Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 18–22

УДК 517.52, 512.742.72
MSC2010 11B37, 33E05

© В. А. Быковский[1]

О лорановости последовательности Сомос-4

В работе предложено новое доказательство лорановости последовательности Сомос-4 в более сильном виде.

Ключевые слова: *последовательность Сомоса, эллиптические функции, теоремы сложения.*

Введение

Пусть $\alpha, \beta, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$ — формальные переменные. Определим последовательность рациональных функций

$$S(n) = S(n; \alpha, \beta) = S(n; \alpha, \beta; x_{-1}, x_0, x_1, x_2) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

с помощью рекуррентного соотношения

$$S(n+2)S(n-2) = \alpha S(n+1)S(n-1) + \beta S^2(n) \tag{1}$$

и начальных значений

$$S(-1) = x_{-1},\ S(0) = x_0,\ S(1) = x_1,\ S(2) = x_2.$$

Основываясь на теории кластерных алгебр, Фомин и Зеленский [1] доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого целого* n

$$S(n) = \sum_{a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}} P_n(\alpha, \beta; a_{-1}, a_0, a_1, a_2) x_{-1}^{a_{-1}} x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

где

$$P_n(\alpha, \beta; a_{-1}, a_0, a_1, a_2)$$

— полиномы от α *и* β *с целыми коэффициентами, отличными от нуля, для конечного набора целочисленных четвёрок* (a_{-1}, a_0, a_1, a_2).

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54 Электронная почта: vab@iam.khv.ru

В работе [2] было предложено другое доказательство этого результата с помощью теории эллиптических функций. Мы доказываем более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для любого целого* n

$$S(n) = x_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n \cdot \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} Q_n(\alpha,\beta;a,b) \left(\frac{x_{-1}x_1}{x_0^2}\right)^a \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2}\right)^b,$$

где $Q_n(\alpha,\beta;a,b)$ *— последовательность полиномов от переменных* α *и* β *с целыми коэффициентами, отличными от нуля, для конечного набора целочисленных пар* (a,b).

1. Теорема сложения для $S(n)$

Пусть Γ — дискретная аддитивная подгруппа (решётка) в поле комплексных чисел. Сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решёткой Γ, определяется по формуле

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{\omega\in\Gamma\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right).$$

В вырожденных случаях

1) для $\Gamma=\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z;$$

2) для $\Gamma=\{m\omega | m\in\mathbb{Z}\}$ с $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{m\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{m\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{m\omega}\right)^2\right) = \\ = \frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{\omega}\cdot\exp\left(\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right).$$

Это нечётная функция с простыми полюсами в узлах решетки Γ.

Вейерштрасс [3] доказал, что $\sigma_\Gamma(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\begin{gathered} f(z_1+z_2)f(z_1-z_2)f(z_3+z_4)f(z_3-z_4)+ \\ f(z_1+z_3)f(z_1-z_3)f(z_4+z_2)f(z_4-z_2)+ \\ f(z_1+z_4)f(z_1-z_4)f(z_2+z_3)f(z_2-z_3)=0. \end{gathered} \tag{2}$$

Если зафиксировать переменные z_3 и z_4, то мы получим равенство (теорема сложения)

$$f(z_1+z_2)f(z_1-z_2) = \mathrm{g}_1(z_1)h_1(z_2) + \mathrm{g}_2(z_1)h_2(z_2) \tag{3}$$

с

$$\mathrm{g}_1(z) = -\frac{f(z+z_3)f(z-z_3)}{f(z_3+z_4)f(z_3-z_4)}, \qquad h_1(z) = \frac{f(z+z_4)f(-z+z_4)}{f(z_3+z_4)f(z_3-z_4)},$$

$$\mathrm{g}_2(z) = -\frac{f(z+z_4)f(z-z_4)}{f(z_3+z_4)f(z_3-z_4)}, \qquad h_2(z) = \frac{f(z+z_3)f(z-z_3)}{f(z_3+z_4)f(z_3-z_4)}.$$

Если для голоморфной функции f имеет место разложение (3) с некоторыми $g_1,g_2,h_1,h_2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, то (см. например [4]) для любых комплексных z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 выполняется равенство

$$\mathcal{D}_{\{}\begin{pmatrix} z_1, & z_2, & z_3 \\ z_4, & z_5, & z_6 \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} f(z_1+z_4)f(z_1-z_4) & f(z_1+z_5)f(z_1-z_5) & f(z_1+z_6)f(z_1-z_6) \\ f(z_2+z_4)f(z_2-z_4) & f(z_2+z_5)f(z_2-z_5) & f(z_2+z_6)f(z_2-z_6) \\ f(z_3+z_4)f(z_3-z_4) & f(z_3+z_5)f(z_3-z_5) & f(z_3+z_6)f(z_3-z_6) \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

Для нечётных f это соотношение преобразуется в соотношение Вейерштрасса (2). Очевидно, что из (4) следует разложение (3), если зафиксировать z_3, z_4, z_5 и z_6. В работе [5] было доказано, что все решения функционального уравнения (3) имеют вид

$$f(z) = \exp(az^2+bz+c)\sigma_\Gamma(z+z_0),$$

где a,b,c,z_0 – произвольные комплексные числа и Γ — любая решётка в $\mathbb{C}$.

