначим как β . Будем использовать равномерную сетку, тогда:

$$\beta = \frac{1 - \delta}{n - 1}, \quad \beta_i = \delta + i \cdot \beta, \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Для аппроксимации пространственных производных будем применять центральные шаблоны аппроксимации 2-го порядка точности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} & \cong \frac{y^{i-1,j} - 2y^{i,j} + y^{i+1,j}}{\beta^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2), \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} & \cong \frac{y^{i+1,j} - y^{i-1,j}}{2\beta}, \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2), \end{aligned}$$

здесь $y^{i,j}$ — значение неизвестной функции y в i -ом узле на j -м временном шаге. При этом в граничных точках $i=0, i=n-1$ будем дополнительно использовать односторонние шаблоны 2-го порядка точности

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \beta} & \cong \frac{-y^{i+2,j} + 4y^{i+1,j} - 3y^{i,j}}{2\beta}, \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} & \cong \frac{y^{i-2,j} - 4y^{i-1,j} + 3y^{i,j}}{2\beta}. \end{aligned}$$

В уравнениях (6) от времени t перейдем к безразмерной переменной τ :

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial \tau} = X \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) s_{ij}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad X = \frac{\sigma_y T}{\eta}, \quad (30)$$

где T — продолжительность процесса.

Весь процесс деформирования разделим на m временных шагов одинаковой продолжительности $\Delta\tau$. Для аппроксимации производной по времени в уравнениях (30) будем использовать явную схему:

$$p_{ij}^{k,t} = p_{ij}^{k,t-1} + \Delta\tau \cdot X \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma^{k,t-1}} \right) s_{ij}^{k,t-1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1, t = 1, 2, \dots, m).$$

Считаем, что на 0-м временном шаге все неизвестные величины равны нулю, тогда 1-ый шаг будет соответствовать упругому решению. Область пластического течения и положение упругопластической границы n_p определяются с помощью численной аппроксимации условия пластичности. Узел с индексом i относится к области пластического течения, если

$$\Sigma^i \leq \sqrt{2},$$

и к области чисто упругого деформирования в противном случае.

При расчете обобщенной плоской деформации требуется вычисление осевой деформации d_{zz} . Для этого преобразуем условие (8) с помощью закона Гука, получим

$$d_{zz} = \frac{2}{(1-\delta^2)} I(p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, p_{zz}) - \frac{2}{(1-\delta^2)} \frac{\nu}{1-\nu} u^{n-1} + \frac{2\delta}{(1-\delta^2)} \frac{\nu}{1-\nu} u^0,$$

$$I(p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, p_{zz}) = \frac{\nu}{1-\nu} \int_{\delta}^1 \beta \cdot (p_{rr} + p_{\varphi\varphi}) d\beta + \int_{\delta}^1 \beta \cdot p_{zz} d\beta.$$

Как видим, нахождение деформации d_{zz} требует вычисления определенных интегралов. Для этого можно воспользоваться методом трапеций:

$$\int_{\delta}^1 \beta \cdot (p_{rr} + p_{\varphi\varphi}) d\beta \cong \beta \left(\frac{\delta \cdot (p_{rr}^0 + p_{\varphi\varphi}^0) + p_{rr}^{k-1} + p_{\varphi\varphi}^{k-1}}{2} + \sum_{i=1}^{k-2} \beta_i (p_{rr}^i + p_{\varphi\varphi}^i) \right),$$

$$\int_{\delta}^1 \beta \cdot p_{zz} d\beta \cong \beta \left(\frac{\delta \cdot p_{zz}^0 + p_{zz}^{k-1}}{2} + \sum_{i=1}^{k-2} \beta_i p_{zz}^i \right).$$

5. Результаты

Рассмотрим вращение цилиндра по следующему закону: сначала происходит увеличение скорости вращения от Ω_p до Ω_{max} , далее скорость остается постоянной:

$$\Omega(\tau) = \begin{cases} \frac{(\Omega_{max} + \Omega_p)}{2} + (\Omega_{max} - \Omega_p) \sin\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right) & , 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}, \\ \Omega_{max} & , \frac{1}{2} < \tau \leq 1. \end{cases}$$

Положим, что $\Omega_{max} = 1.05 \cdot \Omega_{fp}$. При этом Ω_{fp} , разумеется, имеет разные значения для плоской деформации и обобщенной плоской деформации.

