Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 2. С. 257–265

УДК 514.174
MSC2010 52C20

© А. В. Шутов[1], Е. В. Коломейкина[2]

О числе разбиений плоскости на полигексы

Разбиение называется решетчатым, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, причем это преобразование переводит все разбиение в себя. Найдены нижняя и верхняя оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полигексы заданной площади.

Ключевые слова: *разбиения, решетчатые разбиения, полигексы, самонепересекающиеся блуждания.*

Введение

Полигекс, как известно, представляет собой фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных правильных шестиугольников, которая сильно связна, то есть из любой ячейки в любую другую ячейку этого полигекса можно попасть, переходя по общим сторонам смежных ячеек за конечное число шагов. Полигексы можно рассматривать как конечные множества шестиугольного паркетажа со связной внутренностью. Название было предложено Д. Кларнером по аналогии с названиями других полиформ [1]. Полигексы изучались в работах Гарднера [2], Голомба [3], Маерса [4], Малеева [5], Фукуды [6] и других авторов. Различают свободные полигексы (когда фигуры, полученные поворотом и отражением, считаются одной и той же фигурой), односторонние полигексы (когда фигуры, полученные зеркальным отражением, считаются различными), фиксированные полигексы, различаемые также при поворотах.

Число свободных n-полигексов для $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ дается последовательностью 1, 1, 3, 7, 22, 82, 333, ... [1, 7, 8].

В последние годы немало внимания было уделено проблеме роста ячеек, называемой “cell growth problem”. В этой проблеме, из одной ячейки решетки шаг за шагом, добавляя такие же ячейки, смежные с предыдущими по сторонам, получали кластеры, называемые “животными”. Фундаментальная комбинаторная проблема,

[1] Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, 119333, г. Москва, ул. Губкина, 8.
[2] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5.
Электронная почта: `a1981@mail.ru` (А. В. Шутов), `pihta2@rambler.ru` (Е. В. Коломейкина).

изучавшаяся Голомбом [2, 3], состоит в том, чтобы точно определить сколько существует различных “животных” с заданным числом клеток. При этом два “животных” считаются одинаковыми, если одно может быть получено из другого поворотом, переносом или отражением. Если базовая форма представляет собой квадрат, то “животные” являются полимино; если правильный шестиугольник — получаем полигексы. Эта проблема полностью не решена, несмотря на многочисленные исследования в этой области [1, 9–11]

В работах Фукуды и др. [6,12] приведен алгоритм, подсчитывающий для данного n все полигексы, которые могут быть ячейкой правильного разбиения плоскости, обладающего поворотной симметрией. В работе Малеева был предложен алгоритм поиска всевозможных периодических упаковок специальных множеств полигексов с определенными коэффициентами упаковок [5].

Задачи перечисления полигексов также тесно связаны с химией ароматических углеводородов [13, 14].

Большой вклад в популяризацию математических задач о полигексах, внес М. Гарднер, который в своей рубрике “Математические игры” в журнале Scientific American опубликовал серию статей, содержащих обсуждение этих проблем, а затем включил соответствующие главы в свои книги [2, 15–17].

Определение 1. Разбиение называется решетчатым, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, причем это преобразование переводит все разбиение в себя.

Без ограничения общности можно считать, что все вершины полигекса являются точками гексагональной решетки A_2. Можно доказать, что топологически решетчатых разбиений плоскости два, а именно: правильные разбиения плоскости на квадраты и шестиугольники. Пусть n — площадь полигекса, то есть полигекс состоит из n правильных шестиугольников, каждый из которых имеет площадь 1. Возникает задача подсчитать число $t(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полигексы заданной площади n, решетка периодов которых является подрешеткой A_2. При этом два разбиения считаются эквивалентными, если существует движение плоскости, переводящее одно из разбиений в другое, и различными в противном случае. Числа $t(n)$ для малых значений n были вычислены в работе Роудса [18]. В работе [19] была рассмотрена задача подсчета числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади с заданными решетками. Число решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади, топологически эквивалентных правильному разбиению плоскости на квадраты, рассмотрено в работе Брлеко и Фросини [20].

