Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 2. С. 206–215

УДК 517.958
MSC2010 35Q20 +35Q60

© В. А. Кан[1,2], И. В. Прохоров[1,2]

Определение диффузно отражающей поверхности при импульсном облучении

Исследована обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, заключающаяся в нахождении диффузно отражающей поверхности при некоторых условиях переопределения интегрального типа. В приближении однократного рассеяния при импульсном режиме облучения для определения формы ламбертовской кривой получено нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее решение в квадратурах. На тестовых примерах проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, диффузное отражение, закон Ламберта, обратная задача.*

1. Введение

Обратные задачи для кинетических уравнений имеют многочисленные практические приложения. Это, прежде всего, дистанционное зондирование поверхности Земли, фотометрия и гидролокация морского дна, оптическая и рентгеновская томография [1–10]. В работе рассматривается обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения в области с неизвестной границей, на которой заданы условия диффузного отражения по закону Ламберта. Требуется найти границу при некотором условии переопределения решения начально-краевой задачи. Такие постановки задач возникают при мониторинге земной поверхности и морского дна с помощью авиационных радиолокационных станций и гидролокаторов бокового обзора. В работе рассматривается упрощенная двумерная модель локации ламбертовской кривой. Применение такой модели оправданно для узкой в горизонтальной плоскости диаграммы направленности приемной антенны и при небольшой скорости движения источника излучения — в сравнении со скоростью распространения сигнала в среде [9].

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7,
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690050, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
Электронная почта: `kan.va@inbox.ru` (В. А. Кан), `prokhorov@iam.dvo.ru` (И. В. Прохоров).

В трехмерном случае эта обратная задача рассматривалась в работах [9, 10]. Основное ограничение на поведение искомой поверхности в [9, 10] было связано с малостью отклонения отражающей поверхности от некоторого среднего уровня. При условиях, что диаграмма направленности приемной антенны является узкой в горизонтальной плоскости и учитывается только однократно рассеянное излучение, получена явная формула для решения обратной задачи. Проведен численный анализ влияния объемного рассеяния и ширины диаграммы направленности на качество реконструкции диффузно отражающей поверхности [9, 10].

Задачи определения диффузно отражающих поверхностей для стационарных моделей переноса излучения исследовались в работах [1, 11]. В частности, в [11] предложен метод восстановления ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям и показана его устойчивость по отношению к малым отклонениям от ламбертовости и ошибкам измерений. Методы исследования обратной задачи, используемые для стационарных и нестационарных моделей, несмотря на некоторые близкие аспекты, достаточно сильно отличаются друг от друга. В настоящей работе исследована обратная задача нестационарного уравнения переноса излучения и для определения формы ламбертовской кривой получено нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее решение в квадратурах. На сравнительно простых тестовых примерах проведены численные эксперименты.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается нестационарное уравнение переноса излучения следующего вида [7–9, 12–16]:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k}\cdot\nabla_r + \mu\right) I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{\Omega} I(\mathbf{r},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r},\mathbf{k},t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2$, $t\in[0,T]$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной окружности $\Omega=\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^2 : |\mathbf{k}|=1\}$. Функция $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$ со скоростью c. Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I^-(\mathbf{r},\mathbf{k},t)|_{t<0} = 0, \qquad (\mathbf{r},\mathbf{k}) \in G\times\Omega, \qquad (2)$$

$$I^-(\mathbf{y},\mathbf{k},t) = 2\sigma_d \int\limits_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'| I^+(\mathbf{y},\mathbf{k}',t)(\mathbf{y},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}, \qquad (\mathbf{y},\mathbf{k},t)\in\Gamma^-. \qquad (3)$$

Здесь $I^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{k},t) = \lim\limits_{\varepsilon\to-0} I(\mathbf{y}\pm\varepsilon\mathbf{k},\mathbf{k},t\pm\varepsilon/c)$,

$$\Gamma^{\pm} = \{(\mathbf{y},\mathbf{k},t)\in\gamma\times\Omega_{\pm}(\mathbf{y})\times(0,T)\}, \quad \Omega_{\pm}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{k}\in\Omega : \operatorname{sgn}(\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{k}) = \pm 1\},$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ — единичный вектор внешней нормали к границе области G, $\gamma=\partial G$. Условие (3) означает, что отражающие свойства дна определяются только диффузным отражением по закону Ламберта с коэффициентом отражения σ_d.