Для параметров задачи примем значения:

соотношение между внутренним и внешним радиусом: $\delta = 0.2$;

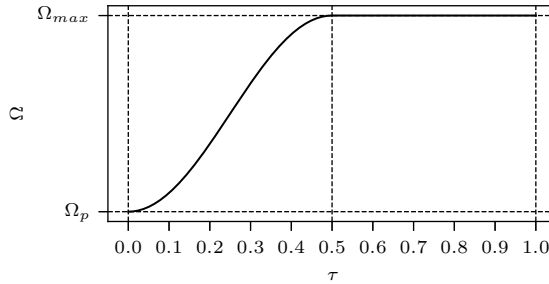


Рис. 6. Зависимость скорости вращения от времени.

предел текучести: $\sigma_y = 2.5 \cdot 10^8$ Па;
 модуль Юнга: $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па;
 предел текучести (безразмерный): $\sigma_y/E \cong 0.00119$;
 коэффициент Пуассона: $\nu = 0.3$;
 $X = \frac{\sigma_y T}{\eta} = 0.1$.

Для проведения численных расчетов использовалась сетка, состоящая из 2000 узлов и 5000 шагов по времени.

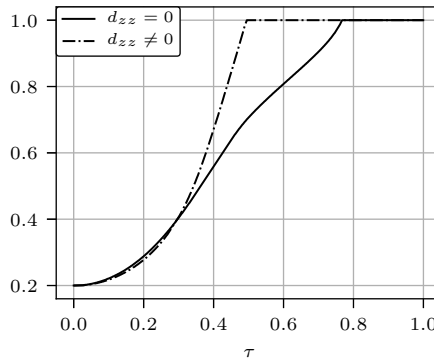
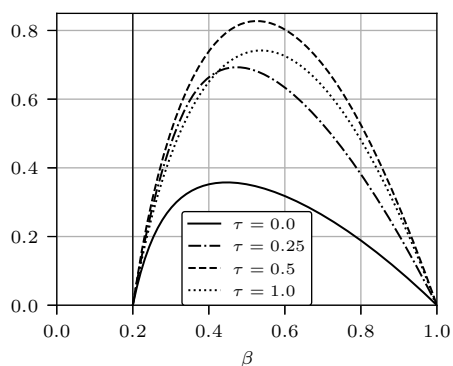


Рис. 7. Положение упругопластической границы.

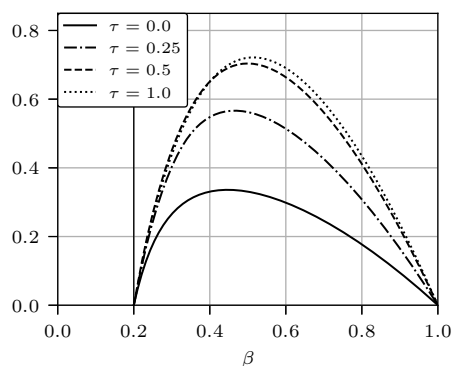
На рис. 7 представлен график движения упругопластической границы. При этом положение границы $\beta = \delta$ соответствует случаю, когда пластическое течение еще не началось, а $\beta = 1$ — когда течение происходит во всем цилиндре. На графике видим, что в свободном цилиндре пластическое течение распространяется быстрее, чем в закрепленном, и уже к середине процесса занимает цилиндр полностью. Увеличение параметра X приводит к более интенсивному развитию пластического течения в цилиндре. Тем не менее, как показали численные расчеты, если скорость вращения Ω не превосходит критической скорости Ω_{fp} , то упругопластическая граница не достигает внешней границы области даже при больших значениях X .