В работе авторов [21] ранее было показано, что для числа $t_c(n)$ решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади n справедлива оценка

$$c_1(\sqrt{2})^n \leqslant t_c(n) \leqslant c_2(n+1)^2(\sqrt{2,68})^n.$$

Мы будем рассматривать решетчатые разбиения плоскости на полигексы, гомеоморфные диску. Также мы будем предполагать, что решетка периодов разбиения является подрешеткой гексагональной решетки A_2. На рисунке 1 изображен пример

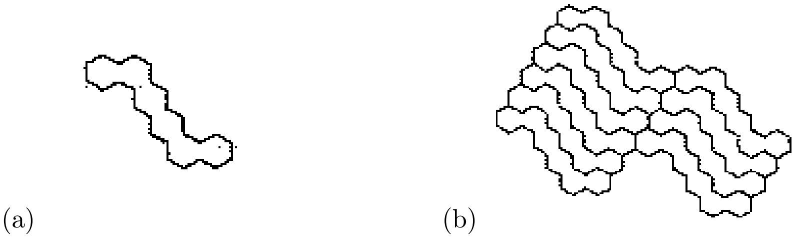

Рис. 1. (a) Полигекс. (b) Пример решетчатого разбиения.

центрально-симметричного полигекса и соответствующего ему решетчатого разбиения.

В настоящей статье мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для числа $t(n)$ решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полигексы заданной площади n, решетка периодов которых является подрешеткой решетки A_2, справедлива следующая оценка:*

$$C_1\sqrt{2}^n \leqslant t(n) \leqslant C_2 n^2 1,85^n.$$

Для доказательства теоремы 1 отдельно докажем нижнюю и верхнюю оценку.

1. Доказательство нижней оценки

Для доказательства нижней оценки достаточно построить $C_1\sqrt{2}^n$ различных центрально-симметричных полигексов, каждый из которых будет порождать хотя бы одно решетчатое разбиение. Полигексы, которые мы будем строить, представляют собой “полоски” толщины 1. Длина такой полоски равна площади полигекса.

Возьмем произвольную последовательность длины n из нулей и единиц. По ней восстановим полигекс из $n+1$ шестиугольника единичной площади. 0 и 1 определяют способ стыковки соседних шестиугольников в полигексе, а именно: 0, если следующий шестиугольник из цепочки смежен с предыдущим по целому горизонтальному нижнему ребру; 1, если следующий шестиугольник смежен с предыдущим из цепочки по целому боковому нижнему правому ребру. Предложенная кодировка, разумеется, не позволяет закодировать произвольный полигекс площади $n+1$. Тем не менее, каждому коду будет поставлен в соответствие полигекс, представляющий собой узкую полоску толщины 1. На рисунке 2 изображены центрально-симметричные полигексы, соответствующие кодам 101101 и 10101.

Если полученный из кода полигекс сдвигать каждый раз на векторы $(1;-1)$ и $(n;0)$ гексагональной решетки, то мы получаем решетчатые разбиения плоскости с решеткой периодов, порождаемой указанными базисными векторами. Решетчатое разбиение получено. Для проверки корректности выбора базисных векторов посчитаем определитель матрицы, составленной из этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ n & 0 \end{vmatrix} = n.$$

(a) (b)

Рис. 2. (a) Полигекс из кода 101101. (b) Полигекс из кода 10101.

Определитель равен площади фундаментальной области, площади полигекса. Корректность показана.

Если n — четное число, то строение центрально-симметричного полигекса определяется первой половиной данной последовательности, и максимум мы получаем $2^{n/2}$ таких разбиений. Если n — нечетное число, то строение центрально-симметричного полигекса определяется первой половиной полигекса. Если же говорить на языке цепочки из 0 и 1, то строение центрально-симметричного полигекса определяется $(n-1)/2$ первыми соединениями и одним центральным соединением. Тогда максимум мы получаем $2^{\frac{n+1}{2}}$ таких разбиений. Можно объединить эти результаты в один $2^{[\frac{n+1}{2}]}$. Любое движение, переводящее одно разбиение на полигексы в другое, обязано переводить в себя гексагональную решетку. Некоторые из этих разбиений могут совпадать, а именно: правильный шестиугольник 12 движениями (6 поворотов и 6 осей симметрии) может быть переведен в себя. А поскольку полигексы в нашей задаче центрально-симметричные, то одно разбиение может быть получено не более, чем из 6 кодов. Этим и объясняется появление константы C_1 в нижней оценке, и мы получаем

$$C_1\sqrt{2}^n \leqslant t(n).$$

Таким образом требуемая оценка снизу доказана.

2. Доказательство верхней оценки

Перейдем теперь к доказательству верхней оценки.

Вначале вместо площади будем фиксировать периметр полигекса. Обозначим через $t'(p)$ число решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полигексы полупериметра p. Данное определение корректно, так как периметр любого полигекса — четное число.

Для решетчатого разбиения существует критерий Конвея [22], устанавливающий, при каких условиях полигекс задает решетчатое разбиение.