Уравнение (1) с начальным и граничным условиями (2), (3) при заданных μ,σ, σ_d, J, c, γ образуют начально-краевую задачу для нахождения неизвестной функции I на множестве $G \times \Omega \times (0,T)$

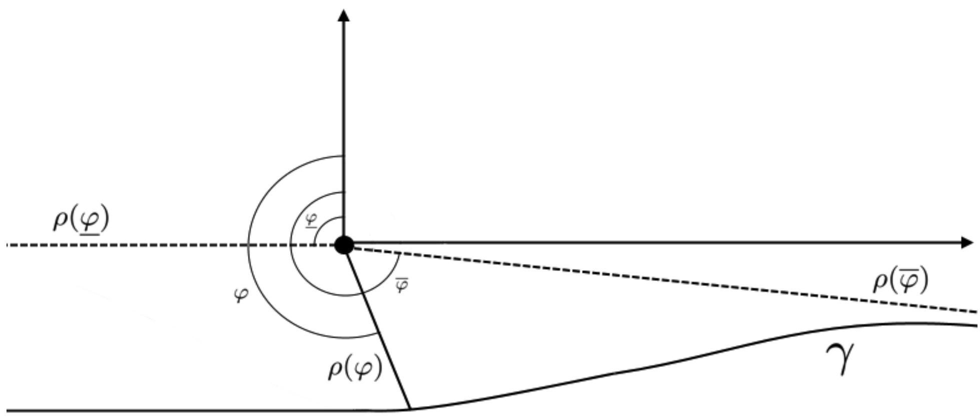


Рис. 1. Схема сканирования поверхности.

Дополним систему соотношений (1)–(3) следующими условиями

$$\int\limits_{\Omega} S_{\pm}(\mathbf{k}) I^{+}(\mathbf{o},\mathbf{k},t)d\mathbf{k} = P_{\pm}(t), \tag{4}$$

где $S_{+}(\mathbf{k})=0$ при $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k}\in\Omega : k_1>0\}$, $S_{-}(\mathbf{k})=0$ при $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k}\in\Omega : k_1<0\}$, и точка $\mathbf{o}=(0,0)$ совпадает с началом декартовой системы координат.

В реальной трехмерной задаче акустического зондирования дна океана с помощью гидролокатора бокового обзора функции $S_{-}(\mathbf{k})$ и $S_{+}(\mathbf{k})$ характеризуют диаграммы направленности приемных антенн по разным «бортам» носителя антенны [7–9], а функции $P_{\pm}(t)$ определяют суммарную интенсивность, измеряемую двумя антеннами в различные моменты времени t.

В работе рассматривается следующая обратная задача. Определить кривую γ из соотношений (1)–(4), в которых μ,σ_d,σ,J,c и функции $P_{\pm},S_{\pm}$ известны.

Будем предполагать, что объемное рассеяние в среде пренебрежимо мало, что соответствует случаю $\sigma=0$, а функция J, описывающая точечный импульсный источник звука, имеет вид

$$J(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \delta(\mathbf{r})\,\delta(t). \tag{5}$$

Процесс распространения эхосигналов происходит в неограниченной области $G\in\mathbb{R}^2$, которая является звёздной относительно начала координат, и ее граница γ задана параметрическими уравнениями

$$r_1 = -\rho(\varphi)\sin\varphi, \quad r_2 = \rho(\varphi)\cos\varphi. \tag{6}$$