Рассмотрим развитие напряжений в ходе процесса. Графики напряжений для

моментов времени $\tau=0.0, 0.25, 0.5, 1.0$ представлены на рис. 8, 9, 10. При упруговязкопластическом деформировании напряжения в закрепленном и свободном цилиндре ведут себя в целом схожим образом, при этом абсолютные величины напряжений в свободном цилиндре ниже. Видим, что с развитием пластического течения точка максимума радиальных напряжений σ_{rr} сдвигается в сторону центра области (рис. 8). Наибольшими являются напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ (рис. 9), их величина в закрепленном цилиндре достигает $\approx 2\sigma_y$, а в свободном $\approx 1.7\sigma_y$. Распределение напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ существенным образом меняется в ходе процесса. Вследствие условия (8) на осевую силу, в свободном цилиндре имеется область отрицательных напряжений σ_{zz} (рис. 10). Граница этой области незначительно меняется со временем.

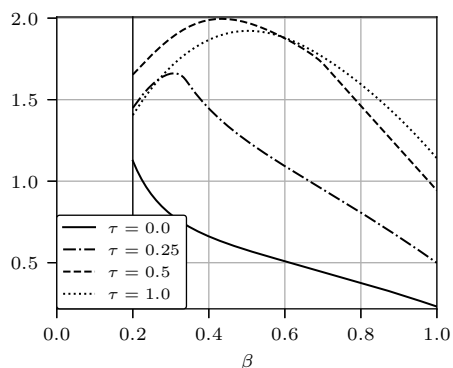


(a)

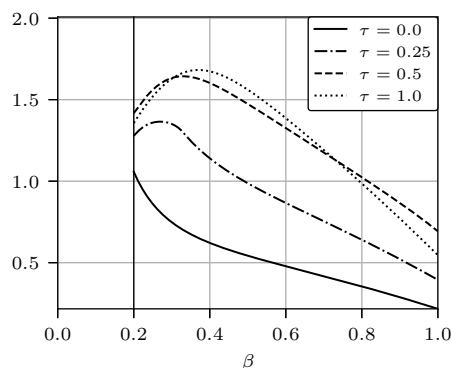


(b)

Рис. 8. Напряжения σ_{rr} : (a) закреплённый цилиндр; (b) свободный цилиндр.



(a)



(b)

Рис. 9. Напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$: (a) закреплённый цилиндр; (b) свободный цилиндр.

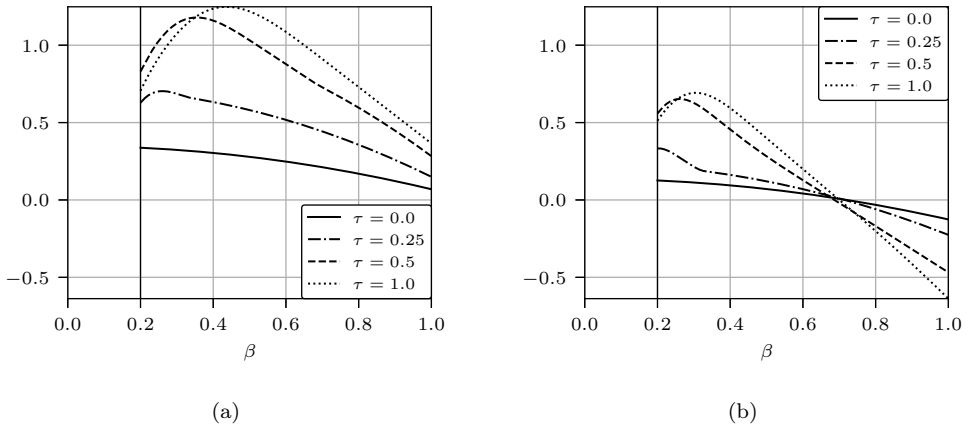


Рис. 10. Напряжения σ_{zz} : (a) закреплённый цилиндр; (b) свободный цилиндр.