Теорема 2. *Центрально симметричный полигекс порождает решетчатое разбиение плоскости тогда и только тогда, когда граница полигекса может быть разбита на 6 частей $abcdef$ таких, что a, b, c переходят соответственно в d, e, f параллельным* *переносом, причем a, b, c центрально-симметричны (некоторые части могут быть пустыми). При этом различным разбиениям границы полигекса соответствуют различные решетчатые разбиения плоскости на заданный полигекс.*

Разъясним геометрический смысл слова $abcdef$. Это замкнутая ломаная длины $2p$ без самопересечений (поскольку полигекс имеет самонепересекающуюся границу) с отмеченными точками. Точки нужны для того, чтобы мы могли найти границы частей a, b, c, d, e, f, то есть восстановить полигекс и разбиение. Поэтому число решетчатых разбиений на центрально-симметричные полигексы заданного периметра не превосходит числа таких ломаных. Отметим, что ломаные d, e, f однозначно восстанавливаются по ломаным a, b, c соответственно. Кроме того, каждая из ломаных a, b, c, d, e, f, в силу их центральной симметричности, восстанавливается по половине этой ломаной. Пусть длины ломаных a, b, c, d, e, f соответственно равны l_a, l_b, l_c, l_d, l_e и l_f. Ясно, что $l_a = l_d$, $l_b = l_e$, $l_c = l_f$. Кроме того, учитывая, что a, b, c, d, e, f центрально-симметричны, получаем

$$\frac{1}{2}(l_a + l_b + l_c + l_d + l_e + l_f) = p,$$

или

$$l_a + l_b + l_c = p.$$

Рассмотрим ломаные, вершины которых есть вершины шестиугольной решетки. Такие ломаные называются *самонепересекающимися блужданиями* (*self-avoiding walks*). Известно, что число $m(l)$ самонепресекающихся блужданий длины l на шестиугольной решетке не превосходит $C(\varepsilon)(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^l$ [23]. Пусть $m_c(l)$ — число самонепересекающихся центрально-симметричных ломаных длины l. Ясно, что такая ломаная полностью определяется своей половиной, которая также является самонепересекающейся. Таким образом, справедлива оценка

$$m_c(l) \leqslant \begin{cases} m((l+1)/2), & l\text{– нечетно;} \\ m(l/2), & l\text{– четно.} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$m_c(l) \leqslant m((l+1)/2) \leqslant C'(\varepsilon)(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{l/2}$$

для всех l.

Исходя из сказанного выше, отметим, что для числа $t'(p)$ решетчатых разбиений плоскости на равные центрально-симметричные полигексы полупериметра p справедлива оценка

$$t'(p) \leqslant \sum_{\substack{l_a+l_b+l_c=p,\\ l_a,l_b,l_c \geqslant 0}} m_c(l_a)m_c(l_b)m_c(l_c) \leqslant$$

$$\leqslant C'(\varepsilon_1)C'(\varepsilon_2)C'(\varepsilon_3) \sum_{\substack{l_a+l_b+l_c=p,\\ l_a,l_b,l_c \geqslant 0}} (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon_1)^{l_a/2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon_2)^{l_b/2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon_3)^{l_c/2}.$$

Если взять в качестве $\varepsilon=\max\{\varepsilon_i\}$, $i=1,...,3$, то

$$t'(p)\leqslant C'(\varepsilon)\sum_{\substack{l_a+l_b+l_c=p,\\ l_a,l_b,l_c\geqslant 0}}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{\frac{1}{2}(l_a+l_b+l_c)}\leqslant$$
$$\leqslant C'(\varepsilon)(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{p/2}\sum_{\substack{l_a+l_b+l_c=p,\\ l_a,l_b,l_c\geqslant 0}}1\leqslant C''(\varepsilon)(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{p/2}\cdot p^2.$$

Последняя оценка связана с тем, что $\sum\limits_{\substack{l_a+l_b+l_c=p,\\ l_a,l_b,l_c\geqslant 0}}1$ является количеством решений линейного диофантова уравнения $l_a+l_b+l_c=p$, которое асимптотически с точностью до константы эквивалентно p^2 [24].

Итак, мы получили, что число решетчатых разбиений на центрально -симметричные полигексы с полупериметром p не превосходит

$$t'(p)\leqslant C''(\varepsilon)p^2(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{p/2}.$$

Осталось перейти к площади аолигексов. Методом математической индукции легко получить неравество, связывающее площадь и полупериметр полигекса: $p\leqslant 2n+1$. Для получения верхней оценки числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полигексы остается просуммировать предыдущую оценку по p от 1 до $2n+1$:

$$t(n)\leqslant\sum_{p=1}^{2n+1}t'(p)\leqslant\sum_{p=1}^{2n+1}C''(\varepsilon)p^2(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{p/2}.$$

Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int\limits_0^{2n+1}C''(\varepsilon)x^2(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{x/2}dx$ и учитывая, что

$$\int x^2e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2-2ax+2),$$

получаем оценку

$$t(n)\leqslant C'''(\varepsilon)(2n+1)^2(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^n.$$

Ограничимся неравенством $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon\leqslant 1{,}85$, при этом константа $C'''(\varepsilon)$ заменяется на константу C_2, что и доказывает верхнюю оценку, а вместе с ней и всю теорему.