Функция $\rho(\varphi)$ определена и непрерывна на множестве $(\underline{\varphi},\overline{\varphi})$, где $0<\underline{\varphi}<\pi<\overline{\varphi}<2\pi)$, дифференцируема при $\varphi\in(\underline{\varphi},\pi)\cup(\pi,\overline{\varphi})$, монотонно убывает на интервале $(\underline{\varphi},\pi)$ и монотонно возрастает на промежутке $(\pi,\overline{\varphi})$. В точках $\varphi=\underline{\varphi}$ и $\varphi=\overline{\varphi}$ функция $\rho(\varphi)$ стремится к бесконечности. Таким образом, кривая γ делит плоскость $\mathbb{R}^2$ на две неограниченные области: G и $\mathbb{R}^2\setminus\overline{G}$.

Кроме того, при решении обратной задачи (1)–(4) задано значение функции ρ в точке π: $\rho(\pi)=l$. Последнее условие типично в подобного рода задачах [1, 11] и означает, что известна одна точка искомой кривой. Уравнения (6), описывающие поверхность γ, в задачах акустической локации характеризуют изменение рельефа морского дна, и в этом случае равенство $\rho(\pi)=l$ задает высоту, на которой находится приемо-передающая антенна относительно донной поверхности (см. рис. 1).

3. Приближение однократного рассеяния

Решение начально-краевой задачи (1)–(3) эквивалентно решению следующего уравнения интегрального типа [8–13]:

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = &\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\,\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau+ \\
&+2\sigma_d\exp(-\,\mu d(\mathbf{r},-\,\mathbf{k}))\int\limits_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'|I^+\left(\mathbf{y},\mathbf{k}',t-\frac{d(\mathbf{r},-\,\mathbf{k})}{c}\right)d\mathbf{k}',
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\mathbf{y}=\mathbf{r}-d(\mathbf{r},-\,\mathbf{k})\mathbf{k}\in\partial G$ и $d(\mathbf{r},-\,\mathbf{k})$ — расстояние от точки $\mathbf{r}\in G$ в направлении $-\,\mathbf{k}$ до границы области G. Если луч, исходящий из точки $\mathbf{r}$ в направлении $-\,\mathbf{k}$ не пересекает границу области G, то для функции $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)$ справедлива явная формула

$$
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{\infty} \exp(-\,\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau. \tag{8}
$$

Заметим, что в этом случае $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)=0$ когда луч, исходящий из точки $\mathbf{r}$ в направлении $-\,\mathbf{k}$, не имеет общих точек с носителем функции J в области G.

Возьмем в качестве нулевого приближения для решения уравнения (7) функцию

$$
I_0(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\,\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau
$$

и построим процесс простых итераций. На первом шаге итерационного процесса для решения начально-краевой задачи (1)–(3) получим так называемое приближение однократного рассеяния

$$
\begin{gathered}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right) d\tau + \\
+2\sigma_d \exp\left(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k})\right) \int\limits_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{k}'| \int\limits_0^{d(\mathbf{y},-\mathbf{k}')} \exp(-\mu\tau)\times \\
\times J\left(\mathbf{y}-\tau\mathbf{k}',\mathbf{k}',t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}{c}-\frac{\tau}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}'.
\end{gathered} \tag{9}
$$

В (9) сделаем замену переменных $\mathbf{r}'=\mathbf{y}-\tau\mathbf{k}'$. Так как $d\tau d\mathbf{k}'=\dfrac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{y}|}$, то из (9) вытекает

$$
\begin{gathered}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right) d\tau + \\
+2\sigma_d \exp\left(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k})\right) \int\limits_{G(\mathbf{y})} \left|\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}\right| \exp(-\mu|\mathbf{r}'-\mathbf{y}|)\times \\
\times J\left(\mathbf{r}',\frac{\mathbf{y}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|},t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|},
\end{gathered} \tag{10}
$$

где $G(\mathbf{y})=\{\mathbf{r}\in G:\alpha\mathbf{r}+(1-\alpha)\mathbf{y}\in G, 0<\alpha<1\}$ — часть области G, "видимой" из точки $\mathbf{y}$. Применение приближения (10) оправданно не только при достаточно малых σ_d, но и в случае слабо меняющейся донной поверхности. В частности, для плоского дна формула (10) определяет точное решение начально-краевой задачи (1)–(3) при $\sigma=0$ [14].