Перейдем к анализу пластических деформаций. Заметим, что в закрепленном цилиндре деформации p_{zz} на два порядка меньше других компонент и $p_{rr} \cong -p_{\varphi\varphi}$. В свободном цилиндре деформации p_{zz} существенно больше по сравнению с деформациями в закрепленном, но примерно на порядок меньше деформаций p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$. Ограничимся графиком для деформаций $p_{\varphi\varphi}$ в моменты времени $\tau = 0.25, 0.5, 1.0$, который представлен на рис. 11. Видим, что в закрепленном цилиндре деформации выше, при этом деформированное состояние качественно не отличается от свободного цилиндра. Максимальное значение деформаций достигается на внутренней поверхности цилиндра.

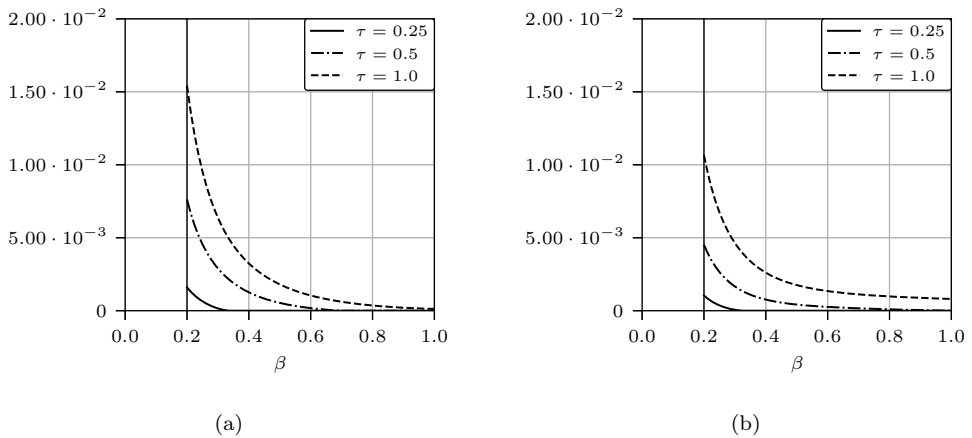


Рис. 11. Деформации $p_{\varphi\varphi}$: (a) закреплённый цилиндр; (b) свободный цилиндр.

На рис. 12 представлены графики радиальных перемещений в моменты времени $\tau = 0.0, 0.25, 0.5, 1.0$. Максимум перемещений в закрепленном цилиндре достигается на внутренней поверхности области. При этом в свободном цилиндре распределение перемещений меняется с течением времени. На первых шагах максимум достигается на внешней поверхности цилиндра, а примерно с середины процесса — на внутренней. В среднем перемещения в закрепленном цилиндре выше.

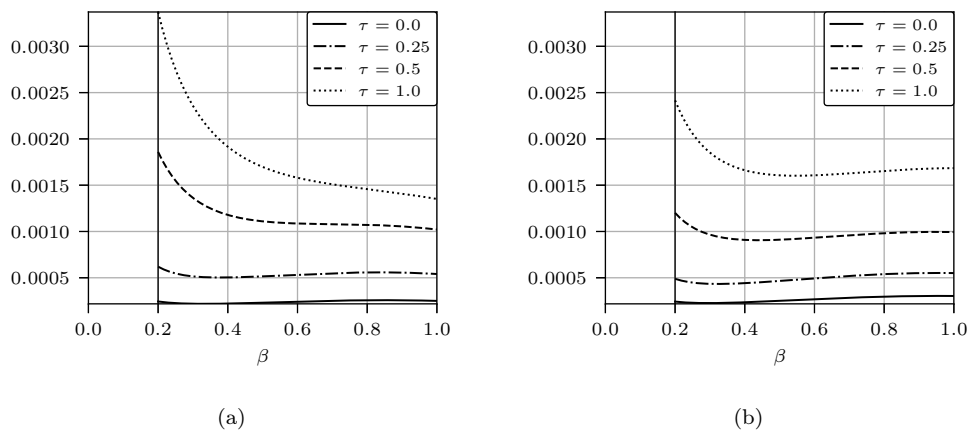


Рис. 12. Перемещения u : (а) закреплённый цилиндр; (б) свободный цилиндр.

