

УДК 517.52, 512.742.72  
MSC2010 11B37, 33E05

© В. А. Быковский<sup>1</sup>

## Целочисленная последовательность Сомос-4 с рациональными коэффициентами

В работе приводится новый пример целочисленной последовательности Сомос-4 с рациональными коэффициентами.

Ключевые слова: *квадратичные рекуррентные последовательности, последовательности Сомоса, эллиптические функции.*

Пусть ( $n$  — целое)

$$S(n) = S(n; \alpha, \beta) = S(n; \alpha, \beta, x_{-1}, x_0, x_1, x_2)$$

— последовательность Сомос-4 рациональных функций, удовлетворяющих квадратичному рекуррентному соотношению

$$S(n+2)S(n-2) = \alpha S(n+1)S(n-1) + \beta S^2(n) \quad (1)$$

с начальными значениями

$$S(-1) = x_{-1}, S(0) = x_0, S(1) = x_1, S(2) = x_2.$$

В [1] Сомос отметил, что при

$$\alpha = \beta = x_{-1} = x_0 = x_1 = x_2 = 1 \quad (2)$$

возникает целочисленная последовательность (историю вопроса см. в [2]). В работе [3] было доказано, что

$$S(n) = \sum_{a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}} P_n(\alpha, \beta; a_{-1}, a_0, a_1, a_2) x_{-1}^{a_{-1}} x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

где  $P_n(\dots)$  — полиномы от  $\alpha$  и  $\beta$  с целыми коэффициентами, отличными от нуля только для конечных наборов целых чисел  $(a_{-1}, a_0, a_1, a_2)$ . Отсюда немедленно следует, что последовательность Сомос-4 с начальными значениями  $x_i = \pm 1$  с целыми

<sup>1</sup>Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: [vab@iam.khv.ru](mailto:vab@iam.khv.ru)

$\alpha$ ,  $\beta$  является целочисленной. В частности, это верно для Сомос-4 со значениями параметров из (2).

В работах [4–6] были построены трёхпараметрические и четырёхпараметрические примеры целочисленных последовательностей Сомос-4. Особо отметим работу [4], в которой впервые была найдена целочисленная последовательность Сомос-4 с начальными значениями

$$x_{-1} = x_0 = 1, \quad x_1 = -x_2 = -N$$

и рациональными коэффициентами

$$\alpha = -\frac{1}{N}, \quad \beta = 1.$$

При этом для любого целого  $N \neq -1, 0, 1$  коэффициент  $\alpha$  не является целым.

В настоящей работе мы приводим пример целочисленной последовательности Сомос-4, у которой оба коэффициента,  $\alpha$  и  $\beta$ , не являются целыми.

Напомним, что последовательность Сомос-5, определяемая начальными значениями

$$x_{-2} = x_{-1} = x_0 = x_1 = x_2 = 1$$

и коэффициентами  $\alpha = \beta = 1$  с рекуррентным соотношением

$$S(n+3)S(n-2) = S(n+2)S(n-1) + S(n+1)S(n)$$

является целочисленной (см. [1] и [2]). При этом  $S(-n) = S(n)$  и

$$S(3) = 2, \quad S(4) = 3, \quad S(5) = 5, \quad S(6) = 11, \quad S(7) = 83.$$

В работе [7] было доказано, что для любой последовательности Сомос-5 её подпоследовательности с чётными и нечётными номерами являются последовательностями Сомос-4. Положим  $A(n) = S(2n+1)$ . Подставляя в рекуррентное соотношение (1) значения последовательности  $A$  при  $n = 1, 2$ , получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 22 = 2\alpha + \beta \\ 83 = 11\alpha + 4\beta, \end{cases}$$

из которой находим, что

$$A(n+2)A(n-2) = -\frac{5}{3}A(n+1)A(n-1) + \frac{76}{3}A^2(n).$$

**Замечание.** Для последовательности Сомос-4  $B(n) = A(2n)$  рекуррентное соотношение (1) имеет вид

$$B(n+2)B(n-2) = 14B(n+1)B(n-1) - 5B^2(n).$$

## Список литературы

- [1] M. Somos, “Problem 1470”, *Cruz Mathematicorum*, **15**, (1989), 208.
- [2] D. Gale, “The strange and surprising saga of the Somos sequences”, *Mathematical Intelligencer*, **13**:1, (1991), 40–42.
- [3] S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28**, (2002), 119–144.
- [4] A. N. W. Hone, C. S. Swart, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **145**, (2008), 65–85.
- [5] М. Д. Мони́на, “Четырёхпараметрическое семейство целочисленных последовательностей Сомос-4”, *Дальневост. матем. журн.*, **18**:1, (2018), 85–89.
- [6] В. А. Быковский, М. Д. Мони́на, “Целочисленные последовательности Сомос-4”, *Доклады академии наук*, **418**:5, (2018).
- [7] Hone A. N. W., “Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2006, arXiv: math/0501554.

Поступила в редакцию  
17 октября 2018 г.

---

*Bikovskii V. A.* Integer Somos-4 sequence with rational coefficients. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018. V. 18. No 2. P. 147–149.

### ABSTRACT

The paper presents a new example of the integer Somos-4 sequence with rational coefficients.

Key words: *quadratic recurent sequences, Somos sequences, elliptic functions.*