4. Исследование обратной задачи

Принимая во внимание ограничение (5) для функции J и «звездность» области G относительно начала координат, перепишем соотношение (10) в точке $\mathbf{r}=\mathbf{o}$:

$$
\begin{gathered}
I^+(\mathbf{o},\mathbf{k},t) = 2\exp\left(-\mu d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\right) \int\limits_{G(\mathbf{y})} |\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}| \exp(-\mu|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|)\times \\
\times\,\delta\left(\mathbf{r}'\right)\delta\left(t-\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|} = \\
=\frac{2}{|\mathbf{y}|}\exp\left(-\mu(d(\mathbf{o},-\mathbf{k})+|\mathbf{y}|)\right)\left|\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\delta\left(t-\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}|}{c}\right) = \\
=\frac{2}{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}\exp\left(-2\mu d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\right)|\mathbf{n}(-d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}|\,\delta\left(t-2\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}\right).
\end{gathered} \tag{11}
$$

Подставим (11) в условие (4):

$$\begin{aligned}P_{\pm}(t) = \int\limits_{\Omega} S_{\pm}(\mathbf{k}) I^{+}(\mathbf{o},\mathbf{k},t) d\mathbf{k} = \int\limits_{\Omega} S_{\pm}(\mathbf{k}) \frac{2}{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})} \exp\left(-2\mu d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\right) \times \\ \times \left|\mathbf{n}(-d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\right| \times \delta\left(t - 2\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}\right) d\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{12}$$

Пусть $\mathbf{k}=(k_1,k_2)=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$, тогда, учитывая параметризацию кривой γ $(\rho(\varphi)= =d(\mathbf{o},-\mathbf{k}))$, из (12) получаем

$$\begin{aligned}P_{\pm}(t) = \int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}} S_{\pm}(\varphi) I^{+}(\mathbf{o},\mathbf{k}(\varphi),t) d\varphi = \int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}} S_{\pm}(\varphi) \frac{2}{\rho(\varphi)} \exp\left(-2\mu\rho(\varphi)\right) \times \\ \times \left|\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{k}(\varphi)\right| \times \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi.\end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая, что

$$\left|\mathbf{n}(\varphi)\cdot\mathbf{k}(\varphi)\right| = \frac{\rho(\varphi)|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}},$$

из (13) получаем

$$P_{\pm}(t) = 2\int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}} S_{\pm}(\varphi) \exp\left(-2\mu\rho(\varphi)\right) \frac{|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}} \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi. \tag{14}$$

Согласно предположениям пункта 2, функция $\rho(\varphi)$ монотонна и дифференцируема на интервалах $(\underline{\varphi},\pi)$ и $(\pi,\overline{\varphi})$. Следовательно, на интервале $(\underline{\varphi},\pi)$ она имеет обратную функцию φ_{-}, а на интервале $(\pi,\overline{\varphi})$ — обратную функцию φ_{+}. Если диаграмма направленности $S_{+}(\varphi)=1$ при $\varphi\in(\pi,\overline{\varphi})$, а $S_{-}(\varphi)=1$ при $\varphi\in(\underline{\varphi},\pi)$, то из (14) находим

$$P_{\pm}(t) = \frac{c\exp(-\mu ct)}{\sqrt{1/\varphi'^2_{\pm}(ct/2)+(ct/2)^2}}. \tag{15}$$

Возвращаясь к обозначению $\rho=ct/2$ $(t=2\rho/c)$, из (15) получаем

$$\frac{P^2_{\pm}(2\rho/c)}{c^2\exp(-4\mu\rho)-\rho^2 P^2_{\pm}(2\rho/c)} = \varphi'^2_{\pm}(\rho). \tag{16}$$