Для проверки корректности численного алгоритма воспользуемся рассмотренными ранее точными решениями — упругим и вязкопластическим. Примем параметр $X = 1$, тогда после $\tau > 0.5$ напряжения и скорости пластических деформаций быстро стабилизируются и далее меняются незначительно. Первый и последний временной шаг представляет собой численное решение упругой и вязкопластической задачи. В обоих случаях достигается хорошее совпадение с соответствующими точными решениями.

Следует отметить, что дальнейшее увеличение параметра X или скорости вращения Ω может привести к некорректным результатам. Во-первых, с ростом деформаций в цилиндре теория малых упругопластических деформаций становится неприменимой. Во-вторых, напряжения могут превзойти предел прочности. В этом случае для адекватного моделирования упругопластического деформирования во вращающемся цилиндре необходимо использовать какую-либо теорию больших деформаций [10, 11] и одновременно учитывать эффекты вязкости и упрочнения.

Список литературы

- [1] А. Надаи, *Пластичность и разрушение твердых тел*, т. 1, Издательство иностранной литературы, М., 1954.
- [2] P. G. Hodge Jr., M. Balaban, “Elastic—plastic analysis of a rotating cylinder”, *Interna-*

- tional Journal of Mechanical Sciences*, **4**:6, (1962), 465–476, [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(62\)80008-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80008-3).
- [3] U. Gamer, M. Sayir, “Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **35**:5, (1984), 601–617, <https://doi.org/10.1007/BF00952107>.
- [4] U. Gamer, W. Mack, I. Varga, “Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends”, *International Journal of Engineering Science*, **35**:3, (1997), 253–267, [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
- [5] A. N. Eraslan, “On the linearly hardening rotating solid shaft”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **22**:2, (2003), 295–307, [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5).
- [6] U. Gamer, R. H. Lance, “Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube”, *Acta Mechanica*, **50**:1–2, (1983), 1–8, <https://doi.org/10.1007/BF01170437>.
- [7] W. Mack, “Rotating elastic-plastic tube with free ends”, *International Journal of Solids and Structures*, **27**:11, (1991), 1461–1476, [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E).
- [8] A. N. Eraslan, “Von Mises’ yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts”, *Acta Mechanica*, **168**:3–4, (2004), 129–144, <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z>.
- [9] E. Arslan, W. Mack, A. N. Eraslan, “The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium”, *Forschung im Ingenieurwesen*, **74**:1, (2010), 27–39, <https://doi.org/10.1007/s10010-010-0113-4>.
- [10] H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers, “Elastoplasticity beyond small deformations”, *Acta Mechanica*, **182**:1–2, (2006), 31–111, <https://doi.org/10.1007/s00707-005-0282-7>.
- [11] А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, *Большие необратимые деформации и упругое последствие*, Дальнаука, Владивосток, 2013.

Поступила в редакцию
27 июля 2018 г.

Prokudin A. N., Firsov S. V. Viscoplastic flow in a rotating hollow cylinder. Far Eastern Mathematical Journal. 2018. V. 18. No 2. P. 242–260.

ABSTRACT

The strains and stresses in a rotating hollow cylinder are investigated. Problem is studied using infinitesimal strain theory, Hooke’s law, modified von Mises yield criterion and the flow rule associated with it. The exact steady solution is obtained. Nonsteady problem is solved by numerical algorithm based on finite difference method. The results of computations are presented by plots of the stresses, displacements and strains.

Key words: *viscoplasticity, elasticity, rotating cylinder, finite difference.*