В [6–8] и других работах было доказано, что любая невырожденная последовательность $A(n)$ Сомос–4 может быть представлена в виде

$$A(n) = \exp(an^2+bn+c)\sigma_\Gamma(z_0+nz),$$

где a,b,c,z_0 и $z\neq 0$ — комплексные числа, а Γ — решётка из $\mathbb{C}$. Отсюда с помощью (4) получаем, что для любых целых m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

2. Доказательство теорем

Определим новую последовательность

$$T(n) = x_0^{-1}(x_0/x_1)^n S(n),$$

которая удовлетворяет рекуррентному соотношению (1) и при этом $T(0)=T(1)=1$. Кроме того,

$$T(-1) = x = x_{-1}^{-1}x_0x_1, \quad T(2) = y = x_0x_1^{-2}x_2. \tag{6}$$

Поэтому мы можем считать, что

$$T(n) = T(\alpha,\beta;x,y)$$

— рациональная функция от переменных α, β, x, y. Из рекуррентного соотношения (1) с заменой S на T следует, что (полагаем $n=1,0$)

$$T(3) = \alpha\frac{y}{x}+\beta\frac{1}{x}, \quad T(-2) = \alpha\frac{x}{y}+\beta\frac{1}{y}. \tag{7}$$

Из (5) следует, что для любого целого n

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}\begin{pmatrix} n, & 1, & 0 \\ n, & 1, & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} T(2n)T(0) & T(n+1)T(n-1) & T^2(n) \\ T(1+n)T(1-n) & T(2)T(0) & T^2(1) \\ T(n)T(-n) & T(1)T(-1) & T^2(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} T(2n) - \det\begin{pmatrix} T(1+n)T(1-n) & 1 \\ T(n)T(-n) & 1 \end{pmatrix} T(n+1)T(n-1) +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} T(1+n)T(1-n) & y \\ T(n)T(-n) & x \end{pmatrix} T^2(n) = 0.$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}}\begin{pmatrix} n+1, & 1, & 0 \\ n, & 1, & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} T(2n+1)T(1) & T(n+2)T(n) & T^2(n+1) \\ T(1+n)T(1-n) & T(2)T(0) & T^2(1) \\ T(n)T(-n) & T(1)T(-1) & T^2(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} T(2n+1) - \det\begin{pmatrix} T(1+n)T(1-n) & 1 \\ T(n)T(-n) & 1 \end{pmatrix} T(n+2)T(n) +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} T(1+n)T(1-n) & y \\ T(n)T(-n) & x \end{pmatrix} T^2(n+1) = 0.$$

По этим формулам (формулам удвоения) мы можем восстановить последовательность $T(n)$, опираясь на начальные значения

$$T(-2),\, T(-1),\, T(0),\, T(1),\, T(2),\, T(3).$$

Из (6) и (7) следует, что для некоторой последовательности целых чисел $a(n)$

$$T(n) = \left(\sum_{a,b\in\mathbb{Z}} Q_n(\alpha,\beta;a,b) x^a y^b \right) (x-y)^{a(n)},$$

где

$$Q_n(\alpha,\beta;a,b) \quad (n\in\mathbb{Z})$$

— последовательность полиномов от переменных α и β с целыми коэффициентами, отличными от нуля, для конечного набора целочисленных пар (a,b). Из рекуррентного соотношения (1) следует, что при $x=y$

$$T(n) \neq 0, \infty.$$

Поэтому $a(n)=0$ для всех целых n. Принимая во внимание равенства (6), получаем утверждение теоремы 2, из которой следует теорема 1.

Список литературы

[1] S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28**, (2002), 119–144.

[2] A. N. W. Hone, C. S. Swart, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Mathematical Proceedigs of the Cambridge Philosophical Society*, **145**, (2008), 65–85.

[3] Weierstrass K., *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*, Bd. 5, Berlin, 1915.

[4] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:3, (2016), 34–46.

[5] R. Rochberg, L. Rubel, “A Functional Equation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2, (1992), 363–376.

[6] A. N. W. Hone, “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, Bulletin of the London Mathematical Society, **37**, 2005, 161–171.

[7] R. Shipsey, *Elliptic Divisibility Sequences*, PhD Thesis, Goldsmith’s University of London, 2000.

[8] C. Swart, *Elliptic curves and related sequences*, PhD Thesis, Royal Holloway and Bedford New College, University of London, 2003.

Поступила в редакцию
25 апреля 2018 г.

Bikovskii V. A. On the Laurent property of the Somos-4 sequences. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 18–22.

ABSTRACT

A new proof for the Laurent property of Somos-4 sequences in a stronger form is proposed in the paper.

Key words: *Somos sequence, elliptic functions, addition theorems*