Так как $\rho(\pi)=l$, то $\varphi_{\pm}(l)=\pi$, и решение дифференциального уравнения (16) можно записать в виде

$$\varphi_{\pm}(\rho) = \pi \pm \int\limits_{l}^{\rho} \frac{P_{\pm}(2\tau/c)d\tau}{\sqrt{c^2\exp(-4\mu\tau)-\tau^2 P^2_{\pm}(2\tau/c)}}. \tag{17}$$

Знаки $\pm$ в выражении (17) выбраны в соответствии с монотонным убыванием функции $\varphi_{-}(\rho)$ на интервале $(\underline{\varphi},\pi)$ и монотонным возрастанием функции $\varphi_{+}(\rho)$ на интервале $(\pi,\overline{\varphi})$.

5. Численные эксперименты

В заключительном разделе на ряде тестовых примеров мы проведем анализ численного решения обратной задачи (1)–(4). Как было показано в разделе 4, решение обратной задачи сводится к вычислению интегралов (17). В приложениях, например, в задачах зондирования донной поверхности, мы имеем дело с дискретным множеством измеренных значений функций $P_{\pm}(\rho/c), \rho=\rho_i, i=0,\dots,n$. Учитывая это замечание, из соотношений (17) получаем рекуррентные приближенные формулы для определения $\varphi^i_{\pm}$ при заданных $P_{\pm}(\rho_i/c)$:

$$\varphi^{i+1}_{\pm} = \varphi^i_{\pm} \pm \int\limits_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{P_{\pm}(2\tau/c)d\tau}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\tau) - \tau^2 P^2_{\pm}(2\tau/c)}} \approx$$

$$\approx \varphi^i_{\pm} \pm \frac{P_{\pm}(2\rho_i/c)(\rho_{i+1}-\rho_i)}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\rho_i) - \rho_i^2 P^2_{\pm}(2\rho_i/c)}}, \qquad i=0,\dots,n-1, \tag{18}$$

где $\varphi^0_{\pm}=\pi$, $\rho_0=l$ и для аппроксимации интеграла по элементарному отрезку использована формула прямоугольников. Также будем рассматривать аппроксимацию по формуле трапеций

$$\varphi^{i+1}_{\pm} = \varphi^i_{\pm} \pm \left(\frac{P_{\pm}(2\rho_i/c)(\rho_{i+1}-\rho_i)}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\rho_i) - \rho_i^2 P^2_{\pm}(2\rho_i/c)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{P_{\pm}(2\rho_{i+1}/c)(\rho_{i+1}-\rho_i)}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\rho_{i+1}) - \rho_{i+1}^2 P^2_{\pm}(2\rho_{i+1}/c)}}\right)/2, \qquad i=0,\dots,n-1. \tag{19}$$

При проведении вычислительных экспериментов предполагается, что расстояние между источником и донной поверхностью в направлении $\mathbf{k}=(0,-1)$ равно 30 метрам, то есть $\rho_0=l=30$. Скорость распространения звука полагается постоянной во всей области зондирования $c=1500$м/сек, коэффициент затухания и донного рассеяния имеют значения $\mu=0.018\text{м}^{-1}$, $\sigma_d=1$. Облучение поверхности осуществляется с дальностью зондирования $\rho_n=300$м с шагом дискретизации $\Delta\rho=\rho_{i+1}-\rho_i$, который варьируется на промежутке $[0.004, 0.4]$м.