Список литературы

[1] D. Klarner, “A Cell growth problems”, *Cand. J. Math.*, **19**, (1967), 851–863.

[2] М. Гарднер, *Путешествие во времени*, Мир, М, 1990.

[3] С. Голомб, *Полимино*, Мир, М, 1975.

[4] J. Myers, “Polyomino, polyhex and polyiamond tiling”, http://www.srcf.ucam.org/ jsm28/ tiling/.

[5] A. V. Maleev, “Algorithm and computer-program search for variants of polyhex packing in plane”, *Crystallography Reports*, **60**:6, (2015), 986–992.

[6] H. Fukuda, N. Mutoh, G. Nakamura, D. Schattschneider, “Enumeration of Polyominoes, Polyiamonds and Polyhexes for Isohedral Tilings with Rotational Symmetry”, *KyotoCGGT LNCS 4535 H. Ito et al. (Eds.)*, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 68–78.

[7] M. Gardner, “Ch. 11. Polyhexes and Polyaboloes.”, *Mathematical Magic Show*, New York, 1978, 146–159.

[8] J. V. Knop, K. Szymanski, Ž. Jeričević, N. Trinajstić, “On the total number of polyhexes”, *Match: Commun. Math. Chem.*, **16**, (1984), 119–134.

[9] D. A. Klarner, R. L. Rivest, “A procedure for improving the upper bound for the number of n-ominoes”, *Canad. J. Math.*, **25**, (1973), 585–602.

[10] F. Harary, “The cell growth problem and its attempted solutions”, *Beitrage zur Grathentheorie*, Teubner, Leipzig, 1968, 49–60.

[11] R. C. Read, “Contributions to the cell-growth problem”, *Canad. J. Math.*, **14**, (1962), 1–20.

[12] H. Fukuda, N. Mutoh, G. Nakamura, D. Schattschneider, “A Method to Generate Polyominoes and Polyiamonds for Tilings with Rotational Symmetry”, *Graphs and Combinatorics*, **23**, (2007), 259–267.

[13] J. R. Dias, “A Periodic Table for Polycyclic Aromatic Hydrocarbons. 1. Isomer Enumeration of Fused Polycyclic Aromatic Hydrocarbon”, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, **22**, (1982), 15-22.

[14] J. R. Dias, “A Periodic Table for Polycyclic Aromatic Hydrocarbons. 2. Polycyclic Aromatic Hydrocarbons Conteining Tetragonal, Pentagonal”, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, **22**, (1982), 15-22.

[15] М. Гарднер, *Математические головоломки и развлечения*, Мир, М, 1999.

[16] М. Гарднер, *Математические досуги*, Мир, М, 1972.

[17] М. Гарднер, *Математические новеллы*, Мир, М, 1974.

[18] G. C. Rhoads, “Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **174**, (2005), 329-–353.

[19] А. В. Малеев, А. В. Шутов, “О числе трансляционных разбиений плоскости на полимино”, *Труды IX Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках"*, Апатиты, 2013, 101-–106.

[20] S. Brlek, A. Frosini, S. Rinaldi, L. Vuillon, “Tilings by translation: enumeration by a rational language approach”, *The electronic journal of combinatorics*, **13**, (2006).

[21] А. В. Шутов, Е. В. Коломейкина, “Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади”, *Моделирование и Анализ Информационных Систем*, **20**, (2014), 148-–157.

[22] D. Schattschneider, “Will it Tile? Try the Conway Criterion!”, *Mathematics Magazine*, **53**:4, (1980), 224–233.

[23] H. Duminil-Copin, S. Smirnov, “The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$”, *Annals of Mathematics*, **175**:3, (2012), 1653–1665.

[24] Ю. В. Нестеренко, А. И. Галочкин, А. Б. Шидловский, *Введение в теорию чисел*, Издательство Московского Университета, М, 1984.

Поступила в редакцию
12 апреля 2017 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-11-00433)

Shutov A. V., Kolomeykina E. V. On a number of polyhex plane tilings. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 257–265.

ABSTRACT

A tiling is called a lattice tiling if there is a group of translations which acts on the set of the tiles transitively. In the paper the low and upper bounds for the number of lattice tilings of plane with centrally symmetrical polyhexes are found.

Key words: *tilings, lattice tilings, polyhexes, self-avoiding walks.*