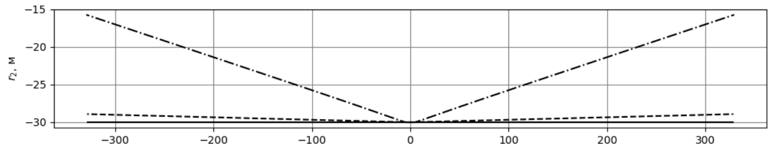
В первом численном эксперименте γ представляет собой горизонтальную прямую (плоское дно) и задается в следующем виде:

$$\begin{cases} r_1 = \,-\,\rho\sin\varphi, \\ r_2 = \,-\,l. \end{cases}$$

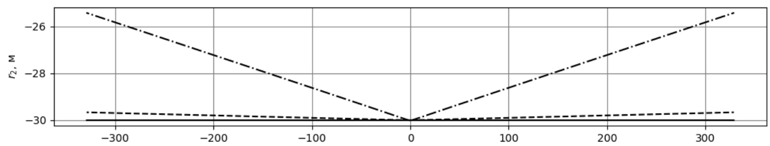
Как видно из рис. 2a и рис. 2b, погрешность формул (18) не превосходит значений 47,5% и 15% при $\Delta\rho=0.4$ и $\Delta\rho=0.04$ соответственно, а вычисления по формулам (19) приводят к ошибке, не превосходящей значений 3.6% и 1% соответственно.

В следующем тесте кривая γ задается следующими параметрическим уравнениями:

$$\begin{cases} r_1 = \,-\,\rho\sin\varphi, \\ r_2 = \,-\,l^2/\rho. \end{cases} \tag{20}$$



(a)

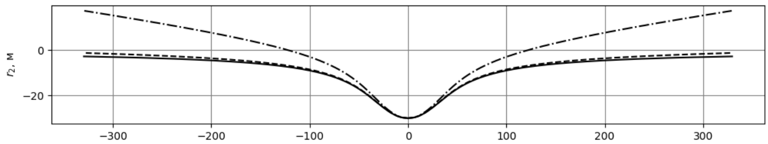


(b)

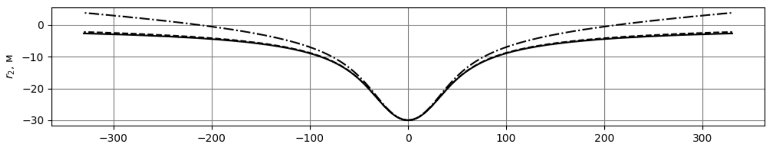
Рис. 2. Восстановление диффузно отражающей прямой $r_2 = \ - l$ при различном выборе шага дискретизации $\Delta\rho$: (a) $\Delta\rho = 0.4$; (b) $\Delta\rho = 0.04$. Сплошной линией изображено точное решение, штриховой линией – приближенное решение, полученное по формулам (19), штрихпунктирной линией – решение, полученное по формулам (18).

На рис. 3 для различной частоты дискретизации представлено восстановление кривой γ, описываемой параметрическим уравнениями (20). Как и следовало ожидать, точность восстановления кривой возрастает с уменьшением шага дискретизации. Ориентируясь на приложения теоретических результатов к задачам гидролокации, отметим следующее. Разрешение по дистанции гидролокатора бокового обзора, работающего на частотах порядка 100-600кГц, составляет величины порядка 1-5см [17]. Поэтому для практики представляют интерес графики, приведенные на рис. 2b, 2c. Максимальная относительная ошибка реконструкции кривой γ по формулам (19) при $\Delta\rho = 0.04$м не превосходит 17.5%, а при $\Delta\rho = 0.01$м — не превосходит 8.7%. При повышении разрешающей способности необходимо повышать частоту зондирующего излучения. Повешение частоты излучения приводит к росту коэффициента ослабления звука и уменьшению дальности зондирования [17].

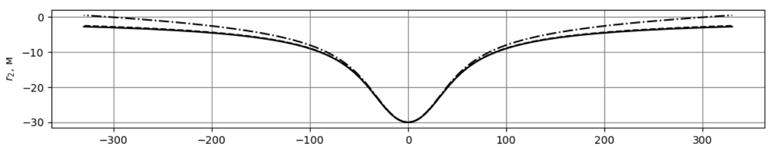
Представляет несомненный интерес исследование устойчивости решения обратной задачи при возмущении исходных данных. Предварительные исследования показали, что точность и даже сама возможность восстановления кривой γ определяется не только уровнем шума при возмущении функций $P_{\pm}$, но и величиной $\rho'(\varphi)$. Решение обратной задачи особенно чувствительно к ошибкам в исходных данных, если величина производной функции $\rho(\varphi)$ на части кривой стремится к нулю. В дальнейшем мы также намерены исследовать задачу нахождения диффузно отражающей кривой в рассеивающей среде ($\sigma \neq 0$). Детальный анализ таких и подобных задач будет предметом наших дальнейших публикаций.



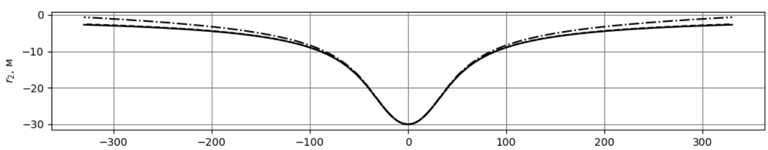
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 3. Восстановление диффузно отражающей кривой (20) в зависимости от шага дискретизации $\Delta\rho$: (*a*) $\Delta\rho = 0.4$; (*b*) $\Delta\rho = 0.04$; (*c*) $\Delta\rho = 0.01$; (*d*) $\Delta\rho = 0.004$.

Список литературы

[1] В. Р. Кирейтов, *Обратные задачи фотометрии*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.

[2] Р. Д. Урик, *Основы гидроакустики*, Судостроение, Л., 1978.

[3] А. В. Богородский, Г. В. Яковлев, Е. А. Корепин, А. К. Должиков, *Гидроакустическая техника исследования и освоения океана*, Гидрометеоиздат, Л., 1984.

[4] Д. С. Аниконов, А. Е. Ковтанюк, И. В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, Логос, М., 2000.

[5] Yu. E. Anikonov, *Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations*, VSP, Utrecht, 2001.

[6] В. В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, Физматлит, М., 2013.

[7] И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, *Дальневосточный математический журнал*, **11**:1, (2011), 76–87.

[8] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения”, *Акустический журнал*, **61**:3, (2015), 400–408.

[9] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, В. А. Кан, "Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **18**:2, (2015), 99–110.

[10] V. A. Kan, I. V. Prokhorov, A. A. Sushchenko, "Determining the bottom surface according to data of side-scan sonars", *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, **10035**, (2016), 1003518.

[11] В. А. Шарафутдинов, "О восстановлении ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям", *Доклады АН*, **249**:3, (1979), 565–568.

[12] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, "О корректности задачи Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения", *Сибирский математический журнал*, **56**:4, (2015), 922–933.

[13] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, А. Ким, "Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения", *Сибирский журнал индустриальной математики*, **20**:1, (2017), 75—85.

[14] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, "Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде", *Дальневосточный математический журнал*, **18**:1, (2018), 101—111.

[15] A. A. Amosov, "Initial-Boundary Value Problem for the Non-Stationary Radiative Transfer Equation with Fresnel Reflection and Refraction Conditions", *Journal of Mathematical Sciences*, **231**:3, (2018), 279–337.

[16] A. A. Amosov, "Initial-Boundary Value Problem for the Nonstationary Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions", *Journal of Mathematical Sciences*, **235**:2, (2018), 117–137.

[17] В. Лекомцев, "Гидроакустические средства визуализации для необитаемых подводных аппаратов", *Современные технологии автоматизации*, 2013, № 3, 78–82.

Поступила в редакцию
1 ноября 2018 г.

Kan V. A., Prokhorov I. V. Determination of a diffuse reflecting surface under pulsed irradiation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 206–215.

ABSTRACT

An inverse problem of determining a diffusely reflecting surface under given functionals of the radiation flux density for a nonstationary radiation transfer equation is considered. Assuming the point pulsed source and the single scattering approximation, authors obtained the nonlinear differential equation. The solution has been obtained in a few quadratures to determine the profile of the Lambert surface. The computational experiments were carried out on test examples.

Key words: *radiation transfer equation, diffuse reflection, Lambert's cosine law, inverse